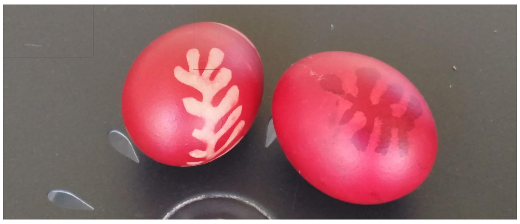
Fizički fakultet

Univerzitet u Beogradu

Kvantna teorija polja 1

2020, beleške iz karantina

Maja Burić



Sadržaj

1 Elektromagnetno polje, nekovarijantno kvantovanje

Ideje kvantne mehanike počele su baš od elektromagnetnog polja. Prvi eksperimenti u kojima je detektovana diskretnost energije i čestično ponašanje talasa su zračenje crnog tela i fotoefekat, a Planck i Einstein (1901, 1905) su imali dobru intuiciju da ove eksperimente i kvantitativno objasne i time postave temelje kvantne fizike. Ipak u daljem razvoju prvo je izvedena Schrödinger-ova jednačina, koja je nerelativistička. Jedan od ciljeva našeg kursa je da izvede opis kvantnog elektromagnetnog polja i njegove interakcije sa materijom, odnosno sa poljima materije. Prvu konkretnu ideju o pristupu tom problemu dao je Dirac 1927, a Nobelova nagrada za kvantnu elektrodinamiku dodeljena je 1965. Tomonagi, Schwinger-u i Feynman-u za radove objavljene između 1946. i 1950.

Već iz gornjih brojeva vidi se da razvoj kvantne teorije polja nije bio jednostavan. Ovaj kurs je uvodni: zasniva se na operatorskom kvantovanju polja, formalizmu koji se direktno nastavlja na kvantnu mehaniku. Kao putokaz, u prvom poglavlju ćemo kvantovati elektromagnetno polje na najjednostavniji način, nekovarijantno. Ovaj primer sumira najvažnije fizičke koncepte i matematičke metode koje ćemo kasnije koristiti.

1.1 Maxwell-ove jednačine

Klasično polje je sistem sa beskonačno mnogo stepeni slobode. To se intuitivno može razumeti iz jednostavnih mehaničkih primera kao što su polje elongacije strune koja osciluje $u(t,x)$ ili polje brzine fluida $\vec{v}(t,\vec{r})$. U oba primera polje može da se definiše diskretizacijom materije: polje u tački $\vec{r}_n$ je vrednost odgovarajuće fizicke opservable (položaja, brzine) n-tog delića u okolini te tačke. U limesu $n\to\infty$ vrednosti odgovarajuće opservable, umesto indeksom n ili $\vec{r}_n$, 'prebrojavamo' kontinualnim indeksom $\vec{r}$, pa polje ima beskonačno stepeni slobode.

U klasičnoj mehanici razmatra se mnogo primera skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja ali jedino među njima koje je fundamentalno je elektromagnetno polje. Ono je opisano Maxwell-ovim jednačinama

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\vec{E}=\rho\,, \qquad && \mathrm{rot}\,\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j} \\ &\mathrm{div}\,\vec{B}=0\,, && \mathrm{rot}\,\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Prve dve jednačine su *izvorne* jer dinamiku polja zadaju preko njegovih izvora ρ i $\vec{j}$. Druge dve su *bezizvorne* i mogu se rešiti uvođenjem elektromagnetnih potencijala,

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,,\qquad \vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}\,. \tag{1.2}$$

Ako u izvorne Maxwell-ove jednačine zamenimo (1.2), dobijamo

$$\Box\,\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{A}\right)=\rho\,,\qquad \Box\,\vec{A}+\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{A}\right)=\vec{j}\,, \tag{1.3}$$

gde je d'Alembert-ov operator $\Box = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \Delta = \partial^\mu \partial_\mu$.

Elektromagnetni potencijali i električno i magnetno polje mogu se napisati i Lorentz-kovarijantno, uvođenjem

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})\,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{1.4}$$

Onda su Maxwell-ove jednačine

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu\,, \qquad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0\,, \tag{1.5}$$

gde je $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ 4-struja, a ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, dualni tenzor elektromagnetnog polja.

Bezizvorne Maxwell-ove jednačine ne određuju potencijale u potpunosti nego do na proizvoljnu funkciju koordinata $f(t,\vec{r})$: zamena

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t}\,, \qquad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\, f \tag{1.6}$$

zove se *gauge* ili *gradijentna* simetrija (sloboda), jer funkcije ϕ' i $\vec{A}'$ daju isto električno i magnetno polje kao ϕ i $\vec{A}$. To znači da ne samo u opisu elektromagnetnog polja pomoću šest komponenti tenzora polja $F^{\mu\nu}$, nego i u opisu pomoću četiri komponente potencijala A^μ imamo 'višak'. Dodatni stepeni slobode mogu se fiksirati ekstra uslovom na potencijal (tzv. gradijentni uslov ili gejdž). Jedan od mogućih gejdž uslova je *Lorentz-ov gejdž* koji je Lorentz-kovarijantan,

$$\partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{1.7}$$

Jednačine kretanja (1.5) u Lorentz-ovom gejdžu svode se na

$$\Box\, A^\mu = j^\mu\,. \tag{1.8}$$

1.2 Klasična rešenja

Druga često korišćena mogućnost fiksiranja gejdža je *Coulomb-ov gejdž*,

$$\mathrm{div}\, \vec{A} = 0\,, \tag{1.9}$$

i njega ćemo iskoristiti u ovom odeljku da nađemo opšte rešenje jednačina kretanja za elektromagnetno polje *u vakuumu.* Ako (1.9) primenimo na jednačinu (1.3) za ϕ uz $\rho = 0$, dobijamo

$$\Delta\, \phi = 0\,. \tag{1.10}$$

Pošto je Δ laplasijan u ravnom euklidskom prostoru, granični uslov u beskonačnosti $\phi|_{r\to\infty} = 0$ daje, kao jedinstveno rešenje, $\phi = 0$. Coulomb-ov gejdž se svodi na *aksijalni*, $A^0 = 0$, a preostala jednačina za vektorski potencijal je talasna jednačina

$$\Box\, \vec{A} = 0\,. \tag{1.11}$$

Pre nego što napišemo opšte rešenje jednačine (1.11), diskretizovaćemo sistem pretpostavljajući da se elektromagnetno polje nalazi u (velikoj) kutiji, tj. $0 \leq x,\, y,\, z \leq L$, i zadovoljava periodične granične uslove. U tom slučaju, svako rešenje talasne jednačine tj. svaka konfiguracija polja može da se razvije u Fourier-ov red po ravnim talasima $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$,

$$\vec{u}_{r\vec{k}}(\vec{r}) = C\,\vec{\epsilon}_r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,, \qquad \vec{k} = \frac{2\pi}{L}\,(n_1, n_2, n_3)\,, \quad n_i \in \mathbb{Z}\,, \quad r = 1, 2\,. \tag{1.12}$$

Vektori $\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \equiv \vec{\epsilon}_{r\vec{k}}$ su vektori polarizacije. Međusobno su ortogonalni i, zbog Coulomb-ovog uslova, zadovoljavaju

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}\,, \qquad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) = 0\,, \tag{1.13}$$

pa su elektromagnetni talasi transverzalni. Ravni talasi su međusobno ortogonalni,

$$\int_0^L e^{i\,\frac{2\pi}{L}\,(n-m)x}\, dx = L\,\delta_{nm}\,, \qquad \int_0^L\!\int_0^L\!\int_0^L d^3r\; e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} = V\,\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \tag{1.14}$$

i možemo ih normirati, $C = 1/\sqrt{V}$. U kontinualnoj normalizaciji tj. ako pretpostavimo da je prostor beskonačan, $C = 1/\sqrt{(2\pi)^3}$. Prelaz sa jedne na drugu normalizaciju često se piše kao pravilo

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \;\to\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\;. \tag{1.15}$$

Pošto smo uveli oznake, napišimo razvoj proizvoljne realne funkcije (koja, dodatno, zadovoljava Coulomb-ov uslov) u Fourier-ov red:

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{\vec{k}}\sum_r \frac{1}{\sqrt{2V|\vec{k}|}}\;\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\left(a_r(t,\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_r^*(t,\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right). \tag{1.16}$$

Ako ovaj razvoj uvrstimo u jednačinu kretanja $\Box\vec{A} = 0$, dobijamo da amplitude $a_r(t,\vec{k})$ zadovoljavaju

$$\ddot{a}_r(t,\vec{k}) + \omega^2 a_r(t,\vec{k}) = 0\,, \qquad \omega^2 = \vec{k}^2\,. \tag{1.17}$$

Amplitude polja su neinteragujući harmonijski oscilatori a njihov broj je beskonačan (jednak $2\times$ broj 3-impulsa $\vec{k}$). Ako prethodnu jednačinu za amplitude rešimo

$$a_r(t,\vec{k}) = e^{-i\omega t}\, a_r(\vec{k}) \equiv e^{-i\omega t}\, a_{r\vec{k}}\,, \tag{1.18}$$

opšte rešenje Maxwell-ovih jednačina u vakuumu je

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{r,\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\;\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\left(a_{r\vec{k}}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{r\vec{k}}^*\, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right), \qquad \omega = |\vec{k}|\,. \tag{1.19}$$

Ovde su $a_{r\vec{k}}$ konstante tj. ne zavise od položaja i vremena.

Ekvivalentnost elektromagnetnog polja sa skupom neinteragujućih oscilatora vidi se i iz izraza za energiju. Pošto je energija polja, odnosno njegov hamiltonijan,

$$\mathcal{E} = H = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,, \tag{1.20}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_{r,\vec{k}} \frac{-i}{\sqrt{2V\omega}}\,\omega\,\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\left(a_{r\vec{k}}\,e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^*_{r\vec{k}}\,e^{i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right), \tag{1.21}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \sum_{r,\vec{k}} \frac{i}{\sqrt{2V\omega}}\,\vec{k}\times\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\,\left(a_{r\vec{k}}\,e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^*_{r\vec{k}}\,e^{i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right), \tag{1.22}$$

kada uvrstimo (1.19) dobijamo

$$\begin{aligned}
H = {} & \frac{1}{2}\int d^3r \sum_{r,\vec{k}}\sum_{r',\vec{k}'} \frac{1}{2V}\,\frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \\
& \times\Big(-\omega\omega'(\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\cdot\vec{\epsilon}_{r'\vec{k}'})\big(a_{r\vec{k}}\,a_{r'\vec{k}'}\,e^{-i(\omega+\omega')t}\,e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} - a_{r\vec{k}}\,a^*_{r'\vec{k}'}\,e^{-i(\omega-\omega')t}\,e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} + \text{h.c.}\big) \\
& \quad -(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_{r\vec{k}})(\vec{k}'\times\vec{\epsilon}_{r'\vec{k}'})\big(a_{r\vec{k}}\,a_{r'\vec{k}'}\,e^{-i(\omega+\omega')t}\,e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} - a_{r\vec{k}}\,a^*_{r'\vec{k}'}\,e^{-i(\omega-\omega')t}\,e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} + \text{h.c.}\big)\Big) \\
= {} & \frac{1}{2}\sum_{r,\vec{k}}\sum_{r',\vec{k}'}\frac{1}{2\omega}\Big(-\omega^2\,\delta_{rr'}\,\big(a_{r\vec{k}}a_{r',-\vec{k}}\,e^{-2i\omega t} - a_{r\vec{k}}a^*_{r'\vec{k}} + \text{h.c.}\big) \\
& \qquad + \vec{k}^2\,\delta_{rr'}\,\big(a_{r\vec{k}}a_{r',-\vec{k}}\,e^{-2i\omega t} + a_{r\vec{k}}a^*_{r'\vec{k}} + \text{h.c.}\big)\Big)\,\delta_{\vec{k},\pm\vec{k}'} \\
= {} & \sum_{r,\vec{k}}\frac{\omega}{2}\,\big(a_{r\vec{k}}a^*_{r\vec{k}} + a^*_{r\vec{k}}a_{r\vec{k}}\big)\,.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

U izvođenju je korišćen vektorski identitet

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{1.24}$$

a oznaka "h.c." znači da se da se nekom izrazu doda njegov hermitski ili kompleksno konjugovan. U konačnom izrazu (1.23) dobili smo da je energija elektromagnetnog polja jednaka zbiru energija nezavisnih harmonijskih oscilatora $a_{r\vec{k}}$.

✓ Proverite korake u izvođenju izraza za energiju polja: posebno, da je "h.c." u gornjoj formuli dobro upotrebljeno, i da se član proporcionalan sa $a^2_{r\vec{k}}$ ($a^{*2}_{r\vec{k}}$) anulira.

1.3 Kvantovanje

Kvantovanje je reprezentacija fizičkog sistema i njegove dinamike u vektorskom (Hilbertovom) prostoru: u prvom koraku, pridruživanje operatora fizičkim opservablama. U našem slučaju, električnom i magnetnom polju treba da pridružimo operatore, i to tako da njihova dinamika korespondira dinamici klasičnog elektromagnetnog polja. Pošto smo u prethodnom odeljku hamiltonijan elektromagnetnog polja izrazili kao zbir hamiltonijana nezavisnih harmonijskih oscilatora, polje možemo da kvantujemo tako što ćemo kvantovati zasebno svaki $a_{r\vec{k}}$. To umemo jer je svaki stepen slobode $a_{r\vec{k}}$ (običan) kvantnomehanički sistem; doduše možda formalno, jer ih ima beskonačno mnogo.

Dakle, operatorsko kvantovanje se sastoji od sledećih koraka.

1. *Algebra* operatora kreacije i anihilacije je

$$[a_{r\vec{k}}, a^\dagger_{r'\vec{k}'}] = \delta_{rr'}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,, \qquad [a_{r\vec{k}}, a_{r'\vec{k}'}] = 0\,, \qquad [a^\dagger_{r\vec{k}}, a^\dagger_{r'\vec{k}'}] = 0\,. \tag{1.25}$$

Ekscitacije elektromagnetnog polja tj. njegovi kvanti zovu se *fotoni*. Operator broja fotona impulsa $\vec{k}$ i polarizacije $\vec{\epsilon}_r$ je, kao u kvantnoj mehanici, $N_{r\vec{k}} = a^\dagger_{r\vec{k}}\, a_{r\vec{k}}$.

2. Prostor stanja polja je *Fock-ov prostor*, i zapravo njegova konstrukcija definiše reprezentaciju polja u kojoj radimo. Fock-ov prostor ima *jedinstveni vakuum*, stanje $|0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$, koje za sve $a_{r\vec{k}}$ zadovoljava

$$a_{r\vec{k}}|0\rangle = 0\,. \tag{1.26}$$

Za fotone fiksiranog impulsa i polarizacije prostor stanja je obrazovan vektorima $|n_{r\vec{k}}\rangle$,

$$|n_{r\vec{k}}\rangle = \frac{\big(a^\dagger_{r\vec{k}}\big)^{n_{r\vec{k}}}}{\sqrt{n_{r\vec{k}}!}}\,|0\rangle\,, \qquad a_{r\vec{k}}|n_{r\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{r\vec{k}}}\,|n_{r\vec{k}}-1\rangle\,, \quad a^\dagger_{r\vec{k}}|n_{r\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{r\vec{k}}+1}\,|n_{r\vec{k}}+1\rangle\,. \tag{1.27}$$

Prostor stanja polja je tenzorski proizvod prostora svih harmonijskih oscilatora*, a za bazis se može izabrati bazis svojstvenih stanja operatora broja fotona,

$$|\ldots n_{r_i\vec{k}_i}\ldots\rangle = \prod_{r_i}\prod_{\vec{k}_i} \frac{\big(a^\dagger_{r_i\vec{k}_i}\big)^{n_{r_i\vec{k}_i}}}{\sqrt{n_{r_i\vec{k}_i}!}}\,|0\rangle\,. \tag{1.28}$$

Ukupni prostor stanja čine sve linearne kombinacije. Iz činjenice da operatori kreacije međusobno komutiraju vidimo da su stanja u Fock-ovom prostoru (po konstrukciji) simetrična na izmenu dve čestice.

3. *Hamiltonijan* elektromagnetnog polja dobija se operatorskim uređenjem klasičnog izraza za energiju. Ako bi se direktno primenila formula (1.23), zbog nenulte energije osnovnog stanja dobija se

$$H = \sum_{r,\vec{k}} \frac{\omega}{2}\,\big(a_{r\vec{k}}a^\dagger_{r\vec{k}} + a^\dagger_{r\vec{k}}a_{r\vec{k}}\big) = \sum_{r,\vec{k}}\,\big(N_{r\vec{k}} + \frac{1}{2}\big)\,, \tag{1.29}$$

tj. beskonačna vrednost energije u vakuumu. Da bi se to izbeglo, hamiltonijan se definiše *normalnim uređenjem*. Opšte pravilo je: kvantna opservabla se dobija iz odgovarajućeg klasičnog izraza normalnim uređenjem operatora kreacije i anihilacije, kao proizvod u kome su svi

*Zapravo Fock-ov prostor je manji od (beskonačnog) tenzorskog proizvoda Hilbert-ovih prostora pojedinačnih oscilatora jer su stanja simetrična (za fermione, antisimetrična) na izmenu čestica.

operatori kreacije sleva od operatora anihilacije. Normalno uređenje se označava sa $:A:$. Primenjujući ovo pravilo, za hamiltonijan dobijamo

$$H =: \sum_{r,\vec{k}} \frac{\omega}{2} \left(a_{r\vec{k}} a^\dagger_{r\vec{k}} + a^\dagger_{r\vec{k}} a_{r\vec{k}} \right) := \sum_{r,\vec{k}} \omega \, a^\dagger_{r\vec{k}} a_{r\vec{k}} \,, \tag{1.30}$$

pa je energija polja u vakuumu nula, $\langle 0|H|0\rangle = 0$. Iz relacije $[H, N_{r\vec{k}}] = 0$ vidimo da se broj čestica (u neinteragujućoj teoriji) održava.

Operatori vektorskog potencijala, električnog i magnetnog polja su

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{r,\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \, \vec{\epsilon}_{r\vec{k}} \left(a_{r\vec{k}} \, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^\dagger_{r\vec{k}} \, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \tag{1.31}$$

$$\vec{E} = \sum_{r,\vec{k}} \frac{-i}{\sqrt{2V\omega}} \, \omega \, \vec{\epsilon}_{r\vec{k}} \left(a_{r\vec{k}} \, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{r\vec{k}} \, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \tag{1.32}$$

$$\vec{B} = \sum_{r,\vec{k}} \frac{i}{\sqrt{2V\omega}} \, \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{r\vec{k}} \, \left(a_{r\vec{k}} \, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{r\vec{k}} \, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \tag{1.33}$$

Zbog linearnosti po operatorima kreacije i anihilacije, kod njih nema nejednoznačnosti sa uređenjem. Takođe, sledi da su očekivane vrednosti polja u stanjima sa određenim brojem fotona nula,

$$\langle n_{r\vec{k}} | \, \vec{E} \, | n_{r\vec{k}} \rangle = 0 \,, \qquad \langle n_{r\vec{k}} | \, \vec{B} \, | n_{r\vec{k}} \rangle = 0 \,, \tag{1.34}$$

pa takva stanja nisu klasična.

✓ Proverite gornju relaciju.

Polje često razdvajamo na pozitivno i negativno frekventni deo, $\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{A}^+(t,\vec{r}) + \vec{A}^-(t,\vec{r})$

$$\vec{A}^+(t,\vec{r}) = \sum_{r,\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \, \vec{\epsilon}_{r\vec{k}} \, a_{r\vec{k}} \, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} \,, \quad \vec{A}^-(t,\vec{r}) = \sum_{r,\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \, \vec{\epsilon}_{r\vec{k}} \, a^\dagger_{r\vec{k}} \, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \,. \tag{1.35}$$

Normalno uređenje može da se izvrši i korišćenjem operatora $\vec{A}^+$ i $\vec{A}^-$.

✠ *Koherentno stanje* $|c\rangle$, $c \in \mathbb{C}$, za određenu vrednost polarizacije $\vec{\epsilon}_r$ i talasnog broja $\vec{k}$ je

$$|c\rangle = e^{-\frac{|c|^2}{2}} \sum_{n_{r\vec{k}}=0}^{\infty} \frac{(c)^{n_{r\vec{k}}}}{\sqrt{n_{r\vec{k}}!}} \, |n_{r\vec{k}}\rangle \,. \tag{1.36}$$

Pokažite da važi *i)* $\langle c|c\rangle = 1$, *ii)* $a_{r\vec{k}} \, |c\rangle = c \, |c\rangle$ i *iii)* $\langle c|\vec{E}|c\rangle = C \, \vec{\epsilon}_r \, \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \delta)$ i odredite C i δ. Koherentna stanja su semiklasične konfiguracije elektromagnetnog polja.

1.4 Spontana emisija u atomu

Kod interakcije atoma sa elektromagnetnim poljem najvažnija odnosno najveća je dipolna interakcija. Potencijalna energija dipolne interakcije je

$$V = -e\vec{r}\cdot\vec{E}\,, \tag{1.37}$$

gde je $\vec{r}$ položaj elektrona a $\vec{E}$ električno polje. Kod apsorpcije ili emisije zračenja, $\vec{E}$ je ravan talas: ako ga opisujemo klasično, $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ili preciznije, $\vec{E} = \vec{E}_0\, \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, pa imamo

$$V = -e\vec{r}\cdot\vec{E}_0\, \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \approx e\vec{r}\cdot\vec{E}_0\, \frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i}\,. \tag{1.38}$$

U poslednjem izrazu koristili smo aproksimaciju $\vec{k}\cdot\vec{r} \approx 0$, jer su tipične talasne dužine emitovanog i apsorbovanog zračenja, $k^{-1} \sim 4000 - 7500\,\text{Å}$, a dimenzije atoma, $r \sim 1\,\text{Å}$. Verovatnoća prelaza elektrona iz vezanog stanja $|n\rangle$ u atomu u vezano stanje $|m\rangle$ može da se izračuna primenom teorije perturbacija, pri čemu je interakcioni hamiltonijan (1.37). Amplituda prelaza je

$$c_{|n\rangle\to|m\rangle} = -i\int e^{i\,\omega_{mn}t}\, V_{mn}\, dt = \pm\frac{1}{2}\int \langle m|\, e\vec{r}\cdot\vec{E}_0\, |n\rangle\, e^{i(\omega_{mn}\mp\omega)\,t}\, dt = \pm ie\pi\, \vec{E}_0\cdot\vec{r}_{mn}\, \delta(\omega_{mn}\mp\omega)\,,$$

gde je $\omega_{mn} = E_m - E_n$, pri čemu znak – odgovara apsorpciji a + emisiji zračenja. Jasno, ako je $\vec{E}_0 = 0$ odnosno ako je atom u vakuumu elektromagnetnog polja, verovatnoća prelaza je nula. Drugim rečima, gornji račun ne može da objasni spontanu emisiju.

Međutim ako je elektromagnetno polje kvantno, vakuum je (u nekom smislu) dinamički a ne prosto odsustvo (svega). To se vidi i kada izvedemo gornji račun pretpostavljajući da su oba sistema, i elektron i polje, kvantni. Uzećemo da je ukupno početno stanje $|n\rangle\otimes|n_{r\vec{k}}\rangle$ a konačno $|m\rangle\otimes|n_{r\vec{k}}+1\rangle$, i iskoristiti izraz (1.32) za električno polje. Imamo

$$\begin{aligned} c_{|n\rangle\otimes|n_{r\vec{k}}\rangle\to|m\rangle\otimes|n_{r\vec{k}}+1\rangle} &= \int dt\, e^{i\omega_{mn}\,t}\langle m|\, e\vec{r}\cdot\vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\ |n\rangle \sum_{r,\vec{k}}\sqrt{\frac{\omega}{2V}}\, \langle n_{r\vec{k}}+1|\, a_{r\vec{k}}\, e^{-i\omega t} - a^\dagger_{r\vec{k}}\, e^{i\omega t}\, |n_{r\vec{k}}\rangle \\ &= -2\pi e\sqrt{\frac{\omega}{2V}}\ \vec{\epsilon}_{r\vec{k}}\cdot\vec{r}_{mn}\, \sqrt{n_{r\vec{k}}+1}\ \delta(\omega_{mn}+\omega)\,. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Vidimo da, i kada je početno stanje vakuum tj. $n_{r\vec{k}} = 0$, verovatnoća prelaza nije nula: spontani prelazi elektrona iz viših u niža stanja energije se dešavaju i u vakuumu elektromagnetnog polja.

2 Klasična polja i simetrije

U prethodnom poglavlju smo diskutovali elektromagnetno polje i osnovne fizičke ideje, odnosno korake potrebne da se ono kvantuje. U nastavku ćemo ovu diskusiju da sistematizujemo i proširimo, uvodeći prvo Lagrange-ev i Hamilton-ov formalizam za klasična polja.

Već smo komentarisali da se fizičko polje, koje je funkcija koordinata i vremena, može shvatiti kao mehanički sistem sa beskonačno mnogo stepeni slobode: ove stepene slobode prebrojava položaj $\vec{r}$, ili ako polje razvijemo po ravnim talasima u prostoru, impuls $\vec{k}$. Većina klasičnih polja koja se standardno proučavaju (npr. u dinamici fluida) je nerelativistička i data jednačinama kretanja. Nas ovde zanimaju *fundamentalna polja*, koja posle kvantovanja opisuju osnovne konstituente materije. Njihove dinamičke jednačine slede iz principa najmanjeg dejstva pa se mogu zadati dejstvom i lagranžijanom, ili ekvivalentno, hamiltonijanom. Osim toga, pošto fundamentalna polja opisuju prirodu na visokim energijama, opis je relativistički. To je okvir u kome uvodimo klasična polja.

2.1 Dejstvo i Euler-Lagrange-eve jednačine

Polje je fizička veličina $\phi(t,\vec{r}) = \phi(x)$ koja je funkcija koordinata i vremena, i uz to se pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi transformiše na tačno određeni način – kao skalar, spinor, vektor itd. Polje se pri transformacijama Poincaré-ove grupe preslikava kao

$$x' = \Lambda x + a\ : \qquad \phi'(x') = S(\Lambda)\,\phi(x)\,. \tag{2.1}$$

$\phi(x)$ u principu ima više komponenti tj. predstavlja vektor-kolonu $\phi_a(x)$, a $S(\Lambda)$ tj. $S_{ab}(\Lambda)$ je matrica jedne od reprezentacija Lorentz-ove grupe. Gornji zakon transformacije zadaje zapravo specifičnu klasu indukovanih reprezentacija Poincaré-ove grupe.

Dinamika odnosno jednačine kretanja za fundamentalna polja mogu se dobiti iz principa najmanjeg dejstva, koji kaže da su klasične trajektorije sistema ekstremumi dejstva. Dejstvo S je zadato lagranžijanom sistema L, odnosno gustinom lagranžijana $\mathcal{L}$,

$$S[\phi] = \int dt\, L(t) = \int dt \int d^3r\ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \dots)\,. \tag{2.2}$$

S je funkcional, preslikavanje funkcija u brojeve pa se uvek (makar formalno, pomoću δ-funkcije), može predstaviti kao integral.

Da bismo odredili konfiguraciju polja u kojoj dejstvo ima ekstremalnu vrednost treba da definišemo varijaciju funkcionala. *Varijacija forme* $\delta\phi$ je (mala) razlika dve bliske konfiguracije polja,

$$\phi'(x) = \phi(x) + h(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)\,. \tag{2.3}$$

Pri varijaciji funkcije ϕ dejstvo se menja za

$$\delta S = S[\phi + h] - S[\phi] = \int d^4x\ \frac{\delta S}{\delta\phi}\ h(x)\,. \tag{2.4}$$

Ova formula definiše *varijacioni* ili *funkcionalni izvod* dejstva kao član proporcionalan varijaciji polja pod integralom.

Pretpostavimo da gustina lagranžijana zavisi samo od polja i prvih izvoda, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Tada je varijacija dejstva

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathcal{L}(\phi + h, \partial_\mu \phi + \partial_\mu h) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\
&= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\, h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi}\, \partial_\mu h = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi} \right) + \text{ granični član}\,. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Poslednji član u drugom redu dobijen je parcijalnom integracijom, i zbog toga imamo doprinos graničnog odnosno površinskog člana koji sadrži funkciju $h(x)$. Ako variramo dejstvo samo po funkcijama čije su vrednosti na granici fiksirane,

$$
\delta\phi|_{\text{granica}} = h(x)|_{\text{granica}} = 0\,, \qquad (2.6)
$$

pa je granični član nula. Iz uslova da je varijacija dejstva nula, $\delta S = 0$, i proizvoljnosti $h(x)$ slede *Euler-Lagrange-eve jednačine* kretanja za polje

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi} = 0\,. \qquad (2.7)
$$

✠ Izvesti Euler-Lagrange-eve jednačine za slučaj kada lagranžijan zavisi i od drugih izvoda polja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\phi, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\partial_\nu\phi)$.

Gustina lagranžijana $\mathcal{L}$ obično ispunjava niz uslova koji specifikuju fizički relevantne teorije, a to su (danas, ili najčešće) lokalne relativistički invarijantne teorije polja.

– prvi uslov je *lokalnost* lagranžijana: pretpostavljamo da on zavisi polinomijalno od polja i konačnog broja izvoda, odnosno da ne razmatramo dejstva tipa $\iint d^4x\, d^4x'\, \phi(x)\, K(x,x')\, \phi(x')$, ili $\int d^4x\, \phi(x)\, \Box^{-1}\phi(x)$ koja bi dala integralne ili nelokalne jednačine kretanja za polje.

– sledeći uslov, koji smo zapravo zahtevali od početka, je *relativistička invarijantnost* dejstva. Pošto je element zapremine d^4x Lorentz-invarijantan, ovaj uslov znači da $\mathcal{L}$ treba da bude Lorentz-ov skalar koji ne zavisi eksplicitno od koordinata nego samo od polja i izvoda polja.

– da bi energija polja bila realna, $\mathcal{L}$ treba da bude realna a ne kompleksna funkcija.

– kao što u klasičnoj mehanici razmatramo lagranžijane koji su najviše kvadratni po brzinama, u teoriji polja se ograničavamo na lagranžijane koji zavise samo od polja i prvih izvoda. Ovo ograničenje nije principijelno nego praktično, i njegova posledica je da su Euler-Lagrange-eve jednačine parcijalne diferencijalne jednačine do drugog reda, kakve jesu jednačine koje srećemo fizičkim sistemima.

– da napomenemo dodatnu osobinu varijacionih jednačina: dodavanje 4-divergencije gustini lagranžijana, odnosno zamena $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\phi)$ ne menja jednačine kretanja.

2.2 Hamilton-ova formulacija

Dinamika polja se, kao i kod mehaničkih sistema, može opisati i u Hamilton-ovom formalizmu: kanonska struktura teorije je, osim za identifikaciju nezavisnih fizičkih stepeni slobode, važna i za kanonsko kvantovanje.

Generalisani impuls π_a koji odgovara komponenti polja ϕ_a definiše se sa

$$\pi_a(t,\vec{r}) = \frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\phi}_a(t,\vec{r})} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_0\phi_a}\,, \tag{2.8}$$

gde je $\dot{\phi} = \partial_0\phi$ a $L = \int d^3r\,\mathcal{L}$. Iz gornje definicije impulsa i lagranžijana vidi se da je varijacioni izvod ovde definisan u odnosu na *integraciju po prostoru*, d^3r (a ne u odnosu na integraciju po prostor-vremenu, kao kod izvođenja jednačina kretanja), dok je vreme kao u klasičnoj mehanici fiksirano. Ovaj detalj je važan i kod definicije Poisson-ove zagrade koja je takođe istovremena,

$$\{F,G\}_{PZ} = \int d^3r \sum_a \frac{\delta F}{\delta\phi_a}\frac{\delta G}{\delta\pi_a} - \frac{\delta G}{\delta\phi_a}\frac{\delta F}{\delta\pi_a}\,. \tag{2.9}$$

Iz ove formule opet vidimo da su indeksi koji prebrojavaju (mehanički ekvivalent) stepena slobode a i $\vec{r}$.

✓ Koristeći $\int d^3r\, f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)$, pokazati da je

$$\frac{\delta\phi_a(t,\vec{r})}{\delta\phi_{a'}(t,\vec{r}')} = \delta_{aa'}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,. \tag{2.10}$$

Kao dodatnu vežbu sa kanonskim formalizmom u teoriji polja, da izračunamo Poisson-ovu zagradu između polja i generalianog impulsa. Imamo

$$\begin{aligned}\{\phi_a(t,\vec{r}),\pi_{a'}(t,\vec{r}')\}_{PZ} &= \int d^3r'' \sum_{a''} \frac{\delta\phi_a(t,\vec{r})}{\delta\phi_{a''}(t,\vec{r}'')}\frac{\delta\pi_{a'}(t,\vec{r}')}{\delta\pi_{a''}(t,\vec{r}'')} - \frac{\delta\phi_a(t,\vec{r})}{\delta\pi_{a''}(t,\vec{r}'')}\frac{\delta\pi_{a'}(t,\vec{r}')}{\delta\pi_{a''}(t,\vec{r}'')} \\ &= \int d^3r'' \sum_{a''} \delta_{aa''}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}'')\,\delta_{a'a''}\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}'') = \delta_{aa'}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,.\end{aligned}$$

Hamilton-ova formulacija, za razliku od Lagrange-eve, nije relativistički invarijantna, u njoj vremenska koordinata ima posebnu ulogu jer definiše dinamiku. Gustina hamiltonijana i hamiltonijan definišu se kao

$$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a\,\dot{\phi}_a - \mathcal{L}\,, \qquad H = \int d^3r\,\mathcal{H}\,. \tag{2.11}$$

Može se pokazati da jednačine kretanja u Hamilton-ovoj formulaciji teprije polja imaju isti oblik kao u mehanici: proizvoljna opservabla $F(t)$ menja se sa vremenom po jednačini

$$\dot{F} = \{F,H\}_{PZ}\,. \tag{2.12}$$

2.3 Noether-ina teorema

U klasičnoj mehanici, invarijantnost dejstvo odnosno lagranžijana na Lie-jevu grupu simetrije implicira zakone održanja. Slično je i u klasičnoj teoriji polja, a iskaz je dat Noether-inom teoremom.

Noether-ina teorema glasi: ako je dejstvo sistema invarijantno na Lie-jevu (globalnu) grupu transformacija koordinata i polja, svakom nezavisnom parametru grupe ω_A odgovaraju održana struja J_A i održani naboj Q_A koji zadovoljavaju

$$\partial_\mu J^\mu_A = 0, \qquad \frac{dQ_A}{dt} = 0\,, \tag{2.13}$$

pri čemu je $Q_A = \int d^3r\, J^0_A$.

Noether-ina teorema se dokazuje direktnom proverom, odnosno konstrukcijom održane struje. Pre nego što konstruišemo J^μ_A, da pokažemo da iz jednačine kontinuiteta $\partial_\mu J^\mu_A = 0$ sledi da je naboj Q_A konstanta kretanja. Imamo

$$\frac{dQ_A}{dt} = \frac{d}{dt}\int d^3r\, J^0_A = \int d^3r\, \partial_0 J^0_A = -\int d^3r\, \partial_i J^i_A = \oint J^i \cdot dS_i = 0\,. \tag{2.14}$$

U poslednjem koraku smo iskoristili Gauss-ovu teoremu o vezi zapreminskog integrala i integrala po granici oblasti integracije, a zatim uslov da struje na granici tj. asimptotski teže nuli. Ovaj uslov je opravdan jer struje zavise od polja i izvoda polja kvadratno odnosno bilinearno; pri tome, ako polje ne teži nuli u beskonačnosti njegova energija nije konačna, pa odgovarajuća konfiguracija nije fizička.

Označimo infinitezimalnu transformaciju koordinata i polja (koja odgovara infinitezimalnoj transformaciji u grupi simetrije) sa

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu\,, \qquad \phi'(x') = \phi(x) + \delta_T\phi(x)\,. \tag{2.15}$$

Ova transformacija se može dalje razložiti po nezavisnim parametrima

$$\delta x^\mu = X^\mu_A\, \omega^A\,, \qquad \delta_T\phi = \Psi_A\, \omega^A \tag{2.16}$$

ali ćemo se držati prve oznake da bi izvođenje bilo preglednije. U (2.15) δ_T je *totalna varijacija* polja,

$$\delta_T\phi = \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) = \partial_\mu\phi\;\delta x^\mu + \delta\phi\,. \tag{2.17}$$

Prvi član u gornjem rezultatu se dobija razvojem funkcije ϕ' u Taylor-ov red oko x (a izrazi $\partial_\mu\phi'\;\delta x^\mu$ i $\partial_\mu\phi\;\delta x^\mu$ se razlikuju za infinitezimalnu veličinu drugog reda), a $\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ je *varijacija forme* polja koju smo ranije uveli, (2.3).

Uslov invarijantnosti dejstva na infinitezimalnu transformaciju simetrije je

$$\int d^4x'\, \mathcal{L}\big(\phi'(x'), \partial'\phi'(x'), \dots\big) - \int d^4x\, \mathcal{L}\big(\phi(x), \partial\phi(x), \dots\big) = 0\,. \tag{2.18}$$

Da bismo izračunali ovu razliku trebaće nam i jakobijan za smenu promenljivih $x^\mu \to x'^\mu$. Imamo

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \frac{\partial\, \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\,, \tag{2.19}$$

pa je

$$\det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \exp\Big(\mathrm{tr}\log\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right)\Big) = \exp\left(\mathrm{tr}\,\partial_\nu \delta x^\mu\right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu\,. \tag{2.20}$$

U gornjim izrazima sve relacije su dobijene iz odgovarajućih razvoja u red i važe u prvom redu po infinitezimalno malom parametru. Ako sada izračunamo infinitezimalnu promenu dejstva pri transformaciji simetrije, pretposttavljajući zbog određenosti da lagranžijan zavisi samo od polja i prvih izvoda, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int d^4x'\, \mathcal{L}\left(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')\right) - \int d^4x\, \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial\phi(x)\right) \\
&= \int d^4x \Big(\mathcal{L}\left(\phi'(x), \partial\phi'(x)\right)\left(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\right) - \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial\phi(x)\right)\Big) \\
&= \int \mathcal{L}\left(\phi'(x), \partial\phi'(x)\right) - \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial\phi(x)\right) + \mathcal{L}\,\partial_\mu\,\delta x^\mu \\
&= \int \delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\,\partial_\mu\,\delta x^\mu \\
&= \int \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\Big)\,\delta\phi + \int \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\,\delta\phi\Big) + \mathcal{L}\,\partial_\mu\,\delta x^\mu \\
&= \int \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\left(\delta_T\phi - \partial_\nu\phi\,\delta x^\nu\right) + \mathcal{L}\,\delta x^\mu \right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Da komentarišemo korake. Prvo, sve jednakosti važe u linearnom redu po varijacijama polja i koordinata. U drugom redu gornjeg izvođenja smo izvršili smenu promenljivih $x' \to x$. Dalje, u pretposlednjem redu se iz varijacije forme lagranžijana dobija član proporcionalan jednačinama kretanja + 4-divergencija. Pretpostavljajući da jednačine kretanja važe, kao i da je $\partial_\mu \mathcal{L} = 0$, dobija se krajnji rezultat.

Ako je izraz (2.21), kao što smo pretpostavili, nula pri proizvoljnim infinitezimalnim transformacijama simetrije, sledi da je održana struja

$$J^\mu = \sum_A J^\mu_A\, \omega^A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\,\delta_T\phi - T^\mu_\nu\,\delta x^\nu\,, \tag{2.22}$$

odnosno

$$J^\mu_A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\,\Psi_A - T^\mu_\nu\, X^\nu_A\,, \tag{2.23}$$

gde je tenzor energije-impulsa polja definisan sa

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\,\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\,. \tag{2.24}$$

Tenzor energije-impulsa je jedna od najvažnijih održanih veličina, i on se održava kada je sistem invarijantan na *translacije,* $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. U tom slučaju varijacije su

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu \,, \qquad \delta_T \phi = 0 \,, \tag{2.25}$$

za sva polja ϕ , pa je održana struja

$$J^\mu{}_\nu = -T^\mu{}_\nu \,. \tag{2.26}$$

Energija i 3-impuls polja su dati sa

$$E = P^0 = \int d^3r \, T^{00} \,, \qquad P^i = \int d^3r \, T^{0i} \,. \tag{2.27}$$

Tenzor energije-impulsa bi trebalo da je simetričan po svojim indeksima (jer kao simetrični tenzor ulazi u druge jednačine u fizici, npr. u Einstein-ove jednačine), ali kada se izračuna iz definicije (2.24) može se desiti da to nije. U tom slučaju on može da se redefiniše dodavanjem 4-divergencije

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \tag{2.28}$$

gde je $f^{\lambda\mu\nu}$ funkcija polja koja zadovoljava $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$. Veličina $\tilde{T}^{\mu\nu}$ zove se kanonski tenzor energije impulsa, a iz antisimetričnosti po μ i λ lako se proverava da je i on održan, $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$. Sem toga, pri smeni (2.28) energija i impuls polja se ne menjaju.

✓ Proverite navedene osobine kanonskog tenzora energije-impulsa.

Pri transformacijama *Lorentz-ove grupe,* $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ imamo

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu = \frac{1}{2}\, \omega^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho \, x_\sigma - \delta^\mu_\sigma \, x_\rho) \,, \qquad \delta_T \phi_a = \frac{1}{2}\, \omega^{\rho\sigma}(-iM_{\rho\sigma})_a{}^b \, \phi_b \tag{2.29}$$

gde je matrica $M_{\rho\sigma}$ generator Lorentz-ove transformacije u reprezentaciji polja ϕ (skalarnoj, spinorskoj itd.). Iz izraza za Noether-inu struju dobijamo da su komponente *tenzora momenta impulsa polja* date sa

$$J^\mu{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \Big(-i \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \partial_\mu \phi} \, M_{\rho\sigma} \phi + x_\rho T^\mu{}_\sigma - x_\sigma T^\mu{}_\rho \Big) \tag{2.30}$$

Poslednji važan opšti primer su *unutrašnje simetrije*, koje ne deluju na koordinate nego samo na polja:

$$\delta x^\mu = 0 \,, \qquad \delta_T \phi_a = \epsilon(-i\lambda)_{ab} \, \phi_b \,, \tag{2.31}$$

gde je λ matrica reprezentacije grupe unutrašnje simetrije. Odgovarajuća struja je

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \partial_\mu \phi_a} \, (-i\lambda)_a{}^b \, \phi_b \,, \tag{2.32}$$

gde smo ovog puta napisali kompaktan izraz, odnosno sumirali struju po nezavisnim parametrima unutrašnje grupe ω_A (ako ih ima više od jedan) kao u formuli (2.22).

3 Slobodno skalarno polje

3.1 Klasično skalarno polje

3.1.1 Dejstvo

Realno skalarno polje $\Phi(x)$ je polje opisano lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \,, \tag{3.1}$$

Φ je realna funkcija koordinata. Kompleksno skalarno polje označavamo istim slovom, samo je tada Φ kompleksna funkcija a lagranžijan dat sa

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2\Phi^*\Phi \; = \sum_{a=1,2} \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)(\partial^\mu \Phi_a) - \frac{1}{2}m^2\Phi_a^2 \,. \tag{3.2}$$

gde su $\Phi_{1,2}$ realni i imaginarni deo polja, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2)$.

✓ Proveriti smenom da je relacija (3.2) tačna.

✓ Naći Euler-Lagrange-evu jednačinu kretanja za skalarno polje.

Jednačina kretanja za skalarno polje je Klein-Gordon-ova jednačina,

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2\Phi = 0. \tag{3.3}$$

Generalisani impuls realnog skalarnog polja je

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0 \Phi} = \partial_0 \Phi \,. \tag{3.4}$$

Za realno polje kažemo da ima jedan stepen slobode: jednačina kretanja je drugog reda za Φ, ili nju ekvivalentno možemo izraziti kao dve jednačine prvog reda za polje Φ i impuls π. Kompleksno skalarno polje ima dva stepena slobode, svoj realni i imaginarni deo: često se, umesto Φ_1 i Φ_2, kao stepeni slobode uzimaju Φ i Φ^*. Odgovarajući impulsi su

$$\pi = \partial_0 \Phi^*, \qquad \pi^* = \partial_0 \Phi \,. \tag{3.5}$$

Hamiltonijan realnog skalarnog polja je

$$\mathcal{H} = \pi\, \partial_0 \Phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_0 \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2}\, m^2 \Phi^2. \tag{3.6}$$

✓ Proveriti poslednju formulu. Izračunati $\mathcal{H} = \pi\, \partial_0 \Phi + \pi^*\, \partial_0 \Phi^* - \mathcal{L}$ za kompleksno polje.

Za tenzor energije impulsa, zamenom u (2.24) se dobija

$$T^{00} = \mathcal{H}\,, \qquad T^{0i} = \partial^0\Phi\,\partial^i\Phi\,. \tag{3.7}$$

✓ Proveriti i ovo.

Dejstvo kompleksnog polja ima dodatnu, unutrašnju simetriju definisanu sa $\Phi \to \Phi' = e^{-iq\omega}\Phi$, odnosno

$$\delta\Phi = -iq\epsilon\Phi\,, \quad \delta\Phi^* = iq\epsilon\Phi^*\,, \quad \delta x^\mu = 0\,. \tag{3.8}$$

Održana struja je

$$J^\mu = -iq\left((\partial^\mu\Phi^*)\Phi - \Phi^*(\partial^\mu\Phi)\right)\,, \tag{3.9}$$

$$Q = \int J^0 d^3r = -iq\int d^3r\,\Big((\partial^0\Phi^*)\Phi - \Phi^*(\partial^0\Phi)\Big) \tag{3.10}$$

za naboj. Iako nije pozitivno definitan, poslednji izraz odnosno

$$(f,g) = -i\int d^3r\,\left((\partial_0 f^*)g - f^*(\partial_0 g)\right) \tag{3.11}$$

definiše 'skalarni proizvod' u prostoru polja.

✓ Izvedite i poslednje tvrđenje, izraz za naboj: zasad je sav račun prost!

3.1.2 Rešenja

Partikularna rešenja Klein-Gordon-ove (KG) jednačine (3.3) su ravni talasi, $e^{\pm ik_\mu x^\mu}$, sa disperzionom jednačinom

$$\omega = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad \text{odnosno} \quad k_\mu k^\mu = m^2\,. \tag{3.12}$$

Ako pozitivno energetska rešenja označimo sa

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\,e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,, \tag{3.13}$$

kompletan skup rešenja Klein-Gordon-ove jednačine je $\{u_{\vec{k}},\, u^*_{\vec{k}}\}$.

✓ Lako je, a dosta zgodno: proveriti da su ravni talasi ortonormirani u odnosu na gore zadati skalarni proizvod, tj. da je

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\,, \qquad (u_{\vec{k}}, u^*_{\vec{k}'}) = 0\,, \qquad (u^*_{\vec{k}}, u^*_{\vec{k}'}) = -\delta(\vec{k} - \vec{k}')\,. \tag{3.14}$$

Opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine je linearna kombinacija partikularnih,

$$\Phi(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left(a_{\vec{k}}\,e^{-ikx} + b^*_{\vec{k}}\,e^{ikx}\right)\,, \tag{3.15}$$

$$\Phi^*(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(b_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a^*_{\vec{k}}\, e^{ikx} \right) , \tag{3.16}$$

za kompleksno polje; za realno polje iz uslova realnosti sledi da je $a_{\vec{k}} = b_{\vec{k}}$, pa imamo

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a^*_{\vec{k}}\, e^{ikx} \right) . \tag{3.17}$$

Prvi deo rešenja (3.15), $\Phi^+(x)$ je pozitivno energetski deo polja, a $\Phi^-(x)$ je negativno energetski.

✠ Pokazati da se gornje formule mogu lako invertovati koristeći skalarni proizvod, ili direktno

$$a_{\vec{k}} = (u_{\vec{k}}, \Phi) = i \int \frac{d^3r}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, e^{ikx}\, (\pi - i\omega_k \Phi) , \tag{3.18}$$

$$b_{\vec{k}}{}^* = -(u^*_k, \Phi) . \tag{3.19}$$

3.1.3 Energija

Energija skalarnog polja može da se da se izračuna, tj. izrazi preko amplituda $a_{\vec{k}}$ i $b_{\vec{k}}$ direktnom zamenom:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r \Big((\partial_0\Phi^*)(\partial_0\Phi) + (\nabla\Phi^*)(\nabla\Phi) + m^2\Phi^*\Phi \Big) \\
&= \int d^3r \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \times \Big(-\,\omega\,\omega'\, (b_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}{}^* e^{ikx})(a_{\vec{k}'} e^{-ik'x} - b_{\vec{k}'}{}^* e^{ik'x}) \\
&\qquad - \vec{k}\cdot\vec{k}'\, (b_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}{}^* e^{ikx})(a_{\vec{k}'} e^{-ik'x} - b_{\vec{k}'}{}^* e^{ik'x}) \\
&\qquad + m^2\, (b_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}{}^* e^{ikx})(a_{\vec{k}'} e^{-ik'x} + b_{\vec{k}'}{}^* e^{ik'x}) \Big) \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega} \Big(b_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}}\, e^{-2i\omega t}\, (-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2) + b_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}}{}^*\, (\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2) \\
&\qquad + a_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}}{}^*\, (\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2) + a_{\vec{k}}{}^*\, b_{\vec{k}}{}^*\, e^{2i\omega t}\, (-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2) \Big) \\
&= \int d^3k\, \omega\, (a_{\vec{k}}{}^* a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}{}^* b_{\vec{k}}) .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Rezultat u poslednjem redu je dobijen korišćenjem disperzione relacije za skalarno polje (3.12). Dobili smo da je energija slobodnog skalarnog polja zbir energija neinteragujućih harmonijskih oscilatora $a_{\vec{k}}$ i $b_{\vec{k}}$.

✓ Izvedite sami sve korake ovog računa: jeste pipavo (da ne kažem dosadno) ali je i lako, a isplati se: dobar broj izvođenja u kursu će biti veoma sličan i svodiće se na integraciju eksponencijalne i delta funkcije.

3.2 Kvantovanje skalarnog polja

Pošto smo slobodno skalarno polje izrazili preko skupa harmonijskih oscilatora, kvantujemo ga tako što ćemo da kvantujemo svaki od njih.

3.2.1 Algebra

Prvi korak je da fizičke veličine reprezentujemo operatorima. Operatori $a_{\vec{k}}$ i $b_{\vec{k}}$ zadovoljavaju algebru

$$[a_{\vec{k}}, {a_{\vec{k}'}}^\dagger] = \delta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad [b_{\vec{k}}, {b_{\vec{k}'}}^\dagger] = \delta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad [a_{\vec{k}}, {b_{\vec{k}'}}^\dagger] = 0, \tag{3.21}$$
$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0, \qquad [b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = 0, \qquad [a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}] = 0.$$

Možemo da definišemo brojeve čestica (ekscitacija) kao $N_{a,\vec{k}} = {a_{\vec{k}}}^\dagger a_{\vec{k}}$ i $N_{b,\vec{k}} = {b_{\vec{k}}}^\dagger b_{\vec{k}}$.

3.2.2 Prostor stanja

Operatori kreacije i anihilacije reprezentovani su na Fock-ovom prostoru, koji se definiše na sledeći način. Pretpostavimo da imamo jedinstveno stanje, vakuum $|0\rangle$ za koji je

$$\forall \vec{k}: \quad a_{\vec{k}}|0\rangle\,, \quad b_{\vec{k}}|0\rangle = 0\,; \qquad \langle 0|0\rangle = 1\,. \tag{3.22}$$

Jednočestična stanja dobijaju se primenom operatora kreacije,

$$|\vec{k}\rangle_a = {a_{\vec{k}}}^\dagger|0\rangle\,, \quad |\vec{k}\rangle_b = {b_{\vec{k}}}^\dagger|0\rangle\,, \tag{3.23}$$

a jednočestični potprostor je skup svih linearnih kombinacija vektora (3.23).

✓ Pokazati da su stanja (3.23) normirana na δ-funkciju.

✓ Pokazati da važi $H|\vec{k}\rangle = \omega_k|\vec{k}\rangle$, $P_i|\vec{k}\rangle = k_i|\vec{k}\rangle$, gde je $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$, tj. stanja $|\vec{k}\rangle$ zaista opisuju čestice.

Višečestična stanja se dobijaju višestrukom primenom operatora kreacije ${a_{\vec{k}}}^\dagger$ i ${b_{\vec{k}}}^\dagger$; u slučaju realnog polja, kada imamo samo jedan tip čestica tj. samo operatore ${a_{\vec{k}}}^\dagger$, višečestična stanja su

$$|n_1, \vec{k}_1;\, n_2, \vec{k}_2;\, \dots\rangle = \frac{(a^\dagger_{\vec{k}_1})^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\,\frac{(a^\dagger_{\vec{k}_2})^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\,\dots|0\rangle \tag{3.24}$$

a ukupni prostor stanja dobija se kada se uzmu sve linearne kombinacije.

✓ Pokazati da za dvočestična stanja važi $|1,\vec{k}\,;1,\vec{q}\rangle \equiv |\vec{k},\vec{q}\rangle = |\vec{q},\vec{k}\rangle$, tj. stanja u Fock-ovom prostoru su simetrizovana: skalarne čestice su bozoni.

Osim stanja sa fiksiranim brojem čestica (definisanog impulsa), u Fock-ovom prostoru možemo da definišemo i stanja koja su svojstvena za polje $\hat{\Phi}(x)$; ona su ekvivalentna svojstvenim stanjima koordinate, $|x\rangle$, u kvantnoj mehanici. Stanje koje odgovara klasičnoj konfiguraciji $\phi(x)$ označavamo sa $|\phi(x)\rangle$:

$$\hat{\Phi}(x)\,|\phi(x)\rangle = \phi(x)\,|\phi(x)\rangle\,, \tag{3.25}$$

gde je $\hat{\Phi}(x) \equiv \Phi(x)$ operator polja (notaciju sa kapicama za operatore ne koristimo nigde u tekstu, ovde izuzetno da naglasimo da je (3.25) svojstveni problem), a $\phi(x)$ je realna ili kompleksna funkcija. Pošto je $[\Phi(x), N_{\vec{k}}] \neq 0$, u ovim stanjima nije određen broj čestica: to je talasno-čestični dualizam.

Jednačina (3.25) može da se reši ako se $|\phi(x)\rangle$ razvije u Fock-ovom bazisu, tj. napiše kao

$$|\phi(x)\rangle = \varphi_0\,|0\rangle + \int d^3q\;\varphi(\vec{q})\,|\vec{q}\rangle + \iint d^3\vec{q}\,d^3\vec{q}\,'\;\varphi(\vec{q},\vec{q}\,')\,|\vec{q},\vec{q}\,'\rangle + \ldots\,. \tag{3.26}$$

✠ Odrediti prva dva koeficijenta u prethodnom razvoju, φ_0 i $\varphi(\vec{q})$, zamenom u (3.25).

3.2.3 Operatorsko uređenje

U principu, da bismo imali kompletnu kvantnomehaničku reprezentaciju fizičkog sistema, pored prostora stanja (Hilbert-ovog prostora) i kanonskih komutacionih relacija, treba da definišemo operatorsko uređenje (pri prelazu sa klasičnog na kvantni sistem). Kad se formalno izračuna energija realnog skalarnog polja, dobija se

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k\,(a_{\vec{k}}a_{\vec{k}}{}^* + a_{\vec{k}}{}^*a_{\vec{k}}) = \int d^3k\,\omega_k\,a_{\vec{k}}{}^*a_{\vec{k}}\,. \tag{3.27}$$

Klasično, ova dva izraza su jednaka, ali kvantno nisu: za svaki od oscilatora se razlikuju za energiju osnovnog stanja odnosno vakuuma. Ukupno, imamo

$$\frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k\,(a_{\vec{k}}a_{\vec{k}}{}^\dagger + a_{\vec{k}}{}^\dagger a_{\vec{k}}) = \int d^3k\,\omega_k\,a_{\vec{k}}{}^*a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k\,[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}{}^\dagger]\,. \tag{3.28}$$

Poslednji izraz je broj, beskonačna konstanta:

$$\langle 0|\,\frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k\,(a_{\vec{k}}a_{\vec{k}}{}^\dagger + a_{\vec{k}}{}^\dagger a_{\vec{k}})\,|0\rangle = \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k\,[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}{}^\dagger] = \frac{1}{2}\,\delta(0)\int d^3k\,\sqrt{k^2+m^2} \tag{3.29}$$

i sastoji se iz dve divergencije. Prva od njih, $\delta(0)$ je infracrvena (IR) divergencija i proporcionalna je zapremini prostora V: nju možemo da eliminišemo ako umesto energije posmatramo gustinu energije, $\rho = E/V$. Druga, ultraljubičasta (UV) divergencija potiče od velikih vrednosti momenta $\vec{k}$.

✓ Pokazati da je divergentni izraz stvarno vakuumska očekivana vrednost, kao što kaže (3.29).

Način da se divergentna energija vakuuma ukloni iz teorije je da se merljive fizičke veličine kao što je energija, definišu tako da njihova vrednost u vakuumu bude nula. To se postiže *normalnim uređenjem*, koje znači da: klasičnoj veličini pridružujemo operator uređen tako da svi operatori kreacije budu sleva od operatora anihilacije. Oznaka je $:AB:$, npr. $:a_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}'}{}^{\dagger}: = b_{\vec{k}'}{}^{\dagger}\, a_{\vec{k}}$. Normalno uređenje znači da je hamiltonijan kompleksnog skalarnog polja dat sa

$$H =: \int d^3r\, \Big((\partial_0\Phi^*)(\partial_0\Phi) + (\nabla\Phi^*)(\nabla\Phi) + m^2\Phi^*\Phi\Big) := \int d^3k\, \omega_k\, (a_{\vec{k}}{}^{\dagger}a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}{}^{\dagger}b_{\vec{k}})\,. \quad (3.30)$$

✠ Izračunajte impuls $P^i = \int d^3r\, T^{0i}$ i naboj Q za kompleksno skalarno polje. Račun je u principu pravolinijski (ne treba da se odustaje), jedini trik je smena $\vec{k} \to -\vec{k}$ u nekom od integrala, i na kraju, normalno uređenje. Dobija se

$$P^i = \int d^3k\, k^i\, (a_{\vec{k}}{}^{\dagger}a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}{}^{\dagger}b_{\vec{k}})\,, \qquad Q = q\int d^3k\, (a_{\vec{k}}{}^{\dagger}a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}}{}^{\dagger}b_{\vec{k}})\,, \quad (3.31)$$

a- i b-čestice imaju suprotna naelektrisanja.

3.2.4 Fluktuacije vakuuma

Kvantno polje je dato istim izrazom kao klasično: za realno polje npr. imamo

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, \Big(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a^{\dagger}_{\vec{k}}\, e^{ikx}\Big)\,. \quad (3.32)$$

Pošto polje linearna kombinacija operatora kreacije i anihilacije, njegova očekivana vrednost je u vakuumu nula.

✓ Proveriti, ako nije očigledno!

Međutim to ne znači da je vakuum prazna pozadina na kojoj se ništa ne dešava: to možemo da vidimo ako izračunamo disperziju polja, odnosno korelacionu funkciju – ona kvantifikuje fluktuacije vakuuma:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \Phi(t,\vec{r})\Phi(t,\vec{r}\,')|0\rangle = \\
&= \iint \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)}^3\sqrt{2\omega}}\, \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)}^3\sqrt{2\omega'}}\, \langle 0|(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{\vec{k}}{}^{\dagger}\, e^{ikx})(a_{\vec{k}'}\, e^{-ik'x'} + a_{\vec{k}'}{}^{\dagger}\, e^{ik'x'})|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} \frac{k^2\, dk}{\omega}\, \frac{\sin(k\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{k\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Fluktuacije polja u tački dobićemo u limesu $\vec{r}\,' \to \vec{r}$. Uobičajeno je da se (energetski) spektar fluktuacija definiše tako što se izdvoji bezdimenzioni diferencijal, $d\,\log k = \frac{dk}{k}$,

$$\lim_{\vec{r}\,'\to\vec{r}} \langle 0|\, \Phi(t,\vec{r})\Phi(t,\vec{r}\,')|0\rangle = \int_0^{\infty} d\,\log k\; \Delta^2_{\Phi}\,, \quad (3.34)$$

pa za skalarno polje dobijamo

$$\Delta_\Phi^2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{k^3}{\omega_k}\,. \tag{3.35}$$

✓ Izvedite sve detalje (3.33): u formuli je $x'^\mu = (t, \vec{r}')$. Opet, izvođenje je lako, a formula je bitna u kosmologiji!

3.3 Casimir-ov efekat

Casimir-ov efekat ne spada u ispitna pitanja, zato je obojen u sivo, iako ga u ovom kursu standardno predajemo. Njegovo izvođenje uvodi nove metode računa koje su nešto komplikovanije: ipak, važno je upoznati efekte energije vakuuma koji se eksperimentalno mere, kao i račun koji ih opisuje. Videli smo u prethodnom predavanju da je vakuum kvantnog polja 'dinamički': iako polje u vakuumu ima nultu očekivanu vrednost, njegove fluktuacije su nenulte. Postojanje kvantnog vakuuma objašnjava spontanu emisiju u atomskoj fizici (i drugim kvantnim sistemima), a smatra se da su nehomogenosti koje se vide u kosmičkom mikrotalasnom pozadinskom zračenju (CMB) slika kvantnih fluktuacija u ranom svemiru.

Energija vakuuma treba da ima i drugu direktnu posledicu u kosmologiji: konstantnu vrednost gustine energije najprirodnije je interpretirati kao postojanje (efektivne) kosmološke konstante. Činjenica da ova interpretacija zasada ne radi zove se 'problem kosmološke konstante'. On se sastoji u sledećem. Gustinu energije vakuuma 'na prste' možemo da ocenimo na više načina: možda najprostije, pretpostavljajući da se u svakom delu prostora veličine Compton-ove zapremine kreira po jedan par čestica-antičestica. Odgovarajuća gustina energije je $\rho_M = E/V = 2M/\lambda^3_{Compton} \sim M^4$. Za najtežu poznatu česticu, Higgs-ov bozon, dobijamo $\rho_{Higgs} \sim 10^8\, GeV^4$. Druga ocena dobija se ako za masu uzmemo Planck-ovu masu, $M_{Planck} \sim 10^{18}\, GeV$: logika za ovu pretpostavku je da je Planck-ova masa zapravo prirodna vrednost gornje granice ('cut-off'-a) integrala (3.29), skala posle koje moraju da uračunaju efekti kvantne gravitacije. Odgovarajuća gustina je $\rho_{Planck} \sim 10^{72}\, GeV^4$. Obe gustine su za mnogo redova veličine veće od izmerene vrednosti kosmološke konstante $\Lambda = 10^{-52}\, m^{-2}$, kojoj odgovara $\rho_{vacuum} \sim 10^{-47}\, GeV^4$. Razlika procenjene i izmerene vrednosti je $72{+}47{\sim}120$ redova veličine, što je 'najgora predikcija u istoriji fizike'.

Da se vratimo osnovnoj temi. Normalno uređenje nam daje recept kako se energija vakuuma sistematski eliminiše iz teorije u prostoru Minkowskog, koji je beskonačan prostor bez granice. Kod Casimir-ovog efekta (otkriven 1948, izmeren 1958), polje je u ravnom prostoru sa granicom.

Razmotrimo realno skalarno polje u prostoru između dve paralelne ravni (sa ortom duž z-ose), na međusobnom rastojanju a: pretpostavićemo da je polje bezmaseno i da zadovoljava periodične granične uslove.† Opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine je

$$\Phi(x) = \sum_{n_3} \int \frac{d^2k}{\sqrt{(2\pi)^2 a\, 2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^{\dagger}\, e^{ikx} \right). \tag{3.36}$$

U poslednjoj formuli 3-vektor impulsa $\vec{k} = (k_1, k_2, \frac{2\pi}{a}\, n_3)$ je diskretan duž z-ose. Frekvenca je $\omega_k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \frac{(2\pi)^2}{a^2}\, n_3^2}$; u nastavku, sa k^2 ćemo označavati $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, a umesto n_3 pisaćemo n. Primetimo da su, umesto normiranja sa $(2\pi)^3$ kao u kontinualnom slučaju, odnosno sa $V = L^2 a$ (kada su granične površi kvadrati stranice $L \gg a$) kao u diskretnom: ravni talasi u (3.36) normirani sa $(2\pi)^2 a$.

Hoćemo da izračunamo gustinu energije vakuuma (ne pretpostavljajući normalno uređenje), odnosno njenu zavisnost $\rho(a)$. Izraz (3.29) je u ovom slučaju

$$\rho(a) = \frac{1}{(2\pi)^2\, a}\, \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2k \sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 n^2} \tag{3.37}$$

i razume se, ima beskonačnu vrednost. Ideja je da se on 'regularizuje' tako, da se napiše kao zbir beskonačnog, konstantnog dela, i konačnog dela koji zavisi od a.

Kao prvi korak, beskonačnu sumu regularizujemo uvođenjem eksponencijalno opadajućeg faktora:

$$\sum \omega_k = \lim_{\alpha \to 0} \sum \omega_k\, e^{-\alpha\omega_k} = -\lim_{\alpha\to 0} \frac{d}{d\alpha} \sum e^{-\alpha\omega_k}. \tag{3.38}$$

Definišemo

$$\begin{aligned} S(\alpha, a) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2k\, e^{-\alpha\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 n^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty k\, dk\, e^{-\alpha\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 n^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k\, dk\, e^{-\alpha k} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty F(n) + \frac{1}{2\pi} F(0), \end{aligned} \tag{3.39}$$

a gustina energije je onda

$$\rho(a) = -\frac{1}{2a} \lim_{\alpha\to 0} \frac{d}{d\alpha} S(\alpha, a). \tag{3.40}$$

Funkcije F koje smo uveli, odnosno integrale, možemo da sračunamo: dobijamo

$$F(0) = \frac{1}{\alpha^2}, \qquad F(n) = \frac{1}{\alpha^2} \left(f(n) - \alpha\, \frac{df(n)}{d\alpha} \right), \qquad \text{uz } f(n) = e^{-\frac{2\pi\alpha}{a}\, n}. \tag{3.41}$$

†Casimir-ov efekat se meri za elektromagnetno polje ograničeno metalnim površima koje mogu biti i zakrivljene: veličina i znak rezultujuće sile zavise od geometrije granica.

Osim toga, imamo

$$\sum_1^\infty f(n) = \sum_0^\infty f(n) - f(0) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\alpha}{a}} - 1}\,, \tag{3.42}$$

pa može da se izračuna i ostalo.

✓ Proverite korake koji su u ovom računu preskočeni.

Treba nam vodeći divergentni član po α u $S(\alpha, a)$, a to je

$$\sum_1^\infty F(n) \sim \frac{a}{\pi\alpha^3}\,, \qquad S(\alpha, a) \sim \frac{a}{\pi^2\alpha^3}\,. \tag{3.43}$$

Iz poslednje formule vidimo da ovim, pravolinijskim načinom računanja integrala, nismo uspeli da realizujemo ideju sa početka i iz $\rho(a)$ izdvojimo a-nezavisni divergentni doprinos.

✠ Izvedite tačan izraz za $S(\alpha, a)$.

Standardni trik (u ovom tipu računa) je primena Euler-Maclaurin-ove formule

$$\frac{1}{2}F(b) + \sum_{n=1}^\infty F(b+n) = \int_b^\infty F(x)dx - \sum_{n=1}^\infty \frac{B_{2n}}{(2n)!} F^{(2n-1)}(b) \tag{3.44}$$

koja važi kada je funkcija $F(x)$ analitička u (b, ∞) i red na desnoj strani jednačine konvergira; B_n su Bernoulli-jevi brojevi.

U našem slučaju je $b = 0$, $F(x)$ je izračunata u prethodnim međukoracima,

$$F(n) = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 + \frac{2\pi\alpha}{a}\,n\right) e^{-\frac{2\pi\alpha}{a}\,n}\,, \qquad \int_0^\infty F(x)dx = a\,G(\alpha)\,, \tag{3.45}$$

tako da imamo

$$\pi S(\alpha, a) = a\,G(\alpha) - \sum_{n=1}^\infty \frac{B_{2n}}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0)\,. \tag{3.46}$$

✓ Proveriti (3.45), diskutovati šta je funkcija $G(\alpha)$.

Koristeći, dalje, da je $F'(0) = 0$, $F^{(3)}(0) = 2\alpha\,\frac{(2\pi)^3}{a^3}$, $F^{(j)}(0) = O(\alpha^2)$, ($j \geq 5$), i da je $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, dobijamo

$$\pi S(\alpha, a) = a\,G(\alpha) + \frac{\pi^3}{45a^3}\,\alpha + O(\alpha^2)$$

$$\rho(a) = -\frac{1}{2\pi}\,G'(0) - \frac{\pi^2}{90a^4} = \rho(\infty) - \frac{\pi^2}{90a^4}\,. \tag{3.47}$$

Drugim rečima, kada se od gustine $\rho(a)$ oduzme beskonačna vrednost gustine energije u prostoru Minkowskog, $\rho(\infty)$, ostaje konačni deo koji je negativan. Možemo da kažemo da je gustina energije između ploča manja nego što bi bila da nema granice, jer zbog graničnih uslova ima manje virtuelnih parova čestica-antičestica. Ako je površina ploča između kojih se nalazi polje L^2 ($L \gg a$), za ukupnu energiju polja dobija se

$$E = L^2\, a\,(\rho(a) - \rho(\infty)) = -L^2\, \frac{\pi^2}{90a^3}\,, \tag{3.48}$$

a sila koja deluje na ploče je

$$F = -\frac{dE}{da} = -L^2\, \frac{\pi^2}{30a^4}\,. \tag{3.49}$$

Ova sila se meri u eksperimentu: za ravnu geometriju granica, ona je privlačna.

Odgovor na Dušanovo pitanje o dobijenom koeficijentu u prethodnoj formuli, koji je netačan tj. ne odgovara izmerenoj vrednosti Casimir-ove sile.

Vrednost koeficijenta zavisi od detalja kako definišemo granične uslove, tj. koliko modova polja saberemo u energiju. U originalnom radu Casimir je, bez ulaženja u detalje, napisao da je gustina energije

$$\rho(a) = \frac{1}{(2\pi)^2\, a}\, \frac{1}{2} \sum_n \int d^2k\, \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2} \tag{3.50}$$

tj. uzimajući da je $k_z = \frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ako se ovo uvrsti u račun dobiće se, koliko vidim na brzinu, Casimir-ov rezultat $\frac{\pi^2}{240\, a^4}$.

Druga varijanta možda malo preciznija je da skalarno polje kvantujemo tako da zadovoljava granične uslove $\Phi(z=0) = 0 = \Phi(z=a)$, i po tome 'simulira' elektromagnetno polje u prostoru čije su granice metalne ploče: takav uslov je postavio Voja u svojim skriptama. Opšte rešenje za polje se tada piše kao formula (2.6.109) (osim što umesto $\sqrt{\frac{a}{2}}$ treba da stoji $\sqrt{\frac{2}{a}}$, sigurno omaška); tada je formula

$$\rho(a) = \frac{1}{(2\pi)^2\, a}\, \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k\, \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2} \tag{3.51}$$

skoro ista, osim što n ide od jedan do beskonačno i što se opet vrednost dozvoljenih k_z menja u $\frac{\pi n}{a}$. To unosi sledeće promene u gornji račun (a Dušan neka proveri da nema grešaka, nadam se da nema). Sad ćemo definisati nove (slične) veličine, koje neću označavati novim slovima zbog jednostavnosti:

$$S(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n)$$

$$F(n) = \int_0^\infty k\, dk\, e^{-\alpha\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\pi\alpha}{a}\, n + 1\right) e^{-\frac{\pi\alpha}{a}\, n}$$

$$F'(0) = 0, \quad F^{(3)}(0) = \frac{2\pi^3\alpha}{a^3}\,.$$

Relevantne jednačine su sada

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0) - \frac{1}{2} F(0)$$

$$S(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi} \left(aG(\alpha) - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi^3}{30 \cdot 12} \frac{\alpha}{a^3} \right) . \tag{3.52}$$

Ovde vidimo zašto je prvo izvođenje bilo bolje 'namešteno': zbog drugog člana. Ako njega zanemarimo tj. izbacimo, dobićemo

$$E = -L^2 \frac{\pi^2}{30 \cdot 48\, a^3}, \qquad F = -L^2 \frac{\pi^2}{480\, a^4} . \tag{3.53}$$

U dimenzionoj regularizaciji se gornji detalji ne vide.

U svakom slučaju, skalarno polje je model da se pokaže postojanje efekata energije vakuuma: za potpuno precizan račun koji se slaže sa eksperimentom treba da se kvantuje elektromagnetno polje između ploča, saberu mode i regularizacija pažljivo sprovede do kraja.

3.4 Komutacione relacije i propagator

3.4.1 Istovremene komutacione relacije

Da bismo dalje ispitali osobine kvantovanog skalarnog polja, izračunaćemo još neke veličine i uvesti funkcije koje će se kasnije koristiti u perturbativnom računu. Radimo sa realnim poljem. Prva veličina koju računamo je komutator polja u različitim tačkama: rekli smo da tačke u prostoru imaju ulogu indeksa koji prebrojava nezavisne komponente sistema, pa računamo istovremeni komutator $[\Phi(t,\vec{r}), \Phi(t,\vec{r}')]$. Zbog jednostavnosti pisanja ćemo označiti, u ovom odeljku, $x^\mu = (t,\vec{r})$, $x'^\mu = (t,\vec{r}')$. Imamo

$$\begin{aligned}
[\Phi(t,\vec{r}), \Phi(t,\vec{r}')] &= \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\omega\omega'}} \Big([a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] e^{-ikx - ik'x'} + [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}{}^\dagger] e^{-ikx + ik'x'} \\
&\qquad + [a_{\vec{k}}{}^\dagger, a_{\vec{k}'}] e^{ikx - ik'x'} + [a_{\vec{k}}{}^\dagger, a_{\vec{k}'}{}^\dagger] e^{ikx + ik'x'} \Big) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega} \left(e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} - e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \right) = 0 .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Ova relacija znači da se sve vrednosti polja $\Phi(t,\vec{r})$ mogu u jednom/svakom trenutku izmeriti. Sa druge strane, ako izračunamo komutator polja i generalisanog impulsa, $\pi(t,\vec{r}) = \partial_0 \Phi(t,\vec{r})$, dobijamo

$$[\Phi(t,\vec{r}), \pi(t,\vec{r}')] = \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\omega\omega'}} \left[a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{\vec{k}}{}^\dagger\, e^{ikx}, -i\omega'\, a_{\vec{k}'}\, e^{-ik'x'} + i\omega'\, a_{\vec{k}'}{}^\dagger\, e^{ik'x'} \right]$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega}\, i\omega \, \left(e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \right) = i\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,. \tag{3.55}$$

Polje i njegov generalisani impuls komutiraju 'kao što treba': njihov komutator je do na $i\hbar$ proporcionalan klasičnoj Poisson-ovoj zagradi.

Ovim smo dobili ekvivalentan način za kanonsko kvantovanje skalarnog polja: umesto komutacionih relacija između operatora kreacije i anihilacije, zahtevamo da operatori polja zadovoljavaju algebru

$$[\Phi(t,\vec{r}), \Phi(t,\vec{r}')] = 0\,, \qquad [\pi(t,\vec{r}), \pi(t,\vec{r}')] = 0\,, \qquad [\Phi(t,\vec{r}), \pi(t,\vec{r}')] = i\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,. \tag{3.56}$$

Kao i ranije, vakuum je definisan uslovom da ga operatori anihilacije anihiliraju,

$$\Phi^+(x)|0\rangle = 0\,, \tag{3.57}$$

a pri kvantovanju fizičke veličine treba da budu normalno uređene. Kako sve svi operatori anihilacije nalaze u Φ^+ a operatori kreacije u Φ^- [‡], imamo na primer

$$\begin{aligned} :\Phi(x)\Phi(y): &= :(\Phi^+(x)+\Phi^-(x))(\Phi^+(y)+\Phi^-(y)): \\ &= \Phi^+(x)\Phi^+(y) + \Phi^-(y)\Phi^+(x) + \Phi^-(x)\Phi^+(y) + \Phi^-(x)\Phi^-(y)\,. \end{aligned} \tag{3.58}$$

✓ Proveriti, tj. ispisati poslednji izraz.

✠ Proveriti da su uslovi kvantovanja (3.21) i (3.56) ekvivalentni , tj. da iz (3.56) sledi da je $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0\,,\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}{}^\dagger] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')\,.$

Za kompleksno skalarno polje impuls je $\pi = \partial_0\Phi^\dagger$, pa u tom slučaju kanonska komutaciona relacija glasi

$$[\Phi(t,\vec{r}), \partial_0\Phi^\dagger(t,\vec{r}')] = i\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,. \tag{3.59}$$

3.4.2 Kovarijantne komutacione relacije

U kvantnoj mehanici je uobičajeno da se kanonske komutacione relacije $[x,p] = i$ odnosno $[a,a^\dagger] = 1$ pišu u Schrödinger-ovoj slici u kojoj operatori ne zavise od vremena, odnosno odnose se na neki fiksirani, na primer početni trenutak. U teoriji polja smo od početka u Heisenberg-ovoj slici, a kanonske komutacione relacije koje smo uveli su istovremene tj. važe za polja i impulse u istom trenutku vremena. Ali, želimo da nađemo i njihov kovarijantni oblik, tj. da odredimo komutator $[\Phi(\vec{r},t), \Phi(\vec{r}',t')]$ za $t \neq t'$.

Izračunajmo prethodno ne-istovremeni komutator u kvantnoj mehanici. Za svako t važi

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\,(a(t) + a^\dagger(t))\,, \tag{3.60}$$

[‡] Oznaka je 'naopaka', ali je standardna.

pri čemu $a(t)$ evoluira kao

$$a(t) = e^{iHt}\, a\, e^{-iHt} = a + [iHt, a] + \frac{1}{2!}\,[iHt, [iHt, a]] + \cdots = e^{-i\omega t}\, a\,, \tag{3.61}$$

gde je $a = a(0),\ x = x(0),\ p = p(0)$.

✓ Izvesti par preskočenih koraka u (3.61), $H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$.

Prema tome, imamo

$$x(t) = x\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\, p\sin\omega t\,, \qquad [x(t), x(t')] = \frac{i}{m\omega}\,\sin\omega(t-t')\,. \tag{3.62}$$

Izračunajmo sličan izraz za polja, komutator $[\Phi(x), \Phi(x')]$, uz promenjenu oznaku $x^\mu = (t, \vec{r}),\ x'^\mu = (t', \vec{r}')$. Pošto polje $\Phi(x)$ sadrži operatore kreacije i anihilacije linearno, komutatori polja su funkcije (a ne operatori). Zato su jednaki svojim vakuumskim očekivanim vrednostima. Uvodimo funkcije

$$i\Delta(x;x') = [\Phi(x), \Phi(x')] = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x') - \Phi(x')\Phi(x)|0\rangle = i\Delta^+(x,x') + i\Delta^-(x,x')\,, \tag{3.63}$$

$$i\Delta^+(x;x') = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle\,, \qquad i\Delta^-(x;x') = -\langle 0|\Phi(x')\Phi(x)|0\rangle\,. \tag{3.64}$$

Jednostavan račun daje

$$i\Delta^+(x;x') = \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\omega\omega'}}\ \langle 0|a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}{}^\dagger|0\rangle\, e^{-ikx+ik'x'} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega}\, e^{-ik(x-x')}\,, \tag{3.65}$$

pa ova funkcija zavisi samo od razlike argumenata,

$$\Delta^+(x;x') = \Delta^+(x-x')\,. \tag{3.66}$$

Za Δ^- imamo

$$\Delta^-(x;x') = \Delta^-(x-x') = -\Delta^+(x'-x)\,, \tag{3.67}$$

pa za ukupni komutator polja dobijamo

$$i\Delta(x-x') = -\,\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\,\sin k(x-x')\,. \tag{3.68}$$

Funkcije $\Delta^\pm$ zovu se Wightman-ove funkcije (i nekada označavaju slovom $G^\pm$, ili, u bezmasenom slučaju, $D^\pm$), a komutator $\Delta(x)$ je funkcija Pauli-Jordan-a. U delu literature sve ove funkcije i njihove kombinacije se nazivaju propagatori ili Green-ove funkcije (mada ne zadovoljavaju jednačinu za Green-ovu funkciju). One su osnovni aparat računa u kvantnoj teoriji polja, i u nekom smislu, predstavljaju srž kvantnih osobina polja. Funkcija Pauli-Jordana, videli smo, važna je za kanonsko kvantovanje. Iz Wightman-ovih funkcija mogu da se izračunaju (tj. definišu, regularizacijom) fluktuacije polja u vakuumu, kao i komponente tenzora energije-impulsa; videćemo da je Feynman-ov propagator kombinacija Δ^+ i Δ^-. Međutim, već iz uslova (3.59) jasno je da propagatori nisu obične funkcije jer su nekim tačkama (površima) zapravo uopštene funkcije. U nastavku izvodimo neke od osobina.

3.4.3 Osobine Green-ovih funkcija

I. Funkcije Pauli-Jordan-a i Wightman-a su invarijantne na prave (ortohrone) Lorentz-ove transformacije.

Ova osobina se vidi iz integralnih reprezentacija Green-ovih funkcija: pokazaćemo je za $\Delta(x)$. Funkcija Pauli-Jordan-a se može prikazati kao

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\,\epsilon(k_0)\,e^{-ikx}\,, \tag{3.69}$$

gde je znak energije $\epsilon(k_0) = \text{sgn}\,k_0 = \omega/k_0$ uveden u prošlom semestru, a tada smo pokazali i da je invarijantan na ortohrone Lorentz-ove transformacije. Desna strana izraza (3.69) je eksplicitno invarijantna: osim $\epsilon(k_0)$, sadrži d^4k i podintegralne funkcije koje zavise od invarijantnih veličina, k^2 i kx. Zato zapravo samo treba da dokažemo da je izraz (3.69) tačan. Imamo

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\,\epsilon(k_0)\,e^{-ikx} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3k\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\left(\frac{\delta(k_0-\omega)}{2|k_0|}+\frac{\delta(k_0+\omega)}{2|k_0|}\right)\epsilon(k_0)\,e^{-ik_0t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega}\left(e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}-e^{i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\sin kx\,. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Za Wightman-ove funkcije je, slično,

$$\Delta^{\pm}(x) = \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\,\theta(k_0)\,e^{-ikx}\,, \tag{3.71}$$

gde je $\theta(k_0)=(1+\epsilon(k_0))/2\,,\ \epsilon(k_0)=\theta(k_0)-\theta(-k_0):\theta(k_0)$ je takođe invarijantna na ortohrone Lorentz-ove transformacije. Prema tome, i Wightman-ove funkcije su Lorentz-invarijantne.

✠ Proverite izraze (3.71).

Posledica Lorentz-invarijantnosti funkcije $\Delta(x;x')$ je *mikrokauzalnost*. Pretpostavimo da polje merimo u tačkama x i x' koje su razdvojene intervalom prostornog tipa, $(x-x')^2<0$. Tada postoji inercijalni sistem u kome su ova dva događaja istovremeni: odgovarajuća Lorentz-ova transformacija Λ preslikava $t\to\tilde{t}$, $\vec{r}\to\tilde{\vec{r}}$, $t'\to\tilde{t}'$, $\vec{r}'\to\tilde{\vec{r}}'$. Pošto je invarijantna, funkcija Δ se ne menja pri transformaciji, $\Delta(x)=\Delta(\Lambda x)$, pa imamo

$$[\Phi(x),\Phi(x')] = i\Delta(t-t',\vec{r}-\vec{r}') = i\Delta(0,\tilde{\vec{r}}-\tilde{\vec{r}}')\,. \tag{3.72}$$

Međutim, $\Delta(0,\tilde{\vec{r}}-\tilde{\vec{r}}')$ je istovremeni komutator polja u različitim tačkama, pa je nula. To znači da je $[\Phi(x),\Phi(x')]=0$ uvek kada je rastojanje $x-x'$ izvan svetlosnog konusa, odnosno kada događaj (tačka) x' nije u kauzalnoj prošlosti ni u budućnosti od x. Drugim rečima: kada su tačke x i x' razdvojene intervalom prostornog tipa, polja $\Phi(x)$ i $\Phi(x')$ se mogu istovremeno meriti.

II. Funkcije $\Delta^{\pm}$ i Δ su rešenja Klein-Gordon-ove jednačine.

Ovo zapravo sledi iz činjenice da je kvantno polje $\Phi(x)$ rešenje Klein-Gordonove jednačine, jer je zapisano kao razvoj po njenim partikularnim rešenjima – ravnim talasima, a (operatorski) koeficijenti $a_{\vec{k}}$ i $a_{\vec{k}}^{\dagger}$ ne zavise od koordinata. Zato je i, na primer

$$(\Box_x + m^2)\,[\Phi(x), \Phi(x')] = [(\Box_x + m^2)\,\Phi(x), \Phi(x')] = 0\,. \tag{3.73}$$

III. Funkcije Wightman-a i Pauli-Jordan-a su singularne. Važi

$$\Delta(x) = -\Delta(-x)\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta(t,\vec{r})|_{t=0} = -\delta^3(\vec{r}) \qquad \nabla\,\Delta(t,\vec{r})|_{t=0} = 0\,.$$

✓ Dokažite ove relacije.

Green-ove funkcije koje analiziramo mogu, uz odgovarajuće granične uslove, da se eksplicitno izračunaju. (Granični uslovi za $\Delta(x-x')$ na primer su (3.54-3.55).) Izračunaćemo funkciju $i\Delta^+(0,\vec{r})$. Imamo

$$i\Delta^+(0,\vec{r}) = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} = \frac{1}{2(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{\sqrt{p^2+m^2}}\int_0^\pi e^{ipr\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{2(2\pi)^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\,dp\,. \tag{3.74}$$

Poslednji integral može da se izračuna ako se iskoristi formula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{(x^2+m^2)^\rho}\,dx = 2^{\frac{3}{2}-\rho}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\rho-\frac{1}{2}} K_{\rho-\frac{1}{2}}(\lambda m)\,, \tag{3.75}$$

gde je K_ν modifikovana Bessel-ova funkcija, $K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2}\,e^{\nu\pi i/2}\,H_\nu^{(1)}(ix)$. Koristeći ovu formulu, kao i rekurentnu relaciju za Bessel-ove funkcije $-2\,\frac{dK_\nu(x)}{dx} = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)$, dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\,dp = 2\pi K_0(mr)\,, \qquad i\Delta^+(0,\vec{r}) = \frac{m}{8\pi r}\,(K_{-1}(mr) + K_1(mr))\,. \tag{3.76}$$

Ako iskoristimo asimptotsko ponašanje Besselovih funkcija za velike vrednosti argumenta, $K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}$, dobijamo asimptotsko ponašanje za $i\Delta^+(0,\vec{r})$, korelacione funkcije za skalarno polje,

$$i\Delta^+(0,\vec{r}) \sim \frac{m}{8\pi r}\sqrt{\frac{\pi}{2mr}}\,e^{-mr}\,. \tag{3.77}$$

Funkcija opada eksponencijalno sa rastojanjem.

✠ Proverite sve detalje ovog izvođenja: standardna referenca za osobine specijalnih funkcija (koja se lako može naći na internetu) je Abramowitz & Stegun, *Handbook of Mathematical functions*; ili sajt NIST-a, https://dlmf.nist.gov/.

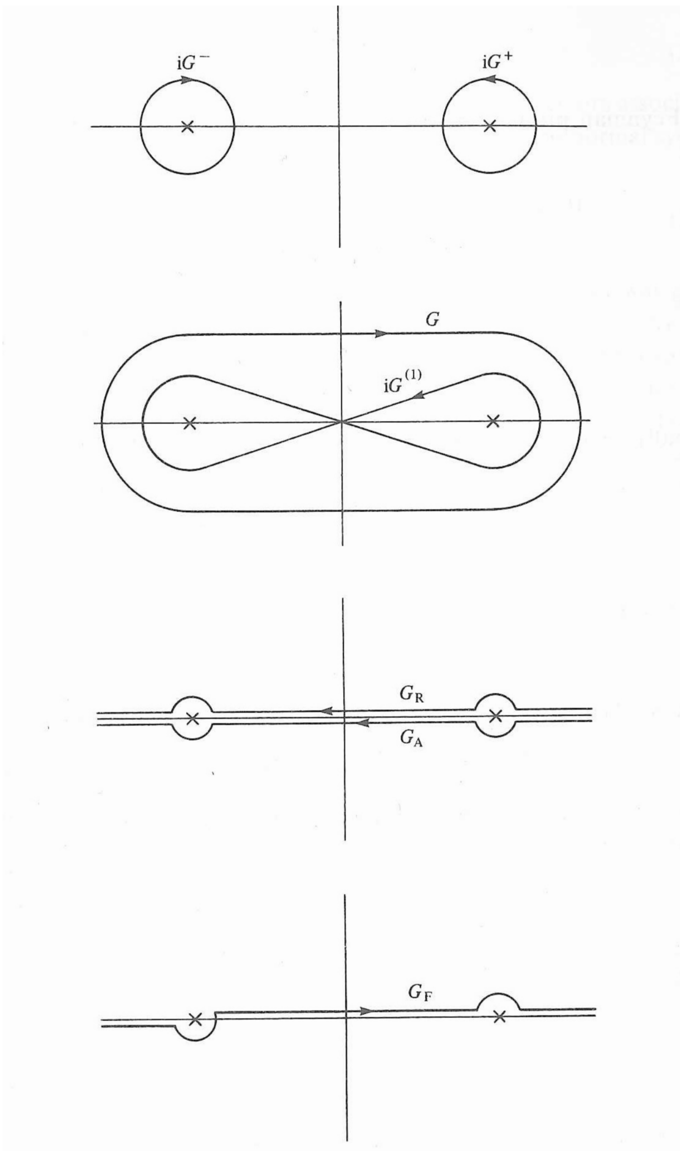
★ Pretpostavljajući da Wightman-ove funkcije Δ zavise samo od kvadrata rastojanja između tačaka x i x', $\Delta(x-x') = \Delta(\sigma)$, gde je $\sigma = \frac{1}{2}(x-x')^2$, naći opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine $(\Box_x + m^2)\,\Delta(\sigma) = 0$ i komentarisati granične uslove. Da li je $\epsilon(t-t')\,\delta(2\sigma)$ rešenje?

IV. Reprezentacija preko konturnih integrala

Sve Green-ove funkcije mogu se izraziti kao konturni integrali,

$$\mathcal{G}(x;x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2-m^2}\,, \tag{3.78}$$

a crteži na kojima su prikazane konture integracije dati su na slici koja je skenirana iz knjige Birrell-a i Davies-a: oznake nisu iste kao one koje mi koristimo. Dakle, konture integracije su



$$G^+(x;x') = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle$$

$$G^-(x;x') = \langle 0|\Phi(x')\Phi(x)|0\rangle$$

$$iG(x;x') = \langle 0|[\Phi(x),\Phi(x')]|0\rangle$$

$$G^{(1)}(x;x') = \langle 0|\{\Phi(x)\Phi(x')\}|0\rangle$$

$$G_R(x;x') = -\theta(t-t')G(x;x')$$

$$G_A(x;x') = \theta(t'-t)G(x;x')$$

$$iG_F(x;x') = \theta(t-t')G^+(x;x') + \theta(t'-t)G_-(x;x')$$

Videćemo kasnije da nam za teoriju perturbacija treba Feynman-ov propagator, koji je vakuumska očekivana vrednost vremenski uređenog proizvoda polja. *Vremensko uređenje* se definiše kao

$$T\left(\Phi(x)\Phi(x')\right) = \theta(t-t')\,\Phi(x)\Phi(x') + \theta(t'-t)\,\Phi(x')\Phi(x)\,, \tag{3.79}$$

a Feynman-ov propagator je

$$i\Delta_F(x-x') = \langle 0|T\left(\Phi(x)\Phi^\dagger(x')\right)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2-m^2}\,, \tag{3.80}$$

sa konturom integracije koja je data na prethodnoj slici i koju smo već koristili i diskutovali u prošlom semestru. Gornja jednačina definiše Δ_F za kompleksno skalarno polje, da imamo eksplicitno zapisano to: za realno polje je, naravno, $\Phi^\dagger = \Phi$. Feynman-ov propagator je (prava) Green-ova funkcija za Klein-Gordon-ovu jednačinu, tj. zadovoljava

$$(\Box_x + m^2)\,\Delta_F(x;x') = -\delta^4(x-x')\,. \tag{3.81}$$

✠ Proverite ovu relaciju i pošaljite mi račun!

★ Probajte da izračunate integral u (3.80) do kraja, koristeći integralne reprezentacije Bessel-ovih funkcija (rezultat je proporcionalan sa $H_1^{(2)}$). Iz ovog rezultata ili direktnim računom, možda je to bolje, odredite bezmaseni propagator D_F.

4 Slobodni fermioni

4.1 Klasično spinorsko polje

4.1.1 Lagranžijan

Lagranžijan koji opisuje, tj. koji bi klasično opisivao polje elektrona (masivnog Dirac-ovog fermiona) je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \,. \tag{4.1}$$

Funkcija $\psi(x)$ je Dirac-ov bispinor, i ima 4 komponente koje su kompleksne funkcije. Kao kod kompleksnog skalarnog polja, i ovde možemo da tretiramo ψ i $\bar{\psi}$ kao nezavisna polja. Euler-Lagrange-eva jednačina za polje $\bar{\psi}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha} = 0\,, \tag{4.2}$$

se svodi na Dirac-ovu jednačinu

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0\,, \tag{4.3}$$

a jednačina za polje ψ je adjungovana od (4.3).

Pošto je lagranžijan spinorskog polja prvog reda po vremenu, broj (realnih) stepeni slobode sistema u stvari nije $2 \times 4 = 8$, nego upola manji, 4. (U Hamilton-ovom formalizmu, broj jednačina prvog reda po vremenu za sistem od n stepeni slobode je $2n$.) Broj stepeni slobode se vidi i iz analize generalisanih impulsa sistema. Ako tretiramo ψ i $\bar{\psi}$ kao nezavisna polja, za njihove generalisane impulse dobijamo

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0 \psi_\alpha} = (\bar{\psi} i \gamma^0)_\alpha = i\psi^\dagger_\alpha\,, \qquad \bar{\pi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0 \bar{\psi}_\alpha} = 0\,. \tag{4.4}$$

Sistemi kod kojih su neki od generalisanih impulsa nula zovu se sistemi sa vezama, a činjenica da su neki impulsi nula ukazuje da sistem ima manje stepeni slobode nego što je prvobitno pretpostavljeno. Stvar je u tome što, ako je neki od impulsa npr. p_i (identički) nula, onda nije moguće na konzistentan način postulirati kanonsku komutacionu relaciju $\{x^i, p_j\}_{PZ} = \delta^i_j$, ili operatorski, $[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\delta^i_j$. Dirac je razvio sistematsku proceduru kako da se višak stepeni slobode eliminiše, ali je za spinorsko polje a ni kasnije nećemo razrađivati. Ovde je suština u tome da su jednačine kretanja (4.3) prvog a ne drugog reda po polju, pa stepeni slobode ima duplo manje. Pažljiva procedura daje isti rezultat kao kad se u relevantnim formulama (a pre kvantovanja) zameni $\bar{\pi} = 0$.

Dirac-ov lagranžijan je kompleksan: kompleksnom konjugacijom se dobija

$$\mathcal{L}^* = -i(\partial_\mu \psi^\dagger)\,\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi - m\psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\psi = -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = -i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \mathcal{L}\,. \tag{4.5}$$

Pošto je razlika $\mathcal{L}$–$\mathcal{L}^*$ 4-divergencija, umesto $\mathcal{L}$ za lagranžijan možemo da uzmemo

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \frac{i}{2}\,\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = -\frac{i}{2}\,(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi\,. \tag{4.6}$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ je simetričan po $\bar{\psi}$ i ψ, realan, i daje iste jednačine kretanja.

Kod spinorskog polja (a možda dramatičnije) se vraćamo na Jovanovo pitanje: koje klasično polje je opisano Dirac-ovim lagranžijanom, tj. da li (u prirodi) postoji? Odgovor je negativan: (fundamentalno) klasično spinorsko polje ne postoji, ono je 'po svojoj prirodi' kvantno. Međutim, činjenica da se Dirac-ova jednačina može dobiti variranjem klasičnog dejstva omogućava primenu pojmova i metoda klasične mehanike na spinore. U nekom smislu, razbijanje procedure kvantovanja na korake: klasično dejstvo – jednačine kretanja – opšte rešenje – kanonsko kvantovanje, omogućava sistematizaciju, pa time i razumevanje procedure operatorskog kvantovanja. (A to nije mala stvar; sem toga, generalizacija često daje nove uvide.) Videćemo u nastavku da ćemo same detalje procedure u skladu sa osobinama sistema zapravo modifikovati.

4.1.2 Rešenja Dirac-ove jednačine

Partikularna i opšte rešenje Dirac-ove jednačine i njihove osobine smo detaljno analizirali u prošlom semestru, pa ćemo sada samo ponoviti najvažnije formule. Partikularna rešenja su ravni talasi, a opšte rešenje je dato sa

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \int d^3p \sum_r \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \left(b_{r\vec{p}}\, u_r(\vec{p})\, e^{-ipx} + d^*_{r\vec{p}}\, v_r(\vec{p})\, e^{ipx} \right), \tag{4.7}$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) = \int d^3p \sum_r \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \left(d_{r\vec{p}}\, \bar{v}_r(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^*_{r\vec{p}}\, \bar{u}_r(\vec{p})\, e^{ipx} \right).$$

Spinorske amplitude $u_r(\vec{p})$ i $v_r(\vec{p})$ su u helicitetnom bazisu, tj. svojstvena su stanja heliciteta, projekcije spina na pravac 3-impulsa. Iz Dirac-ove jednačine sledi

$$(\not{p} - m)\, u_r(\vec{p}) = 0\,, \qquad (\not{p} + m)\, v_r(\vec{p}) = 0\,, \tag{4.8}$$

a skup je ortonormiran i kompletan,

$$\begin{aligned} &u_r^\dagger(\vec{p})\, v_s(-\vec{p}) = 0\,, && u_r^\dagger(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = \frac{E}{m}\,\delta_{rs}\,, && v_r^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) = \frac{E}{m}\,\delta_{rs}\,,\\ &\bar{u}_r(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = 0\,, && \bar{u}_r(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = \delta_{rs}\,, && \bar{v}_r(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = -\delta_{rs}\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\sum_r u_r(\vec{p})\, \bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}\,, \quad \sum_r v_r(\vec{p})\, \bar{v}_r(\vec{p}) = \frac{\not{p} - m}{2m}\,, \quad \sum_r u_r(\vec{p})\, \bar{u}_r(\vec{p}) - v_r(\vec{p})\, \bar{v}_r(\vec{p}) = I\,. \tag{4.10}$$

4.1.3 Hamiltonijan, energija

Gustina hamiltonijana za spinorsko polje je

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha\, \partial_0 \psi_\alpha + \bar{\pi}_\alpha\, \partial_0 \bar{\psi}_\alpha - \mathcal{L} = -\bar{\psi}\, (i\gamma^i \partial_i - m)\, \psi\,. \tag{4.11}$$

✓ Proveriti poslednju relaciju.

Slično, za komponente tenzora energije-impulsa se dobija

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\,\partial^{\nu}\psi\,, \tag{4.12}$$

odnosno

$$T^{00} = i\bar{\psi}\gamma^{0}\,\partial^{0}\psi\,. \tag{4.13}$$

✓ Izračunajte $T^{\mu\nu}$: imajte u vidu da se održane struje računaju 'na jednačinama kretanja'. Takođe, proverite da je T^{00} jednako gustini hamiltonijana $\mathcal{H}$.

Kao i kod skalarnog polja, prvi korak u kvantovanju spinora je da iz gustine energije izračunamo energiju polja. Zamenjujući opšte rešenje u izraz (4.13) dobijamo

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3r\, T^{00} \\
&= \iiint \frac{d^3r\, d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{\sqrt{EE'}}\sum_{r,r'}\Big(d_{r\vec{p}}\,\bar{v}_r(\vec{p})\,e^{-ipx} + b_{r\vec{p}}{}^{*}\,\bar{u}_r(\vec{p})\,e^{ipx}\Big) \\
&\qquad\qquad \times\gamma^0 E'\Big(b_{r'\vec{p}'}\,u_{r'}(\vec{p}')\,e^{-ip'x} - d_{r'\vec{p}'}{}^{*}\,v_{r'}(\vec{p}')\,e^{ip'x}\Big) \\
&= \int d^3p \sum_{r,r'} m\,\Big(d_{r\vec{p}}\,b_{r',-\vec{p}}\;v_r(\vec{p})^{\dagger}\,u_{r'}(-\vec{p})\,e^{-2iEt} - d_{r\vec{p}}\,d^{*}_{r'\vec{p}}\;v_r(\vec{p})^{\dagger}\,v_{r'}(\vec{p}) \\
&\qquad\qquad + b_{r\vec{p}}{}^{*}\,b_{r'\vec{p}}\;u_r(\vec{p})^{\dagger}\,u_{r'}(\vec{p}) - b_{r\vec{p}}{}^{*}\,d^{*}_{r',-\vec{p}}\;u_r(\vec{p})^{\dagger}\,v_{r'}(-\vec{p})\,e^{2iEt}\Big) \\
&= \int d^3p \sum_{r} E\,\Big(b_{r\vec{p}}{}^{*}\,b_{r\vec{p}} - d_{r\vec{p}}\,d_{r\vec{p}}{}^{*}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

U gornjem izvođenju se koriste relacije ortonormalnosti (4.9).

✓ Proverite detalje ovog računa.

Dobijamo rezultat kao i onaj koji smo analizirali u prošlom semestru, kada smo rešavali svojstveni problem Dirac-ovog hamiltonijana: energija nije pozitivna, i nije ograničena odozdo.

4.2 Kvantovanje

4.2.1 Prostor stanja

Međutim, postoji način kvantovanja koji obezbeđuje da energija kvantnog polja izvedena iz (4.14) bude pozitivna: to je da pretpostavimo algebru operatora kreacije i anihilacije baziranu na *antikomutacionim relacijama*. Dakle, kvantovanje definišemo sledećim koracima.

1. *Algebra operatora kreacije i anihilacije* je definisana sa

$$\{b_{r\vec{p}}, b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\} = \delta_{rr'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,, \qquad \{d_{r\vec{p}}, d_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\} = \delta_{rr'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,, \tag{4.15}$$

ostali antikomutatori su nula.

2. Postoji *jedinstveni vakuum* $|0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$ za koji važi

$$b_{r\vec{p}}\,|0\rangle = 0\,, \qquad d_{r\vec{p}}\,|0\rangle = 0 \qquad \forall r,\, \vec{p}\,. \tag{4.16}$$

Jednočestična stanja su definisana sa

$$|r\vec{p}\rangle_b = |1, r\vec{p}\rangle_b = b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\,|0\rangle\,, \qquad |r\vec{p}\rangle_d = |1, r\vec{p}\rangle_d = d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\,|0\rangle\,, \tag{4.17}$$

pri čemu operatori $b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}$ kreiraju čestice, elektrone, a $d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}$ *antičestice*, pozitrone impulsa $\vec{p}$ i heliciteta r. Dvočestična stanja su onda

$$|r\vec{p}; r'\vec{p}'\rangle = b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\,|0\rangle\,. \tag{4.18}$$

Iz antikomutacione relacije

$$\{b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}, b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\} = 0 \tag{4.19}$$

vidimo da su dvočestična stanja antisimetrična. Pošto je $(b_{r\vec{p}}{}^{\dagger})^2 = 0$, važi Pauli-jev princip: dva fermiona ne mogu se nalaziti u istom kvantnom stanju. Broj čestica impulsa $\vec{p}$ i heliciteta r definiše se standardno,

$$N_{r\vec{p},b} = b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, b_{r\vec{p}}\,, \qquad N_{r\vec{p},d} = d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, d_{r\vec{p}}\,. \tag{4.20}$$

✓ Proveriti da je $N^2_{r\vec{p},b} = N_{r\vec{p},b}$, $N^2_{r\vec{p},d} = N_{r\vec{p},d}$ za diskretizovano $\vec{p}$ (odnosno $N^2_{r\vec{p},b} = \delta(0)\, N_{r\vec{p},b}$, $N^2_{r\vec{p},d} = \delta(0)\, N_{r\vec{p},d}$ u kontinualnoj normalizaciji): svojstvene vrednosti operatora broja čestica mogu biti 0 ili 1.

3. Kvantne opservable dobijaju se iz klasičnih *normalnim uređenjem* operatora kreacije i anihilacije koje se definiše uz poštovanje antikomutacionih relacija, $:b_{r\vec{p}}\, b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger} := -b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\, b_{r\vec{p}}$, $:d_{r\vec{p}}\, b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger} := -b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\, d_{r\vec{p}}$, i tako dalje. Za hamiltonijan spinorskog polja dobijamo

$$H = :\int d^3p \sum_r E\, \left(b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, b_{r\vec{p}} - d_{r\vec{p}}\, d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\right): = \int d^3p \sum_r E\, \left(b_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, b_{r\vec{p}} + d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, d_{r\vec{p}}\right)\,. \tag{4.21}$$

Takođe, za ovakvo normalno uređenje je

$$:\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'): = \psi^+_\alpha(x)\psi^+_\beta(x') - \psi^-_\beta(x')\psi^+_\alpha(x) + \psi^-_\alpha(x)\psi^+_\beta(x') + \psi^-_\alpha(x)\psi^-_\beta(x')\,. \tag{4.22}$$

Kod normalnog uređenja spinora, zbog njihove matrične strukture (ψ je kolona a $\bar{\psi}$ vrsta), često je bolje ili lakše pisati njihove komponente eksplicitno.

4.2.2 Unutrašnje simetrije

Fazna transformacija, ili vektorska fazna transformacija se za spinorsko polje definiše slično kao kod kompleksnog skalarnog polja,

$$\psi \to e^{-iq\alpha}\,\psi\,, \qquad \bar\psi \to \bar\psi\, e^{iq\alpha}\,, \tag{4.23}$$

pri čemu se, naravno, podrazumeva se da je u eksponentu implicitno jedinična 4×4 matrica I. Ovo je globalna transformacija sa parametrom α; infinitezimalne transformacije su

$$\delta\psi = -iq\epsilon\,\psi, \qquad \delta\bar\psi = \bar\psi\, iq\epsilon\,. \tag{4.24}$$

Pošto je transformacija globalna, lako se proverava da je ona simetrija Dirac-ovog lagranžijana. Odgovarajuća održana struja je

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi}\,(-iq\psi) = q\,\bar\psi\gamma^\mu\psi\,. \tag{4.25}$$

✠ Izračunati odgovarajući naboj tj. naelektrisanje posle kvantovanja, i pokazati da je

$$Q = :\int d^3r\, J^0 : = :q\int d^3r\,\psi^\dagger\psi : = \int d^3p\sum_r q\,\left(b_{r\vec p}{}^\dagger\, b_{r\vec p} - d_{r\vec p}{}^\dagger\, d_{r\vec p}\right)\,. \tag{4.26}$$

Čestiče i antičestice imaju suprotna naelektrisanja.

Za spinorsko polje možemo da definišemo i aksijalnu faznu transformaciju,

$$\psi \to e^{-i\tilde q\beta\gamma_5}\,\psi\,. \tag{4.27}$$

✓ Pokazati da se pri ovoj transformaciji adjungovana polja transformišu kao

$$\psi^\dagger \to \psi^\dagger\, e^{i\tilde q\beta\gamma_5}\,, \qquad \bar\psi \to \bar\psi\, e^{-i\tilde q\beta\gamma_5}\,. \tag{4.28}$$

Iz poslednjih relacija je jasno da maseni član u Dirac-ovom lagranžijanu nije invarijantan na ovu transformaciju, $m\bar\psi\psi \to m\bar\psi\, e^{-2i\tilde q\beta\gamma_5}\,\psi$. Sa druge strane, kinetički član je invarijantan, pa aksijalna fazna transformacija predstavlja simetriju bezmasenog spinorskog dejstva.

✓ Dokazati invarijantnost kinetičkog člana; međukora je da se dokaže da iz $\gamma^\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^\mu$ sledi $\gamma^\mu\, e^{-i\tilde q\beta\gamma_5} = e^{i\tilde q\beta\gamma_5}\,\gamma^\mu$.

✓ Iz Noether-ine teoreme izračunati aksijalnu struju koja je za bezmaseno polje održana,

$$J^\mu_A = \tilde q\,\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi\,. \tag{4.29}$$

Kada je u teoriji narušena parnost, spinorski lagranžijan se prirodnije zapisuje u kiralnoj reprezentaciji γ-matrica koju smo uveli u prošlom semestru

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}\,. \tag{4.30}$$

✓ Izračunati generatore $\sigma^{\mu\nu}$ u kiralnoj reprezentaciji i pokazati da su blok-dijagonalni.

✓ Naći elemente vektorske i aksijalne fazne transformacuje u kiralnoj reprezentaciji.

Weyl-ovi ili desni i levi kiralni spinor uvode se sa

$$\psi_+ = \frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ u_- \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

✠ Izračunajte kinetički i maseni član u kiralnoj reprezentaciji, i pokažite da je kinetički član zbir kinetičkih članova za levi i desni spinor, dok maseni član meša leve i desne spinore.

4.2.3 Komutacione relacije, propagator

Komutacione relacije za fermionsko polje su zapravo antikomutatori između komponenti polja $\psi_\alpha(t,\vec{r})$ i impulsa $\pi_\alpha(t,\vec{r}) = i\psi_\alpha^\dagger(t,\vec{r})$. Imamo

$$\{\psi_\alpha(t,\vec{r}), \psi_\beta(t,\vec{r}\,')\} = 0\,, \qquad \{i\psi_\alpha^\dagger(t,\vec{r}), i\psi_\beta^\dagger(t,\vec{r}\,')\} = 0\,. \tag{4.32}$$

Ove relacije se lako proveravaju: u prvoj, na primer, imamo samo operatore $b_{r\vec{p}}$ i ${d_{r'\vec{p}'}}^\dagger$, koji svi među sobom antikomutiraju. Za istovremenu komutacionu relaciju između koordinate i impulsa imamo, koristeći oznaku $x = (t,\vec{r})$, $x' = (t,\vec{r}\,')$,

$$\{\psi_\alpha(t,\vec{r}), i\psi_\beta^\dagger(t,\vec{r}\,')\} = \iint \sum_{r\,r'} \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{\sqrt{EE'}} \times$$

$$\times\, i\left\{ b_{r\vec{p}}\, u_{r\vec{p},\alpha}\, e^{-ipx} + {d_{r\vec{p}}}^\dagger\, v_{r\vec{p},\alpha}\, e^{ipx}\,,\; d_{r'\vec{p}'}\, v^\dagger_{r'\vec{p}',\beta}\, e^{-ip'x'} + {b_{r'\vec{p}'}}^\dagger\, u^\dagger_{r'\vec{p}',\beta}\, e^{ip'x'} \right\}$$

$$= \int \sum_r \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E}\, i\left(u_{r\vec{p},\alpha}\, u^\dagger_{r\vec{p},\beta}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} + v_{r\vec{p},\alpha}\, v^\dagger_{r\vec{p},\beta}\, e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \right)$$

$$= \int \sum_r \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E}\, i\left(u_{r\vec{p},\alpha}\, u^\dagger_{r\vec{p},\beta} + v_{r,-\vec{p},\alpha}\, v^\dagger_{r,-\vec{p},\beta} \right) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} = i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'). \tag{4.33}$$

U ovom izvođenju, sem već uobičajene integracije eksponencijalne funkcije, smo koristili kompletnost spinorskih amplituda, $\sum_r u_{r\vec{p}}\, u^\dagger_{r\vec{p}} + v_{r,-\vec{p}}\, v^\dagger_{r,-\vec{p}} = \frac{E}{m}\, I$.

Ovo su bile istovremene komutacione relacije između polja. Sledeće što ćemo izračunati su *kovarijantne komutacione relacije*,

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = iS(x-x')\,, \tag{4.34}$$

gde je sada, kao i ranije, kod x i x' vreme različito, $x = (t,\vec{r})$, $x' = (t,\vec{r}\,')$. Imamo

$$iS(x-x') = \iint \sum_{r\,r'} \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{\sqrt{EE'}} \times$$

$$\times \left\{ b_{r\vec{p}}\, u_{r\vec{p},\alpha}\, e^{-ipx} + d_{r\vec{p}}{}^{\dagger}\, v_{r\vec{p},\alpha}\, e^{ipx}\,,\, d_{r'\vec{p}'}\, \bar{v}_{r'\vec{p}',\beta}\, e^{-ip'x'} + b_{r'\vec{p}'}{}^{\dagger}\, \bar{u}_{r'\vec{p}',\beta}\, e^{ip'x'} \right\}$$

$$= \int \sum_r \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E}\, \left(u_{r\vec{p},\alpha}\, \bar{u}_{r\vec{p},\beta}\, e^{-ip(x-x')} + v_{r\vec{p},\alpha}\, \bar{v}_{r\vec{p},\beta}\, e^{ip(x-x')} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E}\, \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\, e^{-ip(x-x')} - \frac{-\not{p} + m}{2m}\, e^{ip(x-x')} \right)_{\alpha\beta}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E}\, (e^{-ip(x-x')} - e^{ip(x-x')})$$

$$= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta}\, i\,\Delta(x - x')\,. \tag{4.35}$$

✓ Da biste bolje razumeli sadržaj, proverite korake u prethodna dva izvođenja.

Iako je

$$i\Delta(x - x')|_{x^0 = x^{0\prime}} = [\Phi(x), \Phi(x')]|_{x^0 = x^{0\prime}} = 0 \tag{4.36}$$

$iS(x - x')$, pošto je definisano preko izvoda, nije nula:

$$iS(x - x')|_{x^0 = x^{0\prime}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E}\, \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} - \frac{-\not{p} + m}{2m}\, {}^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \gamma^0\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\, \gamma^0\,, \tag{4.37}$$

posle smene $\vec{p} \to -\vec{p}$ u drugom članu.

Feynman-ov propagator za spinore se definiše slično kao za skalarno polje, pomoću vremenskog uređenja:

$$iS_F(x - x') = \langle 0|T(\psi(x)\, \bar{\psi}(x'))|0\rangle\,, \tag{4.38}$$

gde je

$$T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')) = \theta(t - t')\, \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x') - \theta(t' - t)\, \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\,. \tag{4.39}$$

Ako uvedemo, kao ranije,

$$iS^+_{\alpha\beta}(x - x') = \langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')|0\rangle\,, iS^-_{\alpha\beta}(x - x') = \langle 0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0\rangle\,, \tag{4.40}$$

imamo

$$S_F(x) = \theta(t)S^+(x) - \theta(-t)S^-(x) = (i\not{\partial} + m)\, \Delta_F(x)\,, \tag{4.41}$$

kao i

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\, e^{-ipx}\,. \tag{4.42}$$

5 Elektromagnetno polje, kovarijantno kvantovanje

U uvodnoj glavi upoznali smo jedan način kvantovanja elektromagnetnog polja – fiksiranjem Coulomb-ovog gejžda, određivanjem fizičkih stepeni slobode, kvantovanjem bozonskim komutacionim relacijama. Ovakvo kvantovanje razume se narušava gradijentnu simetriju na klasičnom nivou, tako da ne znamo da li je dobijena kvantna teorija ima (tj. znamo – nema, jer nije ni definisana, ali ne znamo da li može da je ima). Prenošenje simetrije sa klasičnog na kvantni nivo nije uopšte automatsko i zavisi od procedure kvantovanja: kod nekih teorija simetrija se i ne može realizovati kao kvantna, i za njih kažemo da imaju anomalije. A zapravo se ispostavlja da je postojanje gradijentne simetrije esencijalni uslov za renormalizabilnost teorije, tj. mogućnost da nam kvantna teorija da (konačne, jednoznačne) predikcije eksperimenta. Zato je ideja kovarijantnog kvantovanja: da u procesu 'sačuvamo' šta može od simetrija, odnosno da pratimo šta se sa simetrijama dešava.

5.1 Klasična teorija

5.1.1 Maxwell-ov lagranžijan

Maxwell-ov lagranžijan za elektromagnetno polje je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \,. \tag{5.1}$$

Ovde je A_μ elektromagnetni potencijal, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ jačina polja, a j_μ je spoljašnja struja. Gradijentna transformacija definisana je sa

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \,. \tag{5.2}$$

Jačina polja $F_{\mu\nu}$ je očigledno invarijantna na gradijentne transformacije, a drugi član u lagranžijanu (5.1), izvorni, se menja kao

$$j^\mu A'_\mu = j^\mu A_\mu + j^\mu \partial_\mu f = j^\mu A_\mu + \partial_\mu (j^\mu f) \tag{5.3}$$

ukoliko je struja održana, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Poslednji član u (5.3) je 4-divergencija, pa ne menja jednačine kretanja.

Ideja fiksiranja gejdža je da se potencijali, npr. kada rešavamo jednačine kretanja, jednoznačno odrede: to je ono što gejdž uslov treba da obezbedi. U nastavku ćemo često koristiti Lorentz-ov gejdž uslov

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \,, \tag{5.4}$$

koji je Lorentz-invarijantan. Treba zapaziti da i kada ovako fiksiramo gedž, i dalje postoji sloboda da se izvrši gradijentna transformacija (5.2) harmonijskom funkcijom f, tj. funkcijom koja zadovoljava d'Alembert-ovu jednačinu, $\Box f = 0$. Ovaj ostatak je tzv. rezidualna simetrija.

Pošto je

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu A_\nu} = -F^{\mu\nu} \tag{5.5}$$

Euler-Lagrange-eve jednačine glase

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu\,. \tag{5.6}$$

Generalisani impulsi elektromagnetnog polja su

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu}\,, \tag{5.7}$$

odnosno, $\pi^0 = 0$, $\pi^i = -E^i$. Činjenica da je impuls $\pi^0 = 0$ znači da u teoriji postoje veze. One su u ovom slučaju posledica gradijentne simetrije, jer polje opisujemo sa četiri komponente elektomagnetnog potencijala A_μ, a znamo da u stvari imamo samo dva fizička stepena slobode.

Znači, ipak nekako moramo da nametnemo gejdž uslov, na neki 'invarijantniji' (ili lakši za praćenje) način. Najpogodniji je Lorentz-ov gauge (5.4), koji se može uvesti u lagranžijan pomoću Lagrange-evog množitelja, nove promenljive λ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu - \frac{\lambda}{2}\,(\partial_\mu A^\mu)^2\,. \tag{5.8}$$

Varijaciona jednačina po λ daje

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 = 0\,, \tag{5.9}$$

a jednačina po A_μ je

$$\Box A^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu\,. \tag{5.10}$$

Pošto λ očigledno nije dinamička promenljiva nego konstanta (ne zavisi od vremena, jer u lagranžijanu nemamo član koji sadrži brzinu $\partial_0\lambda$), možemo da je fiksiramo, npr. uzimajući $\lambda = 1$: tada jednačina kretanja za polje postaje $\Box A^\nu = j^\nu$. Fiksiranja Lorentz-ovog gejdža tako što se on uvede u lagranžijan se veoma često koristi i za kvantovanje: mi ćemo u nastavku diskutovati nešto drugačiji metod.

5.1.2 Fermi-jev lagranžijan

Analiziramo Fermi-jev lagranžijan, koji opisuje bezmaseno vektorsko polje bez gradijentne simetrije,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu\,. \tag{5.11}$$

Pošto je

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu A_\nu} = -\partial^\mu A^\nu \tag{5.12}$$

jednačina kretanja je d'Alembert-ova jednačina

$$\Box A^\nu = j^\nu\,. \tag{5.13}$$

Sa druge strane, za generalisane impulse se dobija

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0 A_\mu} = -\partial^0 A^\mu\,, \tag{5.14}$$

pa nemamo degeneraciju tj. veze jer $\pi^0 \neq 0$.

Fermi-jev lagranžijan opisuje realno vektorsko bezmaseno polje, sistem koji ima 4 stepena slobode. Međutim, skup klasičnih rešenja jednačina kretanja za Fermi-jev lagranžijan koja zadovoljavaju *dodatni uslov* $\partial_\mu A^\mu = 0$ *je isti* kao skup rešenja jednačina kretanja za Maxwell-ov lagranžijan u Lorentz-ovom gejdžu. Pošto je naša procedura kvantovanja: nađemo opšte klasično rešenje pa kvantujemo amplitude odnosno koeficijente u razvoju proglasimo za operatore, za kvantovanje elektromagnetnog polja možemo da iskoristimo Fermi-jev lagranžijan. Na sledeći način: prvo kvantujemo polje opisano sa (5.11), a gejdž uslov namećemo kasnije.

Znači trebaju nam rešenja jednačina (5.13): to su ravni talasi $e^{\pm ikx}$ koji zadovoljavaju disperzionu jednačinu $k^2 = 0$. Opšte rešenje je

$$A^\mu(x) = A^{+\mu}(x) + A^{-\mu}(x) = \sum_r \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega}}\, \epsilon^\mu_{r\vec{k}} \left(a_{r\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{r\vec{k}}{}^*\, e^{ikx} \right)\,. \tag{5.15}$$

U prethodnoj formuli smo, da bismo prebrojali stepene slobode vektorskog polja, uveli četiri *vektora polarizacije* $\epsilon^\mu_{r\vec{k}} \equiv \epsilon_r{}^\mu(\vec{k})$, $r = 0, 1, 2, 3$.

$\epsilon_{r\vec{k}}$ su linerno nezavisni vektori u prostoru Minkowskog, za svako $\vec{k}$: npr. možemo uzeti da su to vektori apsolutnog bazisa. Ipak, najzgodnije je da njihove pravce vežemo za pravac prostiranja talasa $\vec{k}$, kao što smo uradili za fermione. Uslovi normalizacije i kompletnosti su

$$\epsilon_r{}^\mu(\vec{k})\, \epsilon_{s\mu}(\vec{k}) = -\zeta_r\, \delta_{rs}, \qquad \text{gde je } \zeta_r = \begin{cases} -1, & r = 0 \\ 1, & r = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\sum_r \zeta_r\, \epsilon_r{}^\mu(\vec{k})\, \epsilon_r{}^\nu(\vec{k}) = -\eta^{\mu\nu}\,. \tag{5.17}$$

✓ Proveriti da vektori apsolutnog bazisa zadovoljavaju gornje uslove.

Za vremenski vektor, $r = 0$, odnosno *skalarnu polarizaciju*, možemo da uzmemo

$$\epsilon_0{}^\mu(\vec{k}) \equiv n^\mu = (1\,0\,0\,0)\,. \tag{5.18}$$

Sa $r = 1, 2$ obeležavamo *transverzalne polarizacije*,

$$\epsilon_r{}^\mu(\vec{k}) = \big(0, \vec{\epsilon}_r(\vec{k})\big)\,, \qquad \vec{\epsilon}_{1,2}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0\,, \quad \epsilon^\mu_{1,2}(\vec{k})\, k_\mu = 0\,. \tag{5.19}$$

$\epsilon_3(\vec{k})$ je *longitudinalna polarizacija*

$$\vec{\epsilon}_3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\,, \qquad \epsilon_3{}^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (k\cdot n)\, n^\mu}{\sqrt{(k\cdot n)^2 - (k\cdot k)}}\,. \tag{5.20}$$

Poslednji izraz sledi iz normiranja ϵ_3 i ortogonalnosti, $\epsilon_3{}^\mu n_\mu = 0$.

✓ Izvedite izraz za longitudinalnu polarizaciju (5.20) (to je jednostavna vežba, a ovaj izraz ćemo posle koristiti (obratite pažnju na oznaku, $k \cdot n = k^\mu n_\mu$, $k \cdot k = k^\mu k_\mu = 0$) i razmislite uslovima ortgonalnosti i kompletnosti u prostoru Minkowskog, proverite da oni definišu bazis.

5.2 Kvantovanje

5.2.1 Komutacione relacije

Kvantovanje vektorskog polja (bi trebalo da) je pravolinijsko: njegove komponente su realne skalarne funkcije, pa je algebra koju polja i impulsi treba da zadovoljavaju bozonska, kao da je svaka od komponenti skalarno polje. Osim što A^μ nisu skalari nego komponente vektora, pa komutacione relacije treba da budu i kovarijantne:

$$[A^\mu(t,\vec r), \pi^\nu(t,\vec r')] = [A^\mu(t,\vec r), -\partial^0 A^\nu(t,\vec r')] = i\eta^{\mu\nu}\,\delta(\vec r - \vec r')\,, \tag{5.21}$$

$$[A^\mu(t,\vec r), A^\nu(t,\vec r')] = 0\,, \qquad [\pi^\mu(t,\vec r), \pi^\nu(t,\vec r')] = 0\,. \tag{5.22}$$

Iz istovremenih komutacionih relacija slede odmah kovarijantne (u sledeće dve formule $t \neq t'$),

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = iD^{\mu\nu}(x-x') = -i\eta^{\mu\nu}\Delta(x-x')|_{m=0}\,, \tag{5.23}$$

i propagator

$$D_F^{\mu\nu}(x) = -\eta^{\mu\nu}\Delta_F(x)|_{m=0}\,. \tag{5.24}$$

Međutim, u relacijama (5.21) u stvari imamo problem: kad ih ispišemo, vidimo da je

$$[A^i(t,\vec r), \partial^0 A^j(t,\vec r')] = i\delta^{ij}\,\delta(\vec r - \vec r')\,, \qquad [A^0(t,\vec r), \partial^0 A^0(t,\vec r')] = -i\delta(\vec r - \vec r')\,. \tag{5.25}$$

Komutator za nultu komponentu polja ima pogrešan znak. Ovaj minus 'propagira' i u relacije između operatora kreacije i anihilacije. Ako iskoristimo

$$a_{r\vec k} = -\zeta_r \int \frac{d^3 r}{\sqrt{2\omega\,(2\pi)^3}}\,\epsilon^\mu_{r\vec k}\; e^{ikx}\left(\omega A_\mu(x) + i\partial^0 A_\mu(x)\right)\,, \tag{5.26}$$

imamo

$$\begin{aligned}
[a_{r\vec k}, a^\dagger_{s\vec k'}] &= \zeta_r\zeta_s \iint \frac{d^3 r\, d^3 r'}{(2\pi)^2 2\sqrt{\omega\omega'}}\; e^{ikx - ik'x'}\epsilon^\mu_{r\vec k}\,\epsilon^\nu_{s\vec k'} \\
&\quad \times \left[\, \omega A_\mu(x) + i\partial_0 A_\mu(x)\,,\; \omega' A_\nu(x') - i\partial_0 A_\nu(x')\,\right] \\
&= \zeta_r\zeta_s \iint \frac{d^3 r\, d^3 r'}{(2\pi)^2 2\sqrt{\omega\omega'}}\; e^{ikx - ik'x'}\epsilon^\mu_{r\vec k}\,\epsilon^\nu_{s\vec k'}(-\eta_{\mu\nu})(\omega+\omega')\,\delta(\vec r - \vec r')
\end{aligned}$$

$$= \zeta_r \, \delta_{rs} \, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \, . \tag{5.27}$$

Znači, i relacija za skalarne operatore kreacije i anihilacije, $r = 0$, ima pogrešan znak, minus.

✓ Dokažite (5.26): treba da se iskoristi ortonormiranost polarizacija, $\epsilon_r^\mu(\vec{k})\epsilon_{s\mu}(\vec{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}$. Ova relacija je takođe korišćena da bi se dobio konačni rezultat u (5.27), proverite!

U principu, Fock-ov prostor stanja za vektorsko polje se definiše standardno, pomoću jedinstvenog vakuuma $|0\rangle$, $a_{r\vec{k}}|0\rangle = 0$, jednočestičnih stanja

$$|r\vec{k}\rangle = a^\dagger_{r\vec{k}} \, |0\rangle \, , \tag{5.28}$$

višečestičnih stanja, i svih linearnih kombinacija. Međutim, skalarni fotoni

$$|0\vec{k}\rangle = a^\dagger_{0\vec{k}} \, |0\rangle \tag{5.29}$$

imaju negativan kvadrat norme,

$$\langle 0\vec{k} \, | 0\vec{k} \, \rangle = \langle 0 | \, a_{0\vec{k}} \, a^\dagger_{0\vec{k}} \, |0\rangle = \langle 0 | [a_{0\vec{k}} \, , a^\dagger_{0\vec{k}}] |0\rangle = -\delta(0) \, . \tag{5.30}$$

To znači da Fock-ov prostor nije Hilbert-ov prostor, a razlog je, u osnovi, to što radimo sa neeuklidskom metrikom.

5.2.2 Energija

Da odemo korak dalje i izračunamo energiju. Gustina hamiltonijana za vektorsko polje je

$$\mathcal{H} = \pi_\mu(\partial^0 A^\mu) - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \, (\partial_0 A_\mu)(\partial^0 A^\mu) + \frac{1}{2} \, (\partial_i A_\mu)(\partial^i A^\mu) \, . \tag{5.31}$$

Za hamiltonijan dobijamo

$$\begin{aligned} H = -\frac{1}{2} : \sum_{r,r'} \iiint \frac{d^3r \, d^3k \, d^3k'}{(2\pi)^3 \, 2\sqrt{\omega\omega'}} \Big(& -\omega\omega' \, \epsilon^\mu_{r\vec{k}} \, \epsilon_{r'\vec{k}'\mu} \, (a_{r\vec{k}} \, e^{-ikx} - a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, e^{ikx})(a_{r'\vec{k}'} \, e^{-ik'x} - a^\dagger_{r'\vec{k}'} \, e^{ik'x}) \\ & -\vec{k} \cdot \vec{k}' \, \epsilon^\mu_{r\vec{k}} \, \epsilon_{r'\vec{k}'\mu} \, (a_{r\vec{k}} \, e^{-ikx} - a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, e^{ikx})(a_{r'\vec{k}'} \, e^{-ik'x} - a^\dagger_{r'\vec{k}'} \, e^{ik'x}) \Big) : \\ = -\frac{1}{2} : \sum_{r,r'} \iint & \frac{d^3k \, d^3k'}{2\omega} \, \epsilon^\mu_{r\vec{k}} \, \epsilon_{r'\vec{k}'\mu} \, (\, \omega\omega' + \vec{k} \cdot \vec{k}') \\ \times \Big(a_{r\vec{k}} \, a_{r'\vec{k}'} \, \delta(\vec{k} + \vec{k}') \, e^{-2i\omega t} & - a_{r\vec{k}} \, a^\dagger_{r'\vec{k}'} \, \delta(\vec{k} - \vec{k}') - a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, a_{r'\vec{k}'} \, \delta(\vec{k} - \vec{k}') + a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, a^\dagger_{r'\vec{k}'} \, \delta(\vec{k} + \vec{k}') \, e^{2i\omega t} \Big) : \\ = \frac{1}{2} : \sum_r \int d^3k \, \zeta_r \, \omega \, & (a_{r\vec{k}} \, a_{r\vec{k}}{}^\dagger + a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, a_{r\vec{k}}) : = \sum_r \int d^3k \, \zeta_r \, \omega \, a_{r\vec{k}}{}^\dagger \, a_{r\vec{k}} \, . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Očekivana vrednost energije je, zbog osobine (5.30), pozitivna i za skalarna stanja.

✓ Izračunati vrednosti energije skalarnog i longitudinalnog fotona impulsa $\vec{k}$.

5.2.3 Gupta-Bleuler-ovo kvantovanje

Dakle, dobili smo sledeći rezultat: kanonska kvantizacija bezmasenog vektorskog polja je formalno moguća, ali daje prostor stanja koji ima indefinitnu metriku i samim tim, nema korektnu statističku interpretaciju. Između ostalog, unitarnost teorije nije garantovana.

Iako kvantovanje bezmasenog vektorskog polja nije konzistentno, ono nam zapravo ne i treba: mi treba da kvantujemo polje A^μ koje (klasično) zadovoljava dodatni uslov $\partial_\mu A^\mu = 0$. Kako da realizujemo ovakav uslov? Očigledno, ne možemo da ga nametnemo kao operatorski identitet, jer je u kontradikciji sa komutacionim relacijama: naime, pošto je

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = iD_{\mu\nu}(x-x')\,, \tag{5.33}$$

sledi

$$[\partial^\mu A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\partial^\mu_x D_{\mu\nu}(x-x') \neq 0\,. \tag{5.34}$$

Međutim, činjenica da je uslov *linearan* može da se iskoristi tako da se polazni prostor stanja suzi, i definiše *potprostor fizičkih stanja*, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{phys}$. Ako bismo za $|\phi\rangle$ zahtevali

$$\partial_\mu A^\mu |\phi\rangle = 0\,, \tag{5.35}$$

iz fizičkih stanja bio bi isključen vakuum $|0\rangle$. Zato tražimo da na fizičkim stanjima bude zadovoljen slabiji uslov,

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\phi\rangle = 0\,, \tag{5.36}$$

koji i dalje obezbeđuje da je Lorentz-ov gejdž zadovoljen kao očekivana vrednost

$$\langle\phi|\,\partial_\mu A^\mu |\phi\rangle = 0\,. \tag{5.37}$$

Da proanaliziramo kako (5.36) izgleda u impulsnoj reprezentaciji. Imamo

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu+} &= -i\sum_r \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\; a_{r\vec{k}}\; k_\mu \epsilon^\mu_{r\vec{k}}\; e^{-ikx} \\
&= -i \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(a_{0\vec{k}}\; k_\mu \epsilon^\mu_{0\vec{k}} + a_{3\vec{k}}\; k_\mu \epsilon^\mu_{3\vec{k}} \right) e^{-ikx} \\
&= -i \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(k_\mu n^\mu \right) \left(a_{0\vec{k}} - a_{3\vec{k}} \right) e^{-ikx}\,.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

U drugi red smo prešli koristeći da za transverzalne fotone važi $k_\mu \epsilon^\mu_{1,2\,\vec{k}} = 0$, a konačna relacija sledi iz izraza

$$k_\mu \epsilon^\mu_{0\vec{k}} = k\cdot n\,, \qquad k_\mu \epsilon^\mu_{3\vec{k}} = k_\mu\, \frac{k^\mu - (k\cdot n)\, n^\mu}{\sqrt{(k\cdot n)^2 - k^2}} = -\, k\cdot n \tag{5.39}$$

koji je tačan 'on-shell', tj. pod integralom, kada je $k^2 = 0$.

Prema tome, u impulsnom prostoru uslov (5.36) koji definiše prostor fizičkih stanja glasi

$$(a_{0\vec{k}} - a_{3\vec{k}})|\phi\rangle \equiv L_{\vec{k}}\,|\phi\rangle = 0\,, \tag{5.40}$$

odnosno

$$a_{0\vec{k}}\,|\phi\rangle = a_{3\vec{k}}\,|\phi\rangle\,. \tag{5.41}$$

Vidimo, prvo, da su sva stanja koja sadrže samo transverzalne fotone fizička. Dalje, skalarni i longitudinalni fotoni mogu da budu u $\mathcal{H}_{phys}$ samo u određenim kombinacijama, takvim da važi (5.41).

Da izračunamo vrednosti energije u fizičkim stanjima. Imamo

$$\begin{aligned}\langle\phi|H|\phi\rangle &= \langle\phi|\sum_r \int d^3k\, \zeta_r\, \omega\, a_{r\vec{k}}{}^{\dagger}\, a_{r\vec{k}}\,|\phi\rangle \\ &= \sum_{r=1,2}\int d^3k\ \omega\,\langle\phi|a_{r\vec{k}}{}^{\dagger}\, a_{r\vec{k}}\,|\phi\rangle + \int d^3k\ \omega\,\langle\phi|\,(a^{\dagger}_{3\vec{k}}\,a_{3\vec{k}} - a^{\dagger}_{0\vec{k}}\,a_{0\vec{k}})\,|\phi\rangle\end{aligned} \tag{5.42}$$

ali drugi sabirak je nula, zbog (5.41) (odnosno njoj adjungovane). Zaključujemo da je energija fizičkog stanja jednaka zbiru energija transverzalnih fotona koji se u njemu nalaze. Slično je i sa očekivanim vrednostima drugih opservabli.

5.2.4 Prostor fizičkih stanja

Izraz za energiju koji smo dobili kao da implicira da su fizička stanja potpuno određena transverzalnim fotonima, a da skalarni i logitudinalni ne utiču na rezultate merenja. Zaista je tako: postojanje skalarnih i longitudinalnih modova je posledica rezidualne simetrije koja ostaje posle fiksiranja Lorentz-ovog gejdža.

Možemo eksplicitno da konstruišemo fizički prostor stanja elektromagnetnog polja $\mathcal{H}_{phys}$, koji je potprostor ranije uvedenog Fock-ovog prostora za bezmaseno vektorsko polje, $\mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{H}_{Fock}$. Pre svega, jasno je da se sva stanja koja sadrže samo transverzalne fotone, $|\phi_{tran}\rangle$, nalaze u fizičkom prostoru, $\mathcal{H}_{tran} \subset \mathcal{H}_{phys}$. Dalje, već smo pomenuli, uslov (5.41) daje ograničenje na longitudinalne i skalarne fotone: on implicira da u stanjima sa određenim brojem čestica, broj longitudinalnih fotona mora biti jednak broju skalarnih fotona. Razmotrimo fizičko stanje $|\phi\rangle$ koje sadrži jedan skalarni i jedan longitudinalni foton: ono je oblika

$$|\phi\rangle = (\alpha\, a^{\dagger}_{0\vec{k}} + \beta\, a^{\dagger}_{3\vec{k}})|\phi_{tran}\rangle\,. \tag{5.43}$$

Iz uslova $L_{\vec{q}}\,|\phi\rangle = 0$ možemo da odredimo vezu između α i β:

$$0 = (a_{0\vec{q}} - a_{3\vec{q}})\,(\alpha a^{\dagger}_{0\vec{k}} + \beta a^{\dagger}_{3\vec{k}})\,|\phi_{tran}\rangle = [a_{0\vec{q}} - a_{3\vec{q}}\,,\, \alpha a^{\dagger}_{0\vec{k}} + \beta a^{\dagger}_{3\vec{k}}]\,|\phi_{tran}\rangle = -(\alpha+\beta)\,\delta(\vec{k}-\vec{q})|\phi_{tran}\rangle$$

odnosno, $\alpha = -\beta$. Zaključujemo da se ('skalarno-jednočestična') fizička stanja dobijaju iz transverzalnih delovanjem operatora $L^{\dagger}_{\vec{q}}$. U stvari, lako se vidi da je potprostor fizičkih stanja generisan vektorima $|\phi_{tran}\rangle$, $L^\dagger_{\vec{k}}\,|\phi_{tran}\rangle$, $L^\dagger_{\vec{k}}\,L^\dagger_{\vec{k}'}\,|\phi_{tran}\rangle$, i tako dalje, odnosno da je opšte stanje oblika

$$|\phi_c\rangle = R^\dagger_c\,|\phi_{tran}\rangle\,, \tag{5.44}$$

gde je R_c operator

$$R^\dagger_c = I + \int d^3k\, c(\vec{k})\, L^\dagger_{\vec{k}} + \iint d^3k\, d^3k'\, c(\vec{k},\vec{k}')\, L^\dagger_{\vec{k}} L^\dagger_{\vec{k}'} + \ldots\,. \tag{5.45}$$

Pre nego što ispitamo osobine ovih stanja, da proverimo algebru operatora rezidualne simetrije. Vidimo da važi

$$[L_{\vec{k}}, L_{\vec{k}'}] = 0\,, \quad [L_{\vec{k}}, L^\dagger_{\vec{k}'}] = 0\,, \qquad \text{kao i} \quad [R_c, R_{c'}] = 0\,, \quad [R_c, R^\dagger_{c'}] = 0\,. \tag{5.46}$$

✓ Pokažite gornje relacije.

Prvo, lako se vidi da je *kvadrat norme* fizičkih stanja pozitivan, tj. da je potprostor $\mathcal{H}_{phys}$ Hilbert-ov prostor:

$$\langle\phi_c|\phi_c\rangle = \langle\phi_{tran}|\, R_c R^\dagger_c\,|\phi_{tran}\rangle = \langle\phi_{tran}|\, R^\dagger_c R_c\,|\phi_{tran}\rangle = \langle\phi_{tran}|\phi_{tran}\rangle \geq 0 \tag{5.47}$$

jer je $R_c|\phi_{tran}\rangle = |\phi_{tran}\rangle$.

✓ Proverite i ove korake: zar nije lepo raditi sa komutativnom algebrom?

Za *energiju* smo već proverili da važi

$$\langle\phi_c|H|\phi_c\rangle = \langle\phi_{tran}|\, H\,|\phi_{tran}\rangle\,. \tag{5.48}$$

Još ćemo izračunati očekivanu vrednost vektorskog *potencijala* A_μ ,

$$\langle\phi_c|\, A_\mu|\phi_c\rangle = \langle\phi_{tran}|\, R_c A_\mu R^\dagger_c\,|\phi_{tran}\rangle\,. \tag{5.49}$$

Pošto je $R_c A_\mu R^\dagger_c = [R_c, A_\mu]R^\dagger_c + A_\mu R_c R^\dagger_c$, imamo

$$\langle\phi_{tran}|\, R_c A_\mu R^\dagger_c\,|\phi_{tran}\rangle = \langle\phi_{tran}|\, A_\mu\,|\phi_{tran}\rangle + \langle\phi_{tran}|\,[A_\mu, R^\dagger_c]\,|\phi_{tran}\rangle + \langle\phi_{tran}|\,[R_c, A_\mu]R^\dagger_c\,|\phi_{tran}\rangle\,.$$

Znači, treba da izračunamo komutatore $[A_\mu, R^\dagger_c] = [R_c, A_\mu]^\dagger$, odnosno $[L_{\vec{k}}, A_\mu]$. Imamo

$$\begin{aligned}[L_{\vec{q}}, A^\mu] &= \sum_r \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, \epsilon^\mu_{r\vec{k}}\, \left[a_{0\vec{q}} - a_{3\vec{q}},\, a_{r\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{r\vec{k}}{}^\dagger\, e^{ikx}\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left(n^\mu + \frac{q^\mu - (n\cdot q)\, n^\mu}{n\cdot q}\right) e^{iqx}\end{aligned} \tag{5.50}$$

odnosno

$$[L_{\vec{k}}, A_\mu] = -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, \frac{k_\mu}{n\cdot k}\, e^{ikx}\,, \qquad [L^\dagger_{\vec{k}}, A_\mu] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, \frac{k_\mu}{n\cdot k}\, e^{-ikx}\,. \tag{5.51}$$

Oba komutatora su funkcije a ne operatori. Zato je

$$[R_c, A_\mu] = \Big[I + \int d^3k\, c^*(\vec{k})\, L_{\vec{k}} + \iint d^3k\, d^3k'\, c^*(\vec{k},\vec{k}')\, L_{\vec{k}} L_{\vec{k}'} + \dots\, ,\, A_\mu \Big]$$

$$= -\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{k_\mu}{n\cdot k}\, c^*(\vec{k})\, e^{ikx} + \iint d^3k\, d^3k'\, c^*(\vec{k},\vec{k}')\, \big([L_{\vec{k}}, A_\mu]\, L_{\vec{k}'} + L_{\vec{k}}[L_{\vec{k}'}, A_\mu]\big) + \dots$$

Vidimo da svi članovi počevši od drugog sadrže $L_{\vec{k}}$, zbog čega je

$$[R_c, A_\mu]\, |\phi_{tran}\rangle = -\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{k_\mu}{n\cdot k}\, c^*(\vec{k})\, e^{ikx}\, |\phi_{tran}\rangle\,, \tag{5.52}$$

$$\langle\phi_{tran}|\, [A_\mu, R_c^\dagger] = -\langle\phi_{tran}| \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{k_\mu}{n\cdot k}\, c(\vec{k})\, e^{-ikx}\,. \tag{5.53}$$

✠ Proverite, pažljivo, sve korake u gornjim izvođenjima koji su preskočeni.

Koristeći (5.49), dobijamo ukupni rezultat za očekivanu vrednost vektorskog potencijala,

$$\begin{aligned}\langle\phi_c|\, A_\mu\, |\phi_c\rangle &= \langle\phi_{tran}|\, A_\mu\, |\phi_{tran}\rangle - \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{k_\mu}{n\cdot k} \Big(c(\vec{k})\, e^{-ikx} + c^*(\vec{k})\, e^{ikx}\Big) \\ &= \langle\phi_{tran}|\, A_\mu\, |\phi_{tran}\rangle + \partial_\mu f(x) \end{aligned}\tag{5.54}$$

gde je

$$f(x) = i \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{1}{n\cdot k} \Big(c^*(\vec{k})\, e^{ikx} - c(\vec{k})\, e^{-ikx}\Big)\,, \tag{5.55}$$

i

$$\Box f = -i \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \frac{k^2}{n\cdot k} \Big(c^*(\vec{k})\, e^{ikx} - c(\vec{k})\, e^{-ikx}\Big) = 0 \tag{5.56}$$

jer je pod integralom $k^2 = 0$. Tako da smo dobili, zaista, da je razlika očekivanih vrednosti potencijala u stanjima $|\phi_c\rangle$ i odgovarajućem $|\phi_{tran}\rangle$ rezidualna gejdž transformacija.

Znači, Gupta-Bleuler-ovim kvantovanjem smo definisali fizički prostor stanja elektromagnetnog polja $\mathcal{H}_{phys}$ sa pozitivno-definitnim skalarnim proizvodom. On i dalje ima više stanja nego što je neophodno, tj. sadrži stanja koja su ekvivalentna u odnosu na rezidualnu gejdž simetriju.

★ Izračunajte komutator $[H\,, \partial_\mu A^{+\mu}]$. Komentarišite rezultat i njegove implikacije na gornju konstrukciju, i pošaljite!

6 Schwinger-ovo kvantovanje i simetrije

6.1 Schwinger-ovo kvantovanje

Schwinger-ov metod kvantovanja je analogon Weyl-ove kvantizacije u kvantnoj mehanici: iz pretpostavke da su u teoriji realizovane prostorne simetrije, dobijaju se kanonske komutacione relacije. Konkretno, u kvantnoj teoriji polja polazi se od zahteva da je Poincaré-ova grupa reprezentovana u prostoru stanja kvantnih polja.

Zakon transformacije klasičnih polja već smo definisali: pri transformaciji Poincaré-ove grupe datoj elementom (Λ, a), $x' = \Lambda x + a$, klasično polje $\Phi(x)$ transformiše se kao

$$\Phi'(x') = S(\Lambda)\,\Phi(x)\,, \qquad \text{tj.} \quad \Phi'(x) = S(\Lambda)\,\Phi\big(\Lambda^{-1}(x-a)\big)\,. \tag{6.1}$$

U gornjoj formuli oznaka Φ je generička tj. označava proizvoljno polje, dok njegov karakter (skalarno, spinorsko itd.) određuje reprezentacija Lorentz-ove grupe, $S(\Lambda)$. Održani naboji pri Poincaré-ovim transformacijama klasično su dati preko Noether-ine teoreme: npr. za translacije to je tenzor energije-impulsa,

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \Phi}\, \partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu\, \mathcal{L}\,. \tag{6.2}$$

U kvantnoj teoriji stanja sistema $|\phi\rangle$ su opisana linearnim prostorom, a simetrije se reprezentuju unitarnim ili antiunitarnim operatorima, $|\phi\rangle \to \hat{U}(\Lambda, a)\,|\phi\rangle$. Alternativno (a u skladu sa Heisenberg-ovom slikom), operatori simetrije deluju na opservable a stanja se ne menjaju,

$$\hat{\Phi}' = \hat{U}^{-1}(\Lambda, a)\,\hat{\Phi}\,\hat{U}(\Lambda, a)\,, \tag{6.3}$$

odnosno preciznije,

$$\hat{\Phi}'(x) = \hat{U}^{-1}(\Lambda, a)\,\hat{\Phi}(x)\,\hat{U}(\Lambda, a)\,. \tag{6.4}$$

Schwinger-ovo kvantovanje je zahtev da postoji reprezentacija Poincaré-ove grupe $\hat{U}(\Lambda, a)$ na kvantnim poljima koja realizuje klasični zakon transformacije,

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda, a)\,\hat{\Phi}(x)\,\hat{U}(\Lambda, a) = S(\Lambda)\,\hat{\Phi}\big(\Lambda^{-1}(x-a)\big)\,, \tag{6.5}$$

pri čemu su njeni generatori $\hat{P}^\mu$ i $\hat{M}^{\mu\nu}$

$$\hat{U}(\Lambda, a) = e^{i\left(a_\mu \hat{P}^\mu + \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu}\right)} \tag{6.6}$$

dati izrazima koji se iz klasičnih izraza (onih dobijenih iz Noether-ine teoreme) dobijaju zamenom $\Phi \to \hat{\Phi}$, uz eventualno normalno ili drugo uređenje.

U nastavku ćemo u formulama izostaviti kapice iznad operatora jer radimo samo sa kvantnim poljima. Da bismo videli precizno šta Schwinger-ov postulat kvantovanja znači odnosno koje su njegove posledice, razmotrićemo uslov (6.5) za translacije, $\Lambda = I$. Imamo

$$U^{-1}(a)\,\Phi(x)\,U(a) = e^{-ia_\mu P^\mu}\,\Phi(x)\,e^{ia_\nu P^\nu} = \Phi(x-a)\,. \tag{6.7}$$

Iz izraza za malu transformaciju $a_\mu = \epsilon_\mu$, $U(\epsilon) = I + i\epsilon_\mu P^\mu$, i koristeći da razvoj u Taylor-ov red, $\Phi(x-\epsilon) = \Phi(x) - \epsilon_\mu\, \partial^\mu\Phi(x)$, dobijamo kao infinitezimalnu verziju postulata,

$$i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} = [\Phi, P_\mu]\,. \tag{6.8}$$

Za vreme, $x^0 = t$ ovo je zapravo Heisenberg-ov zakon kretanja,

$$i\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} = [\Phi, H]\,. \tag{6.9}$$

Da analiziramo implikacije jednačine (6.8) za realno skalarno polje: pretpostavljajući da znamo klasično dejstvo, generalisani impuls $\pi = \partial_0\Phi$, i tenzor energije-impulsa (3.4-3.7), odnosno energiju i impuls polja,

$$P_0 = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2)\,, \quad P_i = \int d^3r\,\pi\,\partial_i\Phi = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\pi\,\partial_i\Phi + \partial_i\Phi\,\pi)\,, \tag{6.10}$$

pretpostavljajući simetrično uređenje. Komutator na desnoj strani jednačine (6.8) je

$$\begin{aligned}
[\Phi(t,\vec r), P_i(t)] &= \frac{1}{2}\int d^3r'\;\left[\Phi(t,\vec r)\,,\,\pi(t,\vec r\,')\,\partial_i'\Phi(t,\vec r\,') + \partial_i'\Phi(t,\vec r\,')\,\pi(t,\vec r\,')\right] \\
&= \int d^3r'\;\left[\Phi(t,\vec r), \pi(t,\vec r\,')\right]\,\partial_i'\Phi(t,\vec r\,')\,,
\end{aligned} \tag{6.11}$$

ako polje komutira sa svojim prostornim izvodima u istom trenutku t, $[\Phi(t,\vec r)\,,\,\partial_i'\Phi(t,\vec r\,')] = 0$: takva pretpostavka zapravo se svodi na istovremenu merljivost polja u prostorno udaljenim tačkama. Zamenjujući rezultat (6.11) u jednačinu (6.8), dobijamo uslov

$$i\,\partial_i\Phi(x) = \int d^3r'\;\left[\Phi(t,\vec r), \pi(t,\vec r\,')\right]\,\partial_i'\Phi(t,\vec r\,')\,. \tag{6.12}$$

Očigledno rešenje ove jednačine su istovremene komutacione relacije,

$$\left[\Phi(t,\vec r), \pi(t,\vec r\,')\right] = i\,\delta(\vec r - \vec r\,')\,. \tag{6.13}$$

Prema tome: Schwinger-ov uslov da su translacije generisane nabojem P^μ za skalarno polje, implicira kanonsku komutacionu relaciju za polje.

✓ Pokažite da (6.13) sledi i kada se analizira relacija za energiju, (6.9) .

Operatori translacije su dati kao eksponent (kvadratnog izraza),

$$U(a) = e^{ia_\mu P^\mu} = e^{i\,a_\mu \int d^3k\,k^\mu\,a_{\vec k}^{\,\dagger} a_{\vec k}}\,, \tag{6.14}$$

a lako se proverava da je vakuum invarijantan na translacije,

$$U(a)\,|0\rangle = |0\rangle\,. \tag{6.15}$$

✓ Proverite!

Da vidimo šta nam daje analogni račun za spinore. Za Dirac-ovo polje imamo

$$P^0 = \int d^3r\,\bar\psi\,(i\gamma^0\partial_0\,\psi) = -\int d^3r\,\bar\psi\,(i\gamma^i\partial_i - m)\psi\,, \qquad P^i = \int d^3r\,\bar\psi\,(i\gamma^0\partial^i\psi)\,. \tag{6.16}$$

Računajući komutator sa energijom, dobijamo

$$\begin{aligned}
[\psi_\alpha(t,\vec r), P_0(t)] &= -\int d^3r\,\Big[\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\,\gamma^0_{\beta\delta}\,\big(i\gamma^i\partial'_i - m\big)_{\delta\eta}\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\Big]\\
&= -\int d^3r\,\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\}\,\Big(\gamma^0\,\big(i\gamma^i\partial'_i - m\big)\Big)_{\beta\eta}\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\\
&\quad+\int d^3r\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\,\Big(\gamma^0\big(i\gamma^i\partial'_i - m\big)\Big)_{\beta\eta}\,\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\}\,,
\end{aligned}$$

gde smo primenili relaciju za komutator proizvoda, $[A, BC] = \{A, B\}\,C - B\,\{A, C\}$. Pretpostavljajući da je istovremeni antikomutator polja nula, $\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\} = 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}
[\psi_\alpha(t,\vec r), P_0(t)] &= -\int d^3r\,\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\}\,\Big(\gamma^0\,\big(i\gamma^i\partial'_i - m\big)\Big)_{\beta\eta}\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\\
&= -\int d^3r\,\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\}\,\Big(\gamma^0\,\big(i\partial\!\!\!/' - m - i\gamma^0\partial'_0\big)\Big)_{\beta\eta}\,\psi_\eta(t,\vec r\,')\\
&= i\,\partial_0\,\psi_\alpha(t,\vec r)
\end{aligned}$$

ako važi

$$\{\psi_\alpha(t,\vec r)\,,\,\psi^\dagger_\beta(t,\vec r\,')\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec r - \vec r\,')\,. \tag{6.17}$$

Isto rešenje će se dobiti i za relaciju koja daje prostorne translacije.

✠ U prethodnom računu umesto $[A, BC] = \{A, B\}\,C - B\,\{A, C\}$ može da se primeni standardna relacija, $[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C]$. Primenite je, i diskutujte kako će se promeniti rezultat.

6.2 Veza između spina i statistike i mikrokauzalnost

Spinorske antikomutacione relacije smo dobili iz zahteva da energija fermionskog polja bude pozitivna. Osim toga, one daju Pauli-jev princip, a videli smo i da mogu dobiti kao rešenje Schwinger-ovog postulata kvantovanja. Međutim taj postulat, budući da se odnosi na komutatore polja i naboja koji su *bilinearni po poljima*, ima u principu uvek dva rešenja: jedno se izražava preko komutatora, drugo preko antikomutatora polja, pa rešenja nisu jednoznačna.

Međutim antikomutacione relacije su i na drugi način konzistentne sa rešenjima Dirac-ove jednačine: jedino kada fermioni antikomutiraju, dobijamo *mikrokauzalnost* za fermionsko polje. Naime, ako bismo pretpostavili da, umesto antikomutatora, za fermionske operatore kreacije i anihilacije važi

$$[b_{r\vec p}, {b_{r'\vec p'}}^\dagger] = \delta_{rr'}\,\delta(\vec p - \vec p\,')\,, \qquad [d_{r\vec p}, {d_{r'\vec p'}}^\dagger] = \delta_{rr'}\,\delta(\vec p - \vec p\,')\,, \tag{6.18}$$

za komutator polja dobili bismo

$$[\psi_\alpha(x), \bar\psi_\beta(x')] = \iint \sum_{r\,r'} \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{\sqrt{EE'}} \times$$

$$\times \left[b_{r\vec p}\, u_{r\vec p,\alpha}\, e^{-ipx} + d_{r\vec p}{}^\dagger\, v_{r\vec p,\alpha}\, e^{ipx}\, ,\, d_{r'\vec p'}\, \bar v_{r'\vec p',\beta}\, e^{-ip'x'} + b_{r'\vec p'}{}^\dagger\, \bar u_{r'\vec p',\beta}\, e^{ip'x'} \right]$$

$$= \int \sum_r \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{m}{E} \left(u_{r\vec p,\alpha}\, \bar u_{r\vec p,\beta}\, e^{-ip(x-x')} - v_{r\vec p,\alpha}\, \bar v_{r\vec p,\beta}\, e^{ip(x-x')} \right)$$

$$= (i\partial\!\!\!/_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E} \left(e^{-ip(x-x')} + e^{ip(x-x')} \right) = (i\partial\!\!\!/_x + m)_{\alpha\beta}\, i\Delta^{(1)}(x-x')\, .$$

Hadamard–ova funkcija

$$i\Delta^{(1)}(x-x')|_{t=t'} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E} \left(e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')} + e^{-i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')} \right) \neq 0 \tag{6.19}$$

nije nula, tj. polja ψ_α i $\bar\psi_\beta$ ne komutiraju u istom trenutku vremena. To narušava mikrokauzalnost jer, kao posledica ovoga, ni komutatori bilinearnih veličina (struje, naboji) nisu nula u istom trenutku, tj. ne mogu se istovremeno meriti.

✠ Proveriti da slično važi za skalarno polje: ako pretpostavimo da su komutacione relacije izražene antikomutatorom, dobijamo narušenje mikrokauzalnosti.

6.3 Diskretne simetrije

Videli smo da su u slučaju neprekidnih Poincaré-ovih transformacija operatori simetrije $U(\Lambda)$ generisani generatorima koji slede iz Noether-ine teoreme. Da bismo reprezentovali diskretne simetrije: parnost, vremensku inverziju i konjugaciju naboja, jednačinu (6.5) treba da rešimo tj. odredimo $U(\Lambda)$ u svakom konkretnom slučaju, iz odgovarajuće klasične transformacije $S(\Lambda)$.

6.3.1 Prostorna inverzija, skalarno polje

Transformacija prostorne inverzije ili parnosti, $x = (t, \vec r) \to x' = (t, -\vec r) \equiv \tilde x$, deluje na klasično skalarno polje na sledeći način

$$\Phi'(\tilde x) = P\,\Phi(x)\, , \qquad \text{tj.} \quad \Phi'(t, \vec r) = P\,\Phi(t, -\vec r)\, , \tag{6.20}$$

gde je sa $P = S(\Lambda)$ označena parnost klasičnog polja Φ. Ako polje ima samo jednu komponentu, iz uslova $P^2 = I$ sledi da je P broj, $P = \eta_P = \pm 1$.

Označimo sa $\mathcal{P}$ operator koji reprezentuje parnost u prostoru kvantnih polja: on treba da zadovoljava

$$\mathcal{P}^{-1}\, \Phi(x)\, \mathcal{P} = \eta_P\, \Phi(\tilde x)\, . \tag{6.21}$$

U kvantnom slučaju, ako gledamo reprezentacije do na fazni faktor, u principu je $|\eta_P| = 1$. Međutim za realno polje, iz pretpostavke da je $\mathcal{P}$ unitarno, imamo

$$\mathcal{P}^{-1}\,\Phi(x)\,\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}\,\Phi^\dagger(x)\,\mathcal{P} = \eta_P^*\,\Phi(\tilde{x})\,, \tag{6.22}$$

odnosno $\eta_P^* = \eta_P$, pa je opet $\eta_P = \pm 1$. Veličina η_P zove se *unutrašnja parnost* čestice. Ispostavlja se da se i za kompleksno polje operator parnosti može redefinisati tako da vrednosti η_P budu realne.

Operator $\mathcal{P}$ naći ćemo rešavanjem uslova (6.21). Najjednostavnije je da ga rešavamo u impulsnoj reprezentaciji, tj. da prvo odredimo kako parnost deluje na operatore kreacije i anihilacije. Iz razvoja

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left(a_{\vec{k}}\,e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^\dagger\,e^{ikx}\right), \tag{6.23}$$

imamo

$$\mathcal{P}^{-1}\,\Phi(x)\,\mathcal{P} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left(\mathcal{P}^{-1}a_{\vec{k}}\mathcal{P}\,e^{-ikx} + \mathcal{P}^{-1}b_{\vec{k}}^\dagger\mathcal{P}\,e^{ikx}\right), \tag{6.24}$$

$$\eta_P\,\Phi(\tilde{x}) = \eta_P \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left(a_{\vec{k}}\,e^{-ik\tilde{x}} + b_{\vec{k}}^\dagger\,e^{ik\tilde{x}}\right) = \eta_P \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left(a_{-\vec{k}}\,e^{-ikx} + b_{-\vec{k}}^\dagger\,e^{ikx}\right) \tag{6.25}$$

posle smene $\vec{k} \to -\vec{k}$ u poslednjem integralu. Izjednačavajući (6.24) i (6.25) dobijamo uslove

$$\mathcal{P}^{-1}a_{\vec{k}}\,\mathcal{P} = \eta_P\,a_{-\vec{k}}\,, \qquad \mathcal{P}^{-1}b_{\vec{k}}\,\mathcal{P} = \eta_P\,b_{-\vec{k}}\,. \tag{6.26}$$

Ovu jednačinu zadovoljava operator

$$\mathcal{P} = \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\int d^3k\left(a_{\vec{k}}^{\,\dagger}a_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger}b_{-\vec{k}} - \eta_P(a_{\vec{k}}^{\,\dagger}a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger}b_{\vec{k}})\,\right)\right)\,. \tag{6.27}$$

Pre nego što ovo i dokažemo, da izlistamo nekoliko osobina operatora parnosti. Prvo, iz oblika $\mathcal{P}$ se vidi da ne menja vakuum,

$$\mathcal{P}\,|0\rangle = |0\rangle\,. \tag{6.28}$$

Dalje, imamo

$$\mathcal{P}\,|\vec{k}\rangle = \mathcal{P}\,a_{\vec{k}}^{\,\dagger}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\,|0\rangle = \eta_P\,a_{-\vec{k}}^\dagger\,|0\rangle = \eta_P\,|-\vec{k}\rangle\,, \tag{6.29}$$

kao i

$$\mathcal{P}^{-1}\,H\,\mathcal{P} = \int d^3k\,\omega\,\mathcal{P}^{-1}\,(a_{\vec{k}}^{\,\dagger}a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger}b_{\vec{k}})\,\mathcal{P} = \int d^3k\,\omega\,\eta_P^2\,(a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}) = H\,. \tag{6.30}$$

✓ Pokažite: $\mathcal{P}^{-1}\,P_i\,\mathcal{P} = -P_i$, $\mathcal{P}^{-1}\,L_i\,\mathcal{P} = L_i$, P_i i L_i impuls i moment impulsa polja.

Da bismo dokazali da je $\mathcal{P}$ zaista operator parnosti, faktorisaćemo ga na dva, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$,

$$\mathcal{P}_1 = e^{i\alpha A}\,, \qquad A = \int d^3k\left(a_{\vec{k}}^{\,\dagger}a_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger}b_{-\vec{k}}\right), \tag{6.31}$$

$$\mathcal{P}_2 = e^{i\beta B}\,, \qquad B = \int d^3k\,\left(a_{\vec{k}}^{\,\dagger} a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger} b_{\vec{k}}\right). \tag{6.32}$$

Prvo, lako se može proveriti da je

$$[A,B] = 0\,, \qquad \text{pa zato i} \quad [\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2] = 0\,. \tag{6.33}$$

Izračunaćemo $e^{i\alpha A}\,a_{\vec{k}}\,e^{-i\alpha A}$ i $e^{i\alpha A}\,a_{\vec{k}}\,e^{-i\alpha A}$, odnosno pre toga,

$$[A,a_{\vec{q}}\,] = \int d^3k\,[\,a_{\vec{k}}^{\,\dagger} a_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\,\dagger} b_{-\vec{k}}\,,\,a_{\vec{q}}\,] = -a_{-\vec{q}}\,, \qquad [A,b_{\vec{q}}\,] = -b_{-\vec{q}}\,. \tag{6.34}$$

Iz ovih izraza dobijamo

$$\begin{aligned} e^{i\alpha A}\,a_{\vec{k}}\,e^{-i\alpha A} &= a_{\vec{k}} + i\alpha[A,a_{\vec{k}}] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\,[A,[A,a_{\vec{k}}]] + \dots \\ &= a_{\vec{k}} + i\alpha\,(-a_{-\vec{k}}) + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\frac{(i\alpha)^3}{3!}\,(-a_{-\vec{k}}) + \dots \\ &= \cos\alpha\,a_{\vec{k}} - i\,\sin\alpha\,a_{-\vec{k}}\,, \end{aligned} \tag{6.35}$$

i slično za $b_{\vec{k}}$. Za $\alpha = -\pi/2$ imamo

$$\mathcal{P}_1^{-1} a_{\vec{k}}\,\mathcal{P}_1 = -ia_{-\vec{k}}\,, \qquad \mathcal{P}_1^{-1} b_{\vec{k}}\,\mathcal{P}_1 = -ib_{-\vec{k}}\,. \tag{6.36}$$

Problem faktora $-i$ u gornjim relacijama rešava $\mathcal{P}_2$, tj. B. Slično kao gore, iz

$$[B,a_{\vec{q}}\,] = -a_{\vec{q}}\,, \qquad [B,b_{\vec{q}}\,] = -b_{\vec{q}} \tag{6.37}$$

sledi

$$e^{i\beta B}\,a_{\vec{k}}\,e^{-i\beta B} = e^{-i\beta}\,a_{\vec{k}}\,, \qquad e^{i\beta B}\,b_{\vec{k}}\,e^{-i\beta B} = e^{-i\beta}\,b_{\vec{k}} \tag{6.38}$$

pa izborom $e^{i\beta} = i\eta_P = e^{i\,\frac{\pi}{2}\eta_P}$ (što važi za $\eta_P = \pm 1$), dobijamo

$$\mathcal{P}_2^{-1} a_{\vec{k}}\,\mathcal{P}_2 = i\eta_P\,a_{\vec{k}}\,, \qquad \mathcal{P}_2^{-1} b_{\vec{k}}\,\mathcal{P}_2 = i\eta_P\,b_{\vec{k}}\,. \tag{6.39}$$

✓ Proveriti sve sitne korake u prethodnim izvođenjima.

Znači, pokazali smo da za $\alpha = -\pi/2$, $e^{i\beta} = e^{i\,\frac{\pi}{2}\eta_P}$ Važi

$$\mathcal{P}_2^{-1}\mathcal{P}_1^{-1} a_{\vec{k}}\,\mathcal{P}_1\,\mathcal{P}_2 = -i\mathcal{P}_2^{-1} a_{-\vec{k}}\,\mathcal{P}_2 = \eta_P\,a_{-\vec{k}}\,, \tag{6.40}$$

i slično za $b_{\vec{k}}$: operator (6.27) zaista zadovoljava uslove (6.26). Primetimo da, grubo rečeno (do na faktore i imaginarne jedinice) $\mathcal{P}$, ima prirodnu strukturu: u njegovom eksponentu je zbir bilinearnih operatora $a_{\vec{k}}^{\,\dagger} a_{\vec{k}}$, koji stanje impulsa $-\vec{k}$ zamenjuje stanjem suprotnog impulsa, $\vec{k}$.

6.3.2 Konjugacija naboja, skalarno polje

Račun koji smo izveli u prethodnom odeljku daje i opštu ideju, i tehničke detalje konstrukcije operatora diskretnih simetrija kod kvantnih polja. Zato ćemo u nastavku uglavnom preskočiti detalje izvođenja, jer su često repetitivni, i uz poneku napomenu dati rezultate za ostale simetrije.

Operator konjugacije naboja $\mathcal{C}$ za skalarno polje treba da Φ transformiše u $\Phi^\dagger$,

$$\mathcal{C}^{-1}\Phi\,\mathcal{C} = \eta_C\,\Phi^\dagger\,, \qquad \mathcal{C}^{-1}\Phi^\dagger\mathcal{C} = \eta_C^*\,\Phi\,. \tag{6.41}$$

Kao ranije, može da se ume da je η_C realno, $\eta_C = \pm 1$. Ispostavlja se da $\mathcal{C}$ može da se realizuje kao unitarni operator. Iz relacije

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(\mathcal{C}^{-1} a_{\vec{k}}\, \mathcal{C}\, e^{-ikx} + \mathcal{C}^{-1} b^\dagger_{\vec{k}}\, \mathcal{C}\, e^{ikx} \right) = \eta_C \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(b_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a^\dagger_{\vec{k}}\, e^{ikx} \right) \tag{6.42}$$

zaključujemo (što je i logično) da $\mathcal{C}$ prevodi operatore kreacije (i anihilacije) za čestice u ogovarajuće operatire za antičestice,

$$\mathcal{C}^{-1} a_{\vec{k}}\, \mathcal{C} = \eta_C\, b_{\vec{k}}\,, \qquad \mathcal{C}^{-1} b_{\vec{k}}\, \mathcal{C} = \eta_C^*\, a_{\vec{k}}\,. \tag{6.43}$$

Može se pokazati da je

$$\mathcal{C} = \exp\left(-\frac{i\pi}{2} \int d^3k \left(b_{\vec{k}}{}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}{}^\dagger b_{\vec{k}} - \eta_C (a_{\vec{k}}{}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}{}^\dagger b_{\vec{k}}) \right) \right)\,. \tag{6.44}$$

U eksponentu je opet bilinearni operator koji u stanjima polja anihilira čestice impulsa $\vec{k}$ i kreira antičestice istog impulsa i obrnuto, tj. 'pretvara čestice u antičestice'. Važi takođe

$$\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle\,, \qquad \mathcal{C}^{-1} P^\mu\, \mathcal{C} = P^\mu\,, \qquad \mathcal{C}Q = -Q\,\mathcal{C}\,. \tag{6.45}$$

✓ Pokažite gornje relacije.

6.3.3 Vremenska inverzija, skalarno polje

Vremenska inverzija, $x=(t,\vec{r}) \;\to\; x'=(-t,\vec{r})=-\tilde{x}$, se, kao kvantnoj mehanici, reprezentuje antiunitarnim operatorom $\mathcal{T}$, i to iz istog razloga: pri vremenskoj inverziji generalisani impuls polja $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_0\Phi}$ menja znak, pa znak mora da promeni i desna strana kanonske komutacione relacije – a to je moguće samo kompleksnom konjugacijom imaginarne jedinice i .

Da konstruišemo antiunitarni $\mathcal{T}$ koji zadovoljava

$$\mathcal{T}^{-1}\,\Phi(x)\,\mathcal{T} = \eta_T\,\Phi(-\tilde{x})\,. \tag{6.46}$$

Razvijajući skalarno polje po modama, imamo

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\, \mathcal{T}^{-1}\big(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + b^\dagger_{\vec{k}}\, e^{ikx}\big)\mathcal{T} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \Big((\mathcal{T}^{-1} a_{\vec{k}} \mathcal{T})\, e^{ikx} + (\mathcal{T}^{-1} b^\dagger_{\vec{k}} \mathcal{T})\, e^{-ikx} \Big),$$

a sa druge strane,

$$\eta_T\, \Phi(-\tilde{x}) = \eta_T \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \big(a_{\vec{k}}\, e^{ik\tilde{x}} + b^\dagger_{\vec{k}}\, e^{-ik\tilde{x}}\big) = \eta_T \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \big(a_{-\vec{k}}\, e^{ikx} + b^\dagger_{-\vec{k}}\, e^{-ikx}\big)\,.$$

Odavde sledi delovanje na operatore kreacije i anihilacije,

$$\mathcal{T}^{-1} a_{\vec{k}}\, \mathcal{T} = \eta_T\, a_{-\vec{k}}\,, \qquad \mathcal{T}^{-1} b_{\vec{k}}\, \mathcal{T} = \eta_T\, b_{-\vec{k}}\,. \tag{6.47}$$

Ovaj uslov se poklapa sa uslovom (6.26) za operator parnosti $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}$ i $\mathcal{T}$ deluju (na $a_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$) isto, samo što je $\mathcal{T}$ antiunitaran pa sadrži i kompleksnu konjugaciju.

6.3.4 CPT teorema

CPT teorema glasi: za svaku lokalnu kvantnu teoriju polja koja je opisana hermitskim lagranžijanom $\mathcal{L}(x)$ invarijantnim na pravu ortohronu Lorentz-ovu grupu, čiji operatori polja zadovoljavaju vezu između spina i statistike, operator $\Theta = \mathcal{CPT}$ je takođe simetrija, i važi

$$\Theta^{-1} \mathcal{L}(x)\, \Theta = \mathcal{L}(-x)\,. \tag{6.48}$$

✓ Pokazati da je za kompleksno skalarno polje $\Theta^{-1}\Phi(x)\,\Theta = \eta_C \eta_P \eta_T\, \Phi^\dagger(-x)$, i proveriti da (6.48) važi za lagranžijan slobodnog polja.

Iako su $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ i $\mathcal{T}$ u prirodi pojedinačno narušene (narušenje parnosti je prvi put eksperimentalno pokazano 1956. u β-raspadu, a narušenje $\mathcal{CP}$ 1964. u raspadima K-mezona, smatra se da je $\mathcal{CPT}$ simetrija očuvana u prirodi: iz nje između ostalog sledi da su mase i poluvremena raspada čestica i antičestica jednaki. Teorema se dokazuje konstrukcijom operatora diskretnih simetrija za skalarno, spinorska i gradijentna polja, i proverom transformacionih osobina članova u lagranžijanu.

7 Interagujuća polja i S-matrica

Do sada smo analizirali slobodna polja i njihovo kvantovanje, i izgradili (uz dodatke i proširenja) konzistentnu sliku koja se bazira na kanonskom kvantovanju. Međutim, nas zapravo zanimaju interagujuće teorije, počevši od kvantne elektrodinamike pa dalje. Zapravo, neinteragujuća teorija i ne može da se proveri u eksperimentu jer se svako merenje bazira na interakciji. Za fiziku na visokim energijama relevantni su sudari i raspadi čestica: mere se preseci sudara, tj. matrični elementi matrice rasejanja (S-matrice).

Kako da se definiše kvantovanje, tj. prostor stanja i operatori u interagujućoj teoriji? Formalizam slobodne teorije bazira se na mogućnosti razvoja klasičnog polja, opšteg rešenja jednačine kretanja, po ravnim talasima,

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega}} \left(a_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^{\,\dagger}\, e^{ikx} \right), \tag{7.1}$$

i kvantovanju amplituda polja $a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^{\,\dagger}$ (koje ne zavise od vremena) preko algebre operatora kreacije i anihilacije. Ovakav pristup moguć je i u opštijem slučaju, kod linearnih jednačina čija partikularna rešenja nisu ravni talasi. Međutim kod interagujućih teorija klasične jednačine kretanja su nelinearne, tako da egzistencija opšteg rešenja nije garantovana, pa ni čestična interpretacija koja se standardno definiše pomoću $a_{\vec{k}}$ i $a_{\vec{k}}^{\,\dagger}$. Drugim rečima, nije jasno kako da se konstruiše prostor stanja polja ili dokaže da njegova konzistentna reprezentacija postoji.

Ima više sistematskih pristupa koji pokušavaju da reše ove probleme kvantne teorije polja. Jedan od njih je aksiomatska kvantna teorija polja, koja postulira postojanje prostora stanja za interagujuća polja i algebarski definiše i analizira pojmove kauzalnosti i lokalnosti, aksiomatski uvodi S-matricu i njen formalni razvoj po parametru. U LSZ formalizmu (Lehmann, Symanzik, Zimmermann) pretpostavlja se asimptotska kompletnost teorije tj. veza između slobodne i neinteragujuće teorije u asimptotskoj oblasti,

$$\lim_{t\to-\infty} \hat{\Phi}(x) = \sqrt{Z}\, \hat{\Phi}_{in}(x), \tag{7.2}$$

i ekvivalentnost odgovarajućih prostora stanja: Z je funkcija koja daje tu vezu, tzv. renormalizaciju polja. U principu, pitanje kvantovanja opšte interagujuće teorije polja je veoma kompleksan matematički problem koji nije u potpunosti rešen, a navedeni pristupi dali su značajne uvide u osobine i strukturu kvantne teorije.

Rezultati o verovatnoćama prelaza i presecima rasejanja dobijaju se perturbativno. U kvantnoj teoriji polja ima razume se i neperturbativnih rezultata koji su i od konceptualnog i od konkretnog fizičkog značaja (konformne teorije polja, 2d Yang-Mills, neperturbativni rezultati kvantne hromodinamike). Račun u teoriji perturbacija polazi od neinteragujućeg polja koje je kvantovano, a interakcioni član u hamiltonijanu (koji je proporcionalan konstanti veze g) tretira se perturbativno. To znači da pretpostavljamo *i)* da u fizički relevantnim slučajevima postoji limes slabe veze, i *ii)* analitičnost ili slabu neanalitičnost u okolini $g = 0$. U stvari, Dyson je 1953. pokazao da amplitude u $g = 0$ imaju esencijalni singularitet tj. uvek postoje neperturbativni doprinosi, a stepeni redovi po konstanti veze su asimptotski.

Mi nećemo ni pokušavati da opišemo ove teorijske probleme. Koristićemo naivni račun baziran na pretpostavci unitarne ekvivalentnosti interagujuće i neinteragujuće teorije, i opravdanosti perturbativnog računa: formule teorije perturbacija izvešćemo u *interakcionoj slici*. Problem će se ispoljiti tako što se u računu dobijaju beskonačni članovi, a rešava se regularizacijom, pa renormalizacijom teorije. Fizičko opravdanje za ovakav pristup, osim njegove relativne jednostavnosti, je fantastična preciznost sa kojom su dobijeni rezultati u kvantnoj elektrodinamici i standardnom modelu eksperimentalno provereni.

7.1 Interakciona slika

Izvešćemo formule za interakcionu sliku onako kako se izvode u kvantnoj mehanici i primeniti u teoriji polja: polazne jednačine su iste. Slobodna polja smo opisivali u Heisenberg-ovoj slici: ona su operatori koji zavise od vremena i evoluiraju po jednačini (6.9),

$$i\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} = [\Phi, H]\,, \tag{7.3}$$

a stanja $|\phi\rangle$ ne zavise od vremena.

Da bismo razlikovali Heisenberg-ovu, Schrödinger-ovu i Dirac-ovu (interakcionu) sliku, uvešćemo detaljnije oznake. Stanja ćemo u ovim slikama označavati sa $|\phi\rangle_H$, $|\phi\rangle_S$, $|\phi\rangle_I$, a operatore sa M_H, M_S i M_I. Ukupni hamiltonijan H je zbir hamiltonijana slobodnog polja H_0 i interakcionog hamiltonijana H_1,

$$H = H_0 + H_1\,. \tag{7.4}$$

U Schrödinger-ovoj slici važi

$$\begin{aligned}
&|\phi(t)\rangle_S = U_S(t)\,|\phi(0)\rangle_S\,, && M_S(t) = M_S(0)\\
&i\,\frac{\partial\,|\phi\rangle_S}{\partial t} = H_S|\psi\rangle_S\,, && i\,\frac{\partial M_S}{\partial t} = 0\\
&i\,\frac{\partial U_S}{\partial t} = H_S\,U_S\,, && \text{ako}\quad H \neq H(t)\,,\quad U_S = e^{-iHt}\,.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Heisenberg-ova slika se dobija iz Schrödinger-ove unitarnom transformacijom operatorom $U_S^{-1}(t)$: u njoj važi

$$\begin{aligned}
&|\phi(t)\rangle_H = |\phi(0)\rangle_H = U_S^{-1}(t)\,|\phi(t)\rangle_S\,, && M_H(t) = U_S^{-1}(t)\,M_H(0)\,U_S(t) = U_S^{-1}(t)\,M_S\,U_S(t)\\
&i\,\frac{\partial\,|\phi\rangle_H}{\partial t} = 0\,, && i\,\frac{\partial M_H}{\partial t} = [M_H, H_H]\,.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Interakciona slika se dobija iz Schrödinger-ove transformacijom operatorom e^{iH_0t}, i važi

$$
\begin{aligned}
&|\phi(t)\rangle_I = e^{iH_0t}\,|\phi(t)\rangle_S = e^{iH_0t}\,U_S(t)\,|\phi\rangle_H\,, \qquad && M_I(t) = e^{iH_0t}\,M_S\,e^{-iH_0t} \\
&i\,\frac{\partial\,|\phi\rangle_I}{\partial t} = H_{1,I}\,|\phi(t)\rangle_I\,. && i\,\frac{\partial M_I}{\partial t} = [M_I, H_{0,I}]\,.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

✓ Proverite, iz definicije interakcione slike, poslednje dve formule.

Formula (7.7) nam kaže da *u interakcionoj slici operatori evoluiraju po slobodnom hamiltonijanu, a stanja po interakcionom.* Pri tome je početni uslov za slike $|\phi(0)\rangle_S = |\phi(0)\rangle_H = |\phi(0)\rangle_I$, $M_S(0) = M_H(0) = M_I(0)$.

7.2 Dyson-ov razvoj

Interagujuća polja kvantujemo koristeći interakcionu sliku, u kojoj operatori polja evoluiraju po slobodnom hamiltonijanu: zato polja možemo da kvantujemo kao slobodna polja.

Da preciziramo detalje, odnosno izvedemo sve relevantne formule u interakcionoj slici. Hamiltonijan slobodnog polja H_0 (koristimo generičku oznaku Φ za polje mada ono može biti i spinorsko ili elektromagnetno) svodi se na zbir hamiltonijana neinteragujućih harmonijskih oscilatora. Zbog toga se polje polje može razviti po ravnim talasima: u Schrödingerovoj slici,

$$
\Phi_S = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega}}\left(a_{\vec{k},S}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^\dagger_{\vec{k},S}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right). \tag{7.8}
$$

U interakcionoj slici operatori evoluiraju po slobodnom hamiltonijanu $H_{0,S}$,

$$
H_{0,S} = \int d^3k\,\omega\,a^\dagger_{\vec{k},S}a_{\vec{k},S}\,, \tag{7.9}
$$

pa, uz početni uslov $a_{\vec{k},I}(0) = a_{\vec{k},S}$, $\Phi_I(0) = \Phi_S$, dobijamo

$$
a_{\vec{k},I}(t) = e^{iH_{0,S}t}\,a_{\vec{k},S}\,e^{-iH_{0,S}t} = e^{-i\omega t}\,a_{\vec{k},S}\,, \tag{7.10}
$$

$$
\Phi_I(t) = e^{iH_{0,S}t}\,\Phi_S\,e^{-iH_{0,S}t} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega}}\left(a_{\vec{k},S}\,e^{-ikx} + a^\dagger_{\vec{k},S}\,e^{ikx}\right). \tag{7.11}
$$

✓ Proverite ove dve formule.

Fock-ov prostor stanja i vakuum definišu se standardno, kao za slobodno polje. Stanja, sa druge strane, evoluiraju po zakonu

$$
i\,\frac{\partial\,|\phi(t)\rangle_I}{\partial t} = H_{1,I}(t)\,|\phi(t)\rangle_I\,. \tag{7.12}
$$

Radi jednostavnosti notacije, u nastavku ćemo označiti

$$
H_{1,I}(t) \equiv H(t) = e^{iH_0t}\,H_{1,S}\,e^{-iH_0t}\,, \quad \text{i} \tag{7.13}
$$

$$|\phi(t)\rangle_I = U(t)\,|\phi(0)\rangle_I\,, \qquad i\,\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)\,U(t)\,, \tag{7.14}$$

gde se poslednja relacija direktno proverava iz zakona kretanja u interakcionoj slici: operator $U(t) \equiv U(t,0)$ je evolucioni operator. Interakcioni hamiltonijan $H(t)$ zavisi od vremena jer $H_{0,S}$ i $H_{1,S}$ u principu ne komutiraju: zbog toga jednačina (7.14) za $U(t)$ ne može da se reši eksplicitno, eksponencijalnom funkcijom. Nju ćemo rešavati perturbativno.

U prvom koraku, jednačinu prepisujemo kao integralnu,

$$U(t) = I - i\int_0^t H(t_1)\,U(t_1)\,dt_1 \tag{7.15}$$

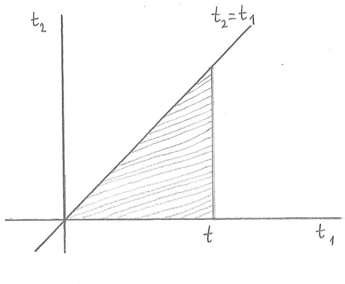
pri čemu smo fiksirali početni uslov $U(0) = I$. Ako pretpostavimo da je drugi član u ovoj jednačini mali (jer je interakcija, $|H_1| \ll |H_0|$), jednačinu možemo da rešavamo u duhu teorije perturbacija, iterativno. Na sličan način smo rešavali jednačinu za Dirac-ovu talasnu funkciju u prošlom semestru. Dobijamo rešenje

$$\begin{aligned} U(t) &= I - i\int_0^t H(t_1)\,dt_1 + (-i)^2\int_0^t H(t_1)dt_1\int_0^{t_1} H(t_2)\,dt_2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\dots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\,H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)\,, \end{aligned} \tag{7.16}$$

gde u poslednjem redu, zbog granica, vremenski argumenti $H(t_i)$ u proizvodu opadaju.

Da bi se izbegle promenljive gornje granice u integralima u gornjoj formuli, članovi reda se mogu reorganizovati, odnosno drugačije napisati: videćemo to na primeru kvadratnog člana. Ako u njemu zamenimo redosled integracija po t_1 i t_2, imamo

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\,H(t_1)H(t_2) = \int_0^t dt_2\int_{t_2}^t dt_1\,H(t_1)H(t_2) = \int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\,H(t_2)H(t_1)\,, \tag{7.17}$$



pa kad saberemo ova dva (ista) izraza, dobijamo integral zapisan preko vremenski uređenog proizvoda,

$$2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\,H(t_1)H(t_2) = \int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\;T\Big(H(t_1)H(t_2)\Big)\,.$$

Slično, indukcijom se za proizvoljno n dobija

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\dots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\,H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n) = \frac{1}{n!}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\dots\int_0^t dt_n\,T\Big(H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)\Big)\,. \tag{7.18}$$

Prema tome, operator evolucije $U(t)$ dat je *Dyson-ovim razvojem*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n \; T\Big(H(t_1)\ldots H(t_n)\Big) = T\Big(e^{-i\int_0^t dt_1\, H(t_1)}\Big)\,. \tag{7.19}$$

U teoriji rasejanja računamo verovatnoće prelaza iz *in*-stanja, $t = -\infty$ u *out*-stanja, $t = +\infty$: S-matrica je evolucioni operator $U(-\infty, \infty)$,

$$S = U(-\infty,\infty) = T\Big(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H(t)}\Big) = T\Big(e^{-i\int d^4x\,\mathcal{H}}\Big)\,, \tag{7.20}$$

gde je $\mathcal{H}$ gustina interakcionog hamiltonijana.

Mi ćemo u nastavku primeniti Dyson-ov razvoj na dva sistema. Prvi je *kvantna elektrodinamika,*

$$\mathcal{L}_0 = :\bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\psi : - : \frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) : \tag{7.21}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{H}_1 \equiv -\mathcal{H} = - : e\bar{\psi}\, A\!\!\!/\, \psi : \tag{7.22}$$

a drugi je *skalarna* Φ^4*-teorija,*

$$\mathcal{L}_0 = : \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) : - : \frac{1}{2}\, m^2\Phi^2 : \tag{7.23}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{H}_1 \equiv -\mathcal{H} = - : \frac{\lambda}{4!}\,\Phi^4 : \tag{7.24}$$

7.3 S-matrica i procesi rasejanja

Razvoj po konstanti interakcije i Dyson-ova formula za računanje S-matrice su pogodni, ili izvedeni, za izračunavanje efikasnih preseka u sudarima i raspadima, zbog toga što je neperturbovani hamiltonijan H_0 oko koga se razvoj vrši hamiltonijan slobodnog polja. U prethodnom odeljku smo izveli formulu za matricu rasejanja

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \iint d^4x_1 \ldots d^4x_n \; T\Big(:\mathcal{H}(x_1): \;\ldots\; :\mathcal{H}(x_n): \Big)\,. \tag{7.25}$$

U ovom izrazu svi interakcioni hamiltonijani $:\mathcal{H}(x):$ su normalno uređeni; proporcionalni su konstanti interakcije λ ili e, tako da je n-ti stepen u razvoju matrice rasejanja u stvari n-ti stepen po konstanti veze. $\mathcal{H}$ je trećeg ili višeg reda po poljima i zato se u sudarima broj čestica u principu ne održava.

Iz izraza za $\mathcal{H}$ dobijamo verovatnoće prelaza. Računanje pojedinih doprinosa iz razvoja (7.25) može se sistematizovati, jer u računu tipično figurišu ravni talasi koji se integrale u

δ-funkciju, i vremenski uređeni proizvodi polja koji se izražavaju preko propagatora slobodnih polja. Sistematizacija odnosno algoritam za računanje različitih perturbativnih doprinosa S-matrici dat je *Feynman-ovim pravilima*. Da bi se ona izvela potrebno je naći, opet sistematski, način kako da se izračunaju vremenski uređeni proizvodi više polja: njega daju *Wick-ove teoreme*. Pre nego što izvedemo (odnosno pokažemo kako se izvode) Feynmanova pravila, a da bismo razumeli strukturu računa i ideju njegovog pojednostavljenja, primenićemo Dyson-ov razvoj na realno skalarno polje π^0-mezona opisano Φ^4 teorijom i izračunati, u najnižem redu teorije perturbacija, verovatnoću rasejanja $\pi^0\pi^0 \to \pi^0\pi^0$.

Lagranžijan teorije smo dali, (7.23-7.24),

$$\mathcal{L} = :\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - \frac{1}{2}\,m^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\Phi^4 : \tag{7.26}$$

Ako pretpostavimo da upadno i izlazno stanje piona imaju fiksirane impulse,

$$|i\rangle = |\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle = a^\dagger_{\vec{k}_1} a^\dagger_{\vec{k}_2}\,|0\rangle\,, \qquad |f\rangle = |\vec{k}'_1\vec{k}'_2\rangle = a^\dagger_{\vec{k}'_1} a^\dagger_{\vec{k}'_2}\,|0\rangle\,, \tag{7.27}$$

u nultom i prvom redu za verovatnoću prelaza dobijamo

$$\langle f|\,S^{(0)} + S^{(1)}\,|i\rangle = \langle\vec{k}'_1\vec{k}'_2|\;I + \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\;T\Big(\,:(\Phi^+ + \Phi^-)^4:\,\Big)\,|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle\;. \tag{7.28}$$

Da odredimo nulti red. Imamo

$$\langle f|\,S^{(0)}\,|i\rangle = \langle 0|\,a_{\vec{k}'_1}\,a_{\vec{k}'_2}\,a^\dagger_{\vec{k}_1}\,a^\dagger_{\vec{k}_2}\,|0\rangle\,, \tag{7.29}$$

i da bismo našli ovu očekivanu vrednost, operatore anihilacije treba da prokomutiramo skroz na desno da deluju na vakuum i daju nulu:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}'_1}\,a_{\vec{k}'_2}\,a^\dagger_{\vec{k}_1}\,a^\dagger_{\vec{k}_2} &= a_{\vec{k}'_1}\big([a_{\vec{k}'_2}, a^\dagger_{\vec{k}_1}] + a^\dagger_{\vec{k}_1}\,a_{\vec{k}'_2}\big)a^\dagger_{\vec{k}_2} = \delta(\vec{k}'_2 - \vec{k}_1)\,a_{\vec{k}'_1}\,a^\dagger_{\vec{k}_2} + a_{\vec{k}'_1}\,a^\dagger_{\vec{k}_1}\,a_{\vec{k}'_2}\,a^\dagger_{\vec{k}_2} = \\ &= \delta(\vec{k}'_2 - \vec{k}_1)\big(\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_1) + a^\dagger_{\vec{k}_2}\,a_{\vec{k}'_1}\big) + \big(\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) + a^\dagger_{\vec{k}_1}\,a_{\vec{k}'_1}\big)\big(\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) + a^\dagger_{\vec{k}_2}\,a_{\vec{k}'_2}\big)\,. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Vakuumska očekivana vrednost gornjeg izraza je

$$\langle f|\,S^{(0)}\,|i\rangle = \delta(\vec{k}'_2 - \vec{k}_1)\,\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_1) + \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1)\,\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2)\,. \tag{7.31}$$

Rezultat je simetričan po $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ (takođe i po $\vec{k}'_1$ i $\vec{k}'_2$), jer su stanja $|i\rangle$ i $|f\rangle$ simetrična na izmenu čestica: skalarno polje je bozonsko.

✓ Proverite korake u gornjem izvođenju.

U prvom redu teorije perturbacija treba izračunati

$$\langle f|\,S^{(1)}\,|i\rangle = \langle\vec{k}'_1\vec{k}'_2|\,\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\Big((\Phi^+)^4 + 4\Phi^-(\Phi^+)^3 + 6(\Phi^-)^2(\Phi^+)^2 + 4(\Phi^-)^3\Phi^+ + (\Phi^-)^4\Big)\,|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle\,,$$

gde je normalno uređenje eksplicitno ispisano, a vremenskog uređenja nema jer u prvom redu postoji samo jedan argument x^μ. Da proanaliziramo članove u gornjem zbiru. Na primer prvi,

$$\langle \vec{k}_1' \vec{k}_2' | \int d^4x \, (\Phi^+)^4 \, | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \int d^4x \iiiint \frac{d^3q_1 \dots d^3q_4}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_4}} \, e^{-i(q_1+q_2+q_3+q_4)x}$$

$$\times \langle 0 | \, a_{\vec{k}_1'} \, a_{\vec{k}_2'} \, a_{\vec{q}_1} \, a_{\vec{q}_2} \, a_{\vec{q}_3} \, a_{\vec{q}_4} \, a^\dagger_{\vec{k}_1} \, a^\dagger_{\vec{k}_2} \, | 0 \rangle \, . \tag{7.32}$$

Ovaj član je nula. To se lako vidi ako primenimo poznatu strategiju da operatore anihilacije 'pomerimo' na desno do vakuuma (i onda iskoristimo da je $a|0\rangle = 0$), odnosno operatore anihilacije na levo ($\langle 0 | a^\dagger = 0$). Proizvod operatora u (7.32) ima šest operatora anihilacije i dva operatora kreacije: pri 'pomeranju' operatora kreacije na levo (primenom odgovarajućih komutacionih relacija) imamo maksimalno dva komutatora $[a, a^\dagger]$ koji daju δ-funkciju, smanjujući ukupni broj operatora u izrazu. Ostaje proizvod četiri operatora anihilacije, pa je vakuumska očekivana vrednost, jasno, nula.

Iz gornjeg računa odnosno rezonovanja se vidi da su jedini članovi koji imaju nenultu vakuumsku očekivanu vrednost, oni koji imaju isti broj operatora kreacije i anihilacije (istog tipa). U našem slučaju, to je član

$$\langle \vec{k}_1' \vec{k}_2' | \int d^4x \, (\Phi^-)^2 (\Phi^+)^2 \, | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \int d^4x \iiiint \frac{d^3q_1 \dots d^3q_4}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_4}} \, e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x}$$

$$\times \langle 0 | \, a_{\vec{k}_1'} \, a_{\vec{k}_2'} \, a^\dagger_{\vec{q}_1} \, a^\dagger_{\vec{q}_2} \, a_{\vec{q}_3} \, a_{\vec{q}_4} \, a^\dagger_{\vec{k}_1} \, a^\dagger_{\vec{k}_2} \, | 0 \rangle \, . \tag{7.33}$$

Na osnovu (7.30) znamo da je

$$\begin{aligned} a_{\vec{q}_3} \, a_{\vec{q}_4} \, a^\dagger_{\vec{k}_1} \, a^\dagger_{\vec{k}_2} \, |0\rangle &= \big(\delta(\vec{q}_4 - \vec{k}_1) \, \delta(\vec{q}_3 - \vec{k}_2) + \delta(\vec{q}_3 - \vec{k}_1) \, \delta(\vec{q}_4 - \vec{k}_2) \big) |0\rangle \\ \langle 0 | \, a_{\vec{k}_1'} \, a_{\vec{k}_2'} \, a^\dagger_{\vec{q}_1} \, a^\dagger_{\vec{q}_2} &= \langle 0 | \, \big(\delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_2') \, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_1') + \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_1') \, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_2') \big) \, , \end{aligned} \tag{7.34}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \langle f | \, S^{(1)} \, | i \rangle &= \frac{\lambda}{4!} \, 6 \int d^4x \iiiint \frac{d^3q_1 \dots d^3q_4}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_4}} \, e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x} \\ &\times \big(\delta(\vec{q}_4 - \vec{k}_1) \, \delta(\vec{q}_3 - \vec{k}_2) + \delta(\vec{q}_3 - \vec{k}_1) \, \delta(\vec{q}_4 - \vec{k}_2) \big) \big(\delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_2') \, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_1') + \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_1') \, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_2') \big) \\ &= \frac{\lambda}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_4}} \, \delta(\vec{k}_1' + \vec{k}_2' - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \, . \end{aligned}$$

✠ Izračunajte pažljivo sve korake u gornjem izrazu i proverite da je rezultat tačan.

Iz gornjeg računa (i ranije izvedenih formula) možemo da vidimo sledeće: teorija perturbacija je određena interakcionim hamiltonijanom $\mathcal{H}$ koji definiše osnovni *verteks* (vertekse) interakcije: po pravilu radimo sa interakcijama koje su stepeni polja tj. monomi: verteks ima onoliko linija koliko ima polja, i 'nosi' jednu konstantu veze. Doprinosi koje smo izračunali za sudar $\pi^0 \pi^0 \to \pi^0 \pi^0$, odnosno procesi koji doprinose matrici rasejanja u nultom i prvom redu, mogu se grafički prikazati kao

U Φ^4 teoriji verteks ima 4 linije, a 'elementarni procesi' u teoriji odgovaraju kombinacijama četiri polja Φ^+ i Φ^- :

	$\frac{\lambda}{4!}\,(\Phi^+)^4$	anihilacija 4 piona
	$\frac{\lambda}{4!}\,4(\Phi^-)(\Phi^+)^3$	anihilacija 3, kreacija 1 piona
	$\frac{\lambda}{4!}\,6(\Phi^-)^2(\Phi^+)^2$	anihilacija 2, kreacija 2 piona
	$\frac{\lambda}{4!}\,4(\Phi^-)^3(\Phi^+)$	anihilacija 1, kreacija 3 piona
	$\frac{\lambda}{4!}\,(\Phi^-)^4$	kreacija 4 piona

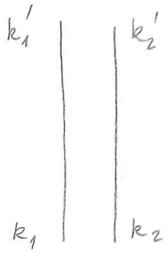
U gornjim crtežima (kao i ostalim koje ćemo koristiti) vremenska osa je vertikalna. Od nacrtanih, samo srednji proces ima nenultu vakuumsku očekivanu vrednost tj. *nije virtuelan*. Svi procesi mogu biti deo Feynman-ovih dijagrama.

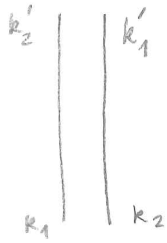
7.4 Wick-ova teorema

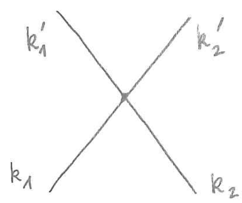
⁎ nedelja od 13. do 20. maja 2020.

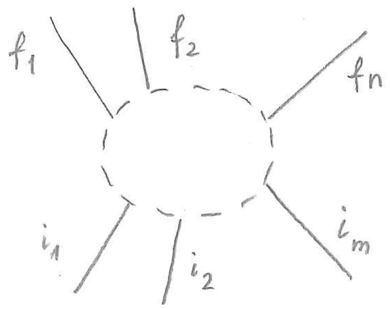
Verovatnoće prelaza u sudarima su matrični elementi S-matrice, tipični matrični element koji treba da izračunamo je

$$S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle 0|\, a_{f_1} \dots a_{f_n}\, S\, a^\dagger_{i_1} \dots a^\dagger_{i_m}\, |0\rangle$$









$$= \langle 0| \, a_{f_1} \dots a_{f_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \iint d^4x_1 \dots d^4x_k \; T\big(:\mathcal{H}(x_1): \; \dots \; :\mathcal{H}(x_k): \big) \; a^\dagger_{i_1} \dots a^\dagger_{i_m} \, |0\rangle \, .$$

Drugim rečima, računamo *vakuumske očekivane vrednosti* proizvoda operatora kreacije i anihilacije, pri čemu su operatori unutar S-matrice vremenski i normalno uređeni. Metod da se ovakvi proizvodi nađu daje Wick-ova teorema. Mi ćemo je u nastavku objasniti, a zatim formulisati: precizan dokaz je dugačak i pravolinijski.

Razmotrimo najjednostavniji slučaj proizvoda dva skalarna polja

$$\Phi(x_1)\,\Phi(x_2) = \big(\Phi^+(x_1) + \Phi^-(x_1)\big)\big(\Phi^+(x_2) + \Phi^-(x_2)\big) \tag{7.35}$$
$$= :\Phi(x_1)\,\Phi(x_2): + \big[\Phi^+(x_1)\,,\Phi^-(x_2)\big] = :\Phi(x_1)\,\Phi(x_2): + \, i\Delta^+(x_1 - x_2)\,.$$

Vidimo da je proizvod dva polja = normalno uređen priozvod + c-broj (funkcija). U opštem slučaju, za dva operatora $A(t_1)$ i $B(t_2)$ važi

$$AB = :AB: + \langle 0|AB\,|0\rangle\,, \tag{7.36}$$

i takođe

$$T\big(AB\big) = :AB: \, + \langle 0|\,T\big(AB\big)\,|0\rangle = :AB: + \underbracket{AB} \tag{7.37}$$

za $t_1 \neq t_2$. Izraz

$$\underbracket{AB} \equiv \langle 0|\,T\big(AB\big)\,|0\rangle \tag{7.38}$$

zove se *kontrakcija* ili *sparivanje* operatora A i B. Ako su A i B operatori polja, sparivanje daje *propagator slobodnog polja*. Nenulte kontrakcije za ranije uvedena polja su

$$\underbracket{\Phi(x_1)\Phi^\dagger}(x_2) = \underbracket{\Phi^\dagger(x_2)\Phi}(x_1) = i\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \tag{7.39}$$

$$\underbracket{\psi_\alpha(x_1)\,\bar\psi_\beta}(x_2) = -\,\underbracket{\bar\psi_\beta(x_2)\,\psi_\alpha}(x_1) = iS_F(x_1 - x_2) = (i\partial\!\!\!/_1 + m)\,i\Delta_F(x_1 - x_2) \tag{7.40}$$

$$\underbracket{A^\mu(x_1)A^\nu}(x_2) = \underbracket{A^\nu(x_2)A^\mu}(x_1) = iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = -\eta^{\mu\nu}\,i\Delta_F|_{m=0}(x_1 - x_2)\,. \tag{7.41}$$

Sparivanje je vakuumska očekivana vrednost tj. funkcija: zato ako imamo proizvod više operatora, kontrakcije možemo da izvučemo ispred proizvoda:

$$:\underbracket{A\,\underbracket{BC}\,D} \dots JK: \; = (-1)^p \; \underbracket{AD}\,\underbracket{BC} \;\; : \dots JK: \tag{7.42}$$

U poslednjem izrazu znak $(-1)^p$ vodi računa o tome da li su polja bozonska ili fermionska, odnosno kako se promenio opšti predznak pri izmeni redosleda operatora B, C i D.

Wick-ova teorema u opštem slučaju glasi: za vremenski uređen proizvod operatora važi

$$
\begin{aligned}
T\big(ABCD\ldots WXYZ\big) &= :ABCD\ldots WXYZ: \\
&+ :\underbracket{AB}CD\ldots WXYZ: + :A\underbracket{BC}D\ldots WXYZ: + \ldots + :ABCD\ldots WX\underbracket{YZ}: \\
&+ :\underbracket{AB}\,\underbracket{CD}\ldots WXYZ: + :\underbracket{A\underbracket{BC}D}\ldots WXYZ: + \ldots + :\underbracket{A\underbracket{BC}D\ldots WXYZ}: + \ldots \\
&+ \ldots
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

U gornjoj formuli, u drugom redu je zbir svih proizvoda polja sa jednim sparivanjem, u trećem redu je zbir svih članova sa dva sparivanja, i tako dalje. Znači, Wick-ova teorema kaže da je vremenski uređen proizvod polja = normalno uređeni proizvod + zbir normalno uređenih proizvoda u kojima su izvršena sva moguća (tj. nenulta) sparivanja. Za dva polja Wick-ovu teoremu smo dokazali u (7.35); u opštem slučaju, Wick-ova teorema dokazuje se indukcijom.

Smisao Wick-ove teoreme je, iz prethodno urađenog primera sa rasejanjem piona, dosta jasan: proizvod polja hoćemo da izrazimo kao normalno uređeni proizvod (da bismo izračunali vakuumsku očekivanu vrednost), i u procesu 'pomeranja' operatora kreacije na levo i operatora anihilacije na desno javljaju se članovi sa komutatorima polja. Pošto je u Wick-ovoj teoremi proizvod vremenski uređen, ti komutatori su sparivanja, odnosno Feynman-ovi propagatori.

Ako hoćemo sasvim da formalizujemo (algoritmujemo) račun, vidimo da nam u višim redovima teorije perturbacija treba nešto opštiji izraz,

$$
T\left(:AB\ldots:|_{x_1}\ :AB\ldots:|_{x_2}\ \ldots \right), \tag{7.44}
$$

gde su vremenski uređene grupe normalno uređenih operatora, definisanih u istom trenutku tj. u istoj tački (potiču iz hamiltonijana, $:\mathcal{H}(x):$). Formalno gledano, vremensko uređenje u istom trenutku nije definisano pa ne možemo da primenimo Wick-ovu teoremu. Međutim ako razmislimo odakle potiču sparivanja u teoremi (razlog je, da bi se realizovalo normalno uređenje), vidimo da nam ona u okviru grupe nisu ni potrebna tj. ne postoje. Ovo možemo da formulišemo kao dopunu Wick-ove teoreme: dodatni članovi sa sparivanjima u okviru (normalno uređene) grupe istovremenih operatora ne postoje, tj. *nema istovremenih sparivanja*.

7.5 Kvantna elektrodinamika, verteks

Interakcioni hamiltonijan u kvantnoj elektrodinamici,

$$
\mathcal{H} = :e\bar{\psi}\,\not{A}\,\psi: \tag{7.45}
$$

sadrži tri polja, dva spinorska i jedno elektromagnetno. Ako razdvojimo spinorsko polje na pozitivno i negativno-energetski deo,

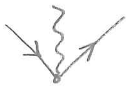
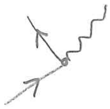
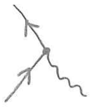
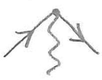
$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \int d^3p \sum_r \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \left(b_{r\vec{p}}\, u_r(\vec{p})\, e^{-ipx} + d^\dagger_{r\vec{p}}\, v_r(\vec{p})\, e^{ipx} \right)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) = \int d^3p \sum_r \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \left(d_{r\vec{p}}\, \bar{v}_r(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger_{r\vec{p}}\, \bar{u}_r(\vec{p})\, e^{ipx} \right)$$

vidimo da ψ^+ odgovara anihilaciji elektrona, ψ^- kreaciji pozitrona, $\bar{\psi}^+$ anihilaciji pozitrona a $\bar{\psi}^-$ kreaciji elektrona. Matrica rasejanja je

$$S = I - ie \int d^4x\, T\big(:\bar{\psi}\, \not{A}\, \psi: \big) + \frac{(-ie)^2}{2!} \iint d^4x_1\, d^4x_2\; T\,\big(:\bar{\psi}\, \not{A}\, \psi:|_{x_1} :\bar{\psi}\, \not{A}\, \psi:|_{x_2} \big) + \ldots$$

Vakuumska očekivana vrednost drugog člana u ovom razvoju, $S^{(1)}$, je nula, ali on nam daje *verteks interakcije*, graf koji ima dve fermionske i jednu fotonsku liniju. Ako razdvojimo pozitivno i negativno-energetske delove, ovaj graf opisuje sledeće ‘elementarne procese’, koji su svi virtuelni (njihova vakuumska očekivana vrednost je nula):

	$+e\,\bar{\psi}^-_\alpha\ \not{A}^-_{\alpha\beta}\,\psi^-_\beta$	
	$+e\,\bar{\psi}^-_\alpha\ \not{A}^-_{\alpha\beta}\,\psi^+_\beta$	elektron emituje foton
	$+e\,\bar{\psi}^-_\alpha\ \not{A}^+_{\alpha\beta}\,\psi^+_\beta$	elektron apsorbuje foton
	$+e\,\bar{\psi}^-_\alpha\ \psi^-_\beta\ \not{A}^+_{\alpha\beta}$	kreacija para
	$-e\,\not{A}^-_{\alpha\beta}\,\psi^-_\beta\ \bar{\psi}^+_\alpha$	pozitron emituje foton
	$-e\,\not{A}^+_{\alpha\beta}\,\psi^+_\beta\ \bar{\psi}^+_\alpha$	
	$-e\,\psi^-_\beta\ \not{A}^+_{\alpha\beta}\,\bar{\psi}^+_\alpha$	pozitron apsorbuje foton
	$-e\,\not{A}^-_{\alpha\beta}\,\psi^+_\beta\ \bar{\psi}^+_\alpha$	anihilacija para

Ako detaljnije razložimo ove crteže, vidimo konkretno pridruživanje polja spoljašnjim linijama:

	$\psi^+(x)\,, \quad u_r(p)$	anihilacija elektrona
	$\bar\psi^-(x)\,, \quad \bar u_r(p)$	kreacija elektrona
	$\psi^-(x)\,, \quad v_r(p)$	kreacija pozitrona
	$\bar\psi^+(x)\,, \quad \bar v_r(p)$	anihilacija pozitrona
	$A^-_\mu(x)\,, \quad \epsilon_{r\mu}(k)$	kreacija fotona
	$A^+_\mu(x)\,, \quad \epsilon_{r\mu}(k)$	anihilacija fotona

Strelica na fermionskim linijama služi da se razlikuju elektron i pozitron: elektron je označen strelicom naviše (u smeru protoka vremena), a pozitron strelicom naniže. Fotonske linije nemaju strelicu jer je foton sam sebi antičestica.

7.6 Compton-ovo rasejanje

Kao prvi primer primene teorije perturbacija u kvantnoj elektrodinamici, izračunaćemo verovatnoću za Compton-ovo rasejanje, odnosno matrični element za sudar elektrona i fotona. Ovaj proces smo već analizirali u prošlom semestru ali ne sasvim konzistentno, jer je elektromagnetno polje bilo opisano klasično.

Elektron i foton pre sudara imaju 4-impulse p_i i k, a posle sudara p_f i k', pa su početno i krajnje stanje sistema

$$|i\rangle = |p_i, k\rangle = b^\dagger_{p_i,s_i}\, a^\dagger_{k,r}\, |0\rangle\,, \qquad |f\rangle = |p_f, k'\rangle = b^\dagger_{p_f,s_f}\, a^\dagger_{k',r'}\, |0\rangle\,. \tag{7.46}$$

Treba da nađemo

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|\, I - ie\int T(\,:\bar\psi A\!\!\!/\psi:\,) + \frac{(-ie)^2}{2!}\iint T(\,:\bar\psi A\!\!\!/\psi::\bar\psi A\!\!\!/\psi:\,) + \,\ldots\, |i\rangle\,. \tag{7.47}$$

Nenulti doprinos dobiće se u drugom redu teorije perturbacija: u članu prvog reda imamo samo jedan fotonski operator a ili $a^\dagger$, a vrednosti $\langle f|a^\dagger_{k,r}\,|i\rangle$ i $\langle f|a_{k,r}\,|i\rangle$ za *in* i *out* stanja (7.46) su nula. Dalje, iz oblika stanja, $\langle f|S|i\rangle = \langle 0|b_{p_f}\, a_{k',r'}\, S\, b^\dagger_{p_i}\, a^\dagger_{k,r}\,|0\rangle$, vidimo da će nenulte doprinose dati samo oni delovi $S^{(2)}$ koji sadrže tačno po jedan operator b, a, $b^\dagger$ i $a^\dagger$, tj. *broj i vrsta in i out linija moraju da budu jednake broju i vrsti operatora unutar* normalno uređenog proizvoda u S-matrici (razvijenoj pomoću Wick-ove teoreme). Ovaj iskaz se preciznije vidi iz jednakosti

$$\begin{aligned}\psi^+(x)\,|e_{p,s}\rangle \equiv \psi^+(x)\, b^\dagger_{p,s}\,|0\rangle &= \int d^3p' \sum_{s'} \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E'}}\, u(p',s')\, e^{-ip'x}\, b_{p',s'}\, b^\dagger_{p,s}\,|0\rangle \\ &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}}\, u(p,s)\, e^{-ipx}\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{7.48}$$

$$\bar\psi^+(x)\,|e^+_{p,s}\rangle = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}}\, \bar v(p,s)\, e^{-ipx}\,|0\rangle\,, \tag{7.49}$$

$$A^+_\mu(x)\,|\gamma_{k,r}\rangle = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3\, 2\omega}}\, \epsilon_{r\mu}(k)\, e^{-ikx}\,|0\rangle\,, \tag{7.50}$$

i njima adjungovanih.

Vremenski uređen proizvod polja pod integralom u $S^{(2)}$ izražava se, po Wick-ovoj teoremi, kao

$$T\,\big(\,:\bar\psi_\alpha(x_1)\, A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x_1)::\bar\psi_\gamma(x_2)\, A\!\!\!/(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta(x_2):\,\big)$$

$$= :\bar\psi_\alpha(x_1)\, A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma(x_2)\, A\!\!\!/(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta(x_2): \tag{7.51}$$

$$+\ :\underbracket{\bar\psi_\alpha(x_1)\, A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma(x_2)\, A\!\!\!/(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta}(x_2): \tag{7.52}$$

$$+\ :\bar\psi_\alpha(x_1)\, A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \underbracket{\psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma}(x_2)\, A\!\!\!/(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta(x_2): \tag{7.53}$$

$$+\ :\bar\psi_\alpha(x_1)\, \underbracket{A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma(x_2)\, A\!\!\!/}(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta(x_2): \tag{7.54}$$

$$+\ :\underbracket{\bar\psi_\alpha(x_1)\, A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \underbracket{\psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma}(x_2)\, A\!\!\!/(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta}(x_2): \tag{7.55}$$

$$+\ :\underbracket{\bar\psi_\alpha(x_1)\, \underbracket{A\!\!\!/(x_1)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x_1)\, \bar\psi_\gamma(x_2)\, A\!\!\!/}(x_2)_{\gamma\delta}\, \psi_\delta}(x_2): \tag{7.56}$$

$$+ \ :\bar{\psi}_\alpha(x_1)\,\not{A}(x_1)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma(x_2)\,\not{A}(x_2)_{\gamma\delta}\,\psi_\delta(x_2): \tag{7.57}$$

$$+ \ :\bar{\psi}_\alpha(x_1)\,\not{A}(x_1)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma(x_2)\,\not{A}(x_2)_{\gamma\delta}\,\psi_\delta(x_2): \tag{7.58}$$

Za Compton-ovo rasejanje nenulti doprinos će, videli smo, dati samo sabirci koji imaju četiri (nesparena) operatora, dva fermionska i dva fotonska: to su u gornjem zbiru (7.52) i (7.53), i to oni delovi u kojima su operatori kreacije i anihilacije koji odgovaraju stanjima $|i\rangle$ i $|f\rangle$. Na primer, za (7.52) imamo

$$:\bar{\psi}_\alpha(x_1)\,\not{A}(x_1)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma(x_2)\,\not{A}(x_2)_{\gamma\delta}\,\psi_\delta(x_2):$$

$$= -iS_F(x_2-x_1)_{\delta\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\gamma^\nu_{\gamma\delta}\ :A_\mu(x_1)\,\psi_\beta(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma(x_2)\,A_\nu(x_2):$$

$$= -i\big(\gamma^\nu\,S_F(x_2-x_1)\,\gamma^\mu\big)_{\gamma\beta}\ :\big(A^+_\mu(x_1)\,\psi^+_\beta(x_1)\,\bar{\psi}^-_\gamma(x_2)\,A^-_\nu(x_2)+A^-_\mu(x_1)\,\psi^+_\beta(x_1)\,\bar{\psi}^-_\gamma(x_2)\,A^+_\nu(x_2)\big):$$

$$= i\,\big(\gamma^\nu\,S_F(x_2-x_1)\,\gamma^\mu\big)_{\gamma\beta}\big(\bar{\psi}^-_\gamma(x_2)\,A^-_\nu(x_2)\,A^+_\mu(x_1)\,\psi^+_\beta(x_1)+\bar{\psi}^-_\gamma(x_2)\,A^-_\mu(x_1)\,A^+_\nu(x_2)\,\psi^+_\beta(x_1)\big)\,.$$

Ovim operatorom treba da delujemo na $|i\rangle$, odnosno $\langle f|$. Koristeći (7.48-7.50), dobijamo

$$A^+_\mu(x_1)\,\psi^+_\beta(x_1)\,|p_i,k\rangle = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3\,2\omega}}\,\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,E_i}}\,\epsilon_{r\mu}(k)\,e^{-ikx_1}\,u_\beta(p_i,s_i)\,e^{-ip_ix_1}\,|0\rangle$$

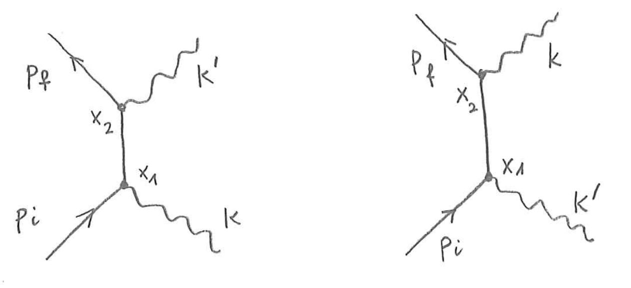
$$\langle p_f,k'|\,\bar{\psi}^-_\gamma(x_2)\,A^-_\nu(x_2) = \langle 0|\,\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3\,2\omega'}}\,\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,E_f}}\,\epsilon_{r'\nu}(k')\,e^{ik'x_2}\,\bar{u}_\gamma(p_f,s_f)\,e^{ip_fx_2}\,.$$

Ukupno, doprinos matričnom elementu koji potiče iz člana (7.52) je

$$\frac{e^2}{2}\iint i\,\big(\gamma^\nu\,S_F(x_2-x_1)\,\gamma^\mu\big)_{\gamma\beta}\,\frac{1}{(2\pi)^6}\,\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega\,2\omega'}}\,\langle 0|0\rangle\,u_\beta(p_i,s_i)\bar{u}_\gamma(p_f,s_f)$$
$$\times\big(\epsilon_{r\mu}(k)\,\epsilon_{r'\nu}(k')\,e^{-i(p_i+k)x_1}\,e^{i(p_f+k')x_2}+\epsilon_{r\nu}(k)\,\epsilon_{r'\mu}(k')\,e^{-i(p_i-k')x_1}\,e^{i(p_f-k)x_2}\big)$$
$$=\frac{e^2}{2}\,\frac{i}{(2\pi)^6}\iint\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega\,2\omega'}}\,\Big(\bar{u}_f\,\not\epsilon_{r'}(k')\,S_F(x_2-x_1)\,\not\epsilon_r(k)\,u_i\,e^{-i(p_i+k)x_1}\,e^{i(p_f+k')x_2}$$
$$+\bar{u}_f\,\not\epsilon_r(k)\,S_F(x_2-x_1)\,\not\epsilon_{r'}(k')\,u_i\,e^{-i(p_i-k')x_1}\,e^{i(p_f-k)x_2}\Big)$$
$$=\frac{e^2}{2}\,\frac{i}{(2\pi)^6}\iiint\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega\,2\omega'}}\,\Big(\bar{u}_f\,\not\epsilon'\,\frac{\not q+m}{q^2-m^2+i\epsilon}\,\not\epsilon\,u_i\,e^{-i(k+p_i-q)x_1}\,e^{i(k'+p_f-q)x_2}$$
$$+\bar{u}_f\,\not\epsilon\,\frac{\not q+m}{q^2-m^2+i\epsilon}\,\not\epsilon'\,u_i\,e^{-i(-k'+p_i-q)x_1}\,e^{i(-k+p_f-q)x_2}\Big)$$
$$=\frac{e^2}{2}\,\frac{i}{(2\pi)^2}\,\frac{m}{\sqrt{E_iE_f}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega\,2\omega'}}\,\delta\big(p_f+k'-p_i-k\big)$$

$$\times \bar{u}_f \left(\not{\epsilon}' \, \frac{\not{p}_i + \not{k} + m}{(p_i + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \, \not{\epsilon} + \not{\epsilon} \, \frac{\not{p}_i - \not{k}' + m}{(p_i - k')^2 - m^2 + i\epsilon} \, \not{\epsilon}' \right) u_i \, . \tag{7.59}$$

Ovaj izraz smo već sreli u prošlom semestru. On ima *crossing simetriju*, $k, \epsilon \leftrightarrow -k', \epsilon'$ koju smo diskutovali, i može se primenom relacija za spinorske amplitude znatno uprostiti. Rezultat koji se dobija iz drugog sabirka, (7.53), u razvoju $S^{(2)}$ isti je kao (7.52) do na izmenu $x_1 \leftrightarrow x_2$, tj. isti je: zato u ukupnom rezultatu imamo dodatni faktor 2.



Izračunati proces (matrični element) dijagramatski je prikazan Feynman-ovim dijagramom gore. Proces je u drugom redu teorije perturbacija, pa imamo dva *verteksa* interakcije u tačkama x_1 i x_2, i za svaki verteks jednu konstantu veze e i jednu γ-matricu u analitičkom izrazu. *In* i *out* stanja definišu *spoljašnje linije* dijagrama, a takođe i polja koja ostaju kao operatori u Wick-ovom razvoju. Polja koja su u Wick-ovom razvoju kontrahovana iz operatora u funkcije postaju propagatori (između tačaka x_1 i x_2), odnosno *unutrašnje linije* dijagrama. Vidimo da u principu neki doprinosi mogu biti isti, i tada imamo *faktore simetrije*.

7.7 Moeller-ovo rasejanje

Drugi proces koji ćemo razmatrati je rasejanje dva elektrona, tzv. Moeller-ovo rasejanje. Ulazno i izlazno stanje u ovom prcesu su

$$|i\rangle = |p_1, p_2\rangle = b^\dagger_{p_1,s_1} \, b^\dagger_{p_2,s_2} \, |0\rangle \, , \qquad |f\rangle = |p_1', p_2'\rangle = b^\dagger_{p_1',s_1'} \, b^\dagger_{p_2',s_2'} \, |0\rangle \, . \tag{7.60}$$

jasno je, kao i u slučaju Compton-ovog rasejanja, da je prvi nenulti perturbativni doprinos drugog reda. Osim toga, iz oblika *in* i *out* stanja vidimo da su to članovi koji sadrže dva operatora anihilacije b i dva operatora kreacije $b^\dagger$: to je u formuli za Wick-ov razvoj $S^{(2)}$, sabirak (7.54). Znači dijagram je već jasan: četiri spoljašnje elektronske linije, dva verteksa i fotonski propagator. Da izračunamo i detalje eksplicitno.Imamo

$$\begin{aligned}
&: \bar{\psi}_\alpha(x_1) \, \underbrace{\not{A}(x_1)_{\alpha\beta} \, \psi_\beta(x_1) \, \bar{\psi}_\gamma(x_2) \, \not{A}}(x_2)_{\gamma\delta} \, \psi_\delta(x_2) : \\
&= -\eta_{\mu\nu} \, i \, \Delta_F(x_1 - x_2) \, \gamma^\mu_{\alpha\beta} \, \gamma^\nu_{\gamma\delta} \ : \bar{\psi}_\alpha(x_1) \, \psi_\beta(x_1) \, \bar{\psi}_\gamma(x_2) \, \psi_\delta(x_2) : \\
&= -\eta_{\mu\nu} \, i \, \Delta_F(x_1 - x_2) \, \gamma^\mu_{\alpha\beta} \, \gamma^\nu_{\gamma\delta} \ : \bar{\psi}^-_\alpha(x_1) \, \psi^+_\beta(x_1) \, \bar{\psi}^-_\gamma(x_2) \, \psi^+_\delta(x_2) :
\end{aligned}$$

$$= \eta_{\mu\nu}\, i\, \Delta_F(x_1 - x_2)\, \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \gamma^{\nu}_{\gamma\delta}\, \bar{\psi}^-_{\alpha}(x_1)\, \bar{\psi}^-_{\gamma}(x_2)\, \psi^+_{\beta}(x_1)\, \psi^+_{\delta}(x_2)\, .$$

Dalje, treba da izračunamo

$$\psi^+_{\beta}(x_1)\, \psi^+_{\delta}(x_2)\, b^{\dagger}_{p_1}\, b^{\dagger}_{p_2}\, |0\rangle = \psi^+_{\beta}(x_1)\, \{\psi^+_{\delta}(x_2)\, ,\, b^{\dagger}_{p_1}\}\, b^{\dagger}_{p_2}\, |0\rangle - \psi^+_{\beta}(x_1)\, b^{\dagger}_{p_1}\, \psi^+_{\delta}(x_2)\, b^{\dagger}_{p_2}\, |0\rangle\, . \tag{7.61}$$

Iz

$$\{\psi^+_{\delta}(x_2)\, ,\, b^{\dagger}_{p_1}\} = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_1}}\, u(p_1, s_1)\, e^{-ip_1 x_2}\, , \tag{7.62}$$

i relacija (7.48), sledi

$$\psi^+_{\beta}(x_1)\, \psi^+_{\delta}(x_2)\, |i\rangle = \frac{m}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \Big(u_{\delta}(p_1)\, u_{\beta}(p_2)\, e^{-ip_1 x_2 - ip_2 x_1} - u_{\delta}(p_2)\, u_{\beta}(p_1)\, e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2} \Big)\, |0\rangle\, .$$

Druga relacija koja nam treba, $\langle f|\, \bar{\psi}^-_{\alpha}(x_1)\, \bar{\psi}^-_{\gamma}(x_2)$, dobija se adjungovanjem.

✠ Proverite prethodne dve formule.

Prema tome, matrični element za Moeller-ovo rasejanje u drugom redu teorije perturbacija je

$$-\frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{(2\pi)^6}\, \frac{m}{\sqrt{E_1 E_2}}\, \frac{m}{\sqrt{E_1' E_2'}}\, \eta_{\mu\nu}\, \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \gamma^{\nu}_{\gamma\delta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{-iq(x_1 - x_2)}}{q^2 + i\epsilon}\, \times$$

$$\times \Big(\bar{u}_{\alpha}(p_1')\, \bar{u}_{\gamma}(p_2')\, e^{ip_1' x_2 + ip_2' x_1} - \bar{u}_{\alpha}(p_2')\, \bar{u}_{\gamma}(p_1')\, e^{ip_1' x_1 + ip_2' x_2} \Big)$$

$$\times \Big(u_{\delta}(p_1)\, u_{\beta}(p_2)\, e^{-ip_1 x_2 - ip_2 x_1} - u_{\delta}(p_2)\, u_{\beta}(p_1)\, e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2} \Big)$$

$$= -\frac{e^2}{2} \iiint \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{(2\pi)^6}\, \frac{m}{\sqrt{E_1 E_2}}\, \frac{m}{\sqrt{E_1' E_2'}}\, \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}\, \times$$

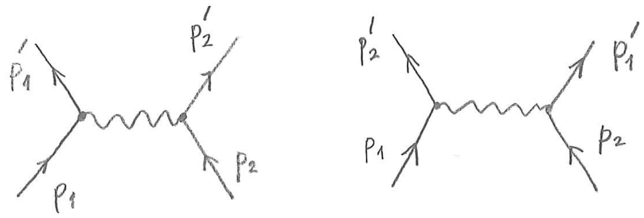
$$\times \Big(\bar{u}_1' \gamma^{\mu} u_2\ \bar{u}_2' \gamma^{\nu} u_1\, e^{i(p_1' - p_1 + q) x_2}\, e^{i(p_2' - p_2 - q) x_1} - \bar{u}_1' \gamma^{\mu} u_1\ \bar{u}_2' \gamma^{\nu} u_2\, e^{i(p_1' - p_2 + q) x_2}\, e^{i(p_2' - p_1 - q) x_1}$$

$$- \bar{u}_2' \gamma^{\mu} u_2\ \bar{u}_1' \gamma^{\nu} u_1\, e^{i(p_1' - p_2 - q) x_1}\, e^{i(p_2' - p_1 + q) x_2} + \bar{u}_2' \gamma^{\mu} u_1\ \bar{u}_1' \gamma^{\nu} u_2\, e^{i(p_1' - p_1 - q) x_1}\, e^{i(p_2' - p_2 + q) x_2} \Big)$$

$$= -\frac{e^2}{2}\, \frac{\eta_{\mu\nu}}{(2\pi)^2}\, \frac{m}{\sqrt{E_1 E_2}}\, \frac{m}{\sqrt{E_1' E_2'}}\, \delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\, \times$$

$$\times \left(\frac{\bar{u}_1' \gamma^{\mu} u_2\ \bar{u}_2' \gamma^{\nu} u_1 + \bar{u}_2' \gamma^{\mu} u_1\ \bar{u}_1' \gamma^{\nu} u_2}{(p_2' - p_2)^2} - \frac{\bar{u}_1' \gamma^{\mu} u_1\ \bar{u}_2' \gamma^{\nu} u_2 + \bar{u}_2' \gamma^{\mu} u_2\ \bar{u}_1' \gamma^{\nu} u_1}{(p_2' - p_1)^2} \right)\, . \tag{7.63}$$

Pošto su elektroni fermioni, rezultat je antisimetričan na izmene $p_1 \leftrightarrow p_2$, $p_1' \leftrightarrow p_2'$. Feynman-ovi dijagrami koji opisuju ovo rasejanje nacrtani su dole.



7.8 Feynman-ova pravila za kvantnu elektrodinamiku

Videli smo u urađenim primerima da je perturbativni račun za verovatnoće prelaza iz *in* u *out* stanja (kada su ona ravni talasi tj. stanja određene vrednosti impulsa) u principu dosta jednostavan. Barem na 'tree-level' nivou, kada svi integrali mogu da se izračunaju, i daju δ-funkcije. Račun je jednostavan, ali najčešće repetitivan i dugačak: da bi se koraci koji su uvek isti skratili odnosno preskočili, formulišu se Feynman-ova pravila. Ona se definišu za određenu teoriju, pa su centralni deo pravila verteksi, koji opisuju za teoriju specifične interakcije. Polja se opisuju kao slobodna polja, svojim propagatorima i asimptotskim ulaznim i izlaznim stanjima. Feynman-ova pravila baziraju se na Dyson-ovom razvoju i Wick-ovoj teoremi, a mogu da se definišu u koordinatnom ili impulsnom prostoru, tj. pre ili posle integracije po koordinatama. Iako ih nismo precizno izveli, definisaćemo Feynman-ova pravila za kvantnu elektrodinamiku u impulsnom prostoru.

Neka su stanja $|i\rangle$ i $|f\rangle$, početno i krajnje stanje u procesu rasejanja, zadata impulsima i spinom odnosno polarizacijom čestica. Amplituda prelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$, S_{fi}, data je razvojem u red po konstanti veze,

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4\, \delta^4\Big(\sum p_f - \sum p_i\Big) \prod_{ext} \sqrt{\frac{m}{VE_i}}\, \prod_{ext} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_i}}\, \mathcal{M}_{fi}\,, \tag{7.64}$$

gde se invarijantna amplituda $\mathcal{M}_{fi}$ izražava kao zbir doprinosa $\mathcal{M}_{fi}^{(n)}$ u n-tom redu teorije perturbacija. $\mathcal{M}_{fi}^{(n)}$ se dobija crtanjem svih topološki različitih povezanih Feynman-ovih dijagrama u impulsnom prostoru koji sadrže n verteksa, ulazne $|i\rangle$ i izlazne $|f\rangle$ linije. Fermionima odgovaraju prave, a fotonima talasaste linije: one se mogu sresti samo u verteksu koji se u elektrodinamici sastoji od jedne ulazne, jedne izlazne fermionske linije i jednog fotona:

	$ie\gamma^{\mu}$	verteks
	$iD_F^{\mu\nu} = -\dfrac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	fotonski propagator
	$iS_F = \dfrac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$	fermionski propagator

Osim unutrašnjih linija kojima se pridružuje propagator, na dijagramima postoje i spoljašnje (ulazne i izlazne) linije, nacrtane na slici na strani 57: osim grafičkog prikaza, na slikama su dati i matematički izrazi koji se elementima dijagrama pridružuju. Ukupni doprinos dobija se kao proizvod pojedinačnih faktora u dijagramu, pri čemu su spinorski faktori uređeni tako da se pišu duž fermionske linije suprotno smeru strelice (i onda je dobijeni rezultat c-broj).

U svakom verteksu održava se 4-impuls: ukoliko u dijagramu ima zatvorenih petlji, postojaće impulsi q koji zakonima održanja nisu fiksirani. Po svakom takvom impulsu tj. nezavisnoj petlji vrši se integracija, $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$; fermionske petlje imaju dodatno i trag i faktor (-1). Doprinos nekih dijagrama je višestruk i zavisi od dodatnih faktora simetrije.