

NASTAVNO-NAUČNOM VEĆU FIZIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU

Pošto smo na VIII sednici Nastavno-naučnog veća Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu održanoj 28. maja 2025. određeni za članove komisije za pripremu izveštaja o doktorskoj disertaciji Bojane Brkić pod nazivom “KOSMOLOŠKI MODELI NA NEKOMUTATIVNIM PROSTORIMA”, podnosimo sledeći

IZVEŠTAJ

1 Osnovni podaci o kandidatkinji

1.1 Biografski podaci

Bojana Brkić je rođena 7. januara 1993. godine u Čačku. Završila je osnovnu školu u Lučanima, a maturirala na prirodno-matematičkom smeru gimnazije u Požegi 2012. godine kao nosilac Vukove diplome. Osnovne studije na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Teorijska i eksperimentalna fizika, završila je 2017. godine sa prosečnom ocenom 9.72. Na Fizičkom fakultetu je 2017. godine upisala master akademske studije, uža naučna oblast Fizika čestica i polja, koje je završila 2018. godine sa prosečnom ocenom 10 i odbranom master rada „Proučavanje procesa rasejanja u nekomutativnom standardnom modelu pomoću paketa *FeynRules* i *MadGraph*”. 2018. godine je upisala doktorske studije na Fizičkom fakultetu, smer Kvantna polja, čestice i gravitacija, i sve ispite na doktorskim studijama položila sa ocenom 10.

Kao saradnik u nastavi na Fizičkom fakultetu drži računske vežbe iz četiri predmeta: Mehanika, Termodinamika, Kvantna teorijska fizika i Osnovi elektrodinamike; u prethodnom periodu je držala računske i laboratorijske vežbe iz Fizike atoma i računske vežbe iz Fizike 2 za studente fizičke hemije. Bila je član Komisije za takmičenja iz fizike za osnovne škole.

1.2 Naučna aktivnost

Od januara 2019. godine Bojana Brkić je zaposlena na Fizičkom fakultetu, prvo kao istraživač-pripravnik a zatim kao istraživač-saradnik. Naučne aktivnosti obavlja u okviru Grupe za gravita-

ciju, čestice i polja. Bavi se istraživanjem nekomutativne geometrije odnosno kvantnog prostor-vremena, i osobinama klasičnog i kvantnog skalarnog polja na nekomutativnim prostorima. Temu doktorske disertacije „Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima” odbranila je pred kolegijumom doktorskih studija Fizičkog fakulteta decembra 2021. godine, a za mentora je određen docent dr Duško Latas.

Bojana Brkić je učestvovala na dve škole za studente doktorskih studija: Second Training School of COST Action CA18108: Quantum gravity phenomenology in the multi-messenger approach (3-10. septembar 2022.) i BS2019: SEENET-MTP Balkan School on High Energy and Particle Physics: Theory and Phenomenology (3-10. jun 2019.). Na konferenciji DPG Spring Meeting 2024 održanoj 11-15. marta 2024. u Giseni (Nemačka) imala je poster prezentaciju sa naslovom „Scalar Field on Fuzzy de Sitter Space”. Bila je član nacionalnog projekta ”Fizičke implikacije modifikovanog prostor-vremena” (171031) MPNTR Republike Srbije.

2 Opis predatog rada

2.1 Osnovni podaci

Doktorski rad “Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima” urađen je pod rukovodstvom dr Duška Latasa. On je, tematski, nastavak istraživanja nekomutativnih de Sitterovih prostora koji su ranije uvedeni/definisani u Grupi za gravitaciju, čestice i polja na Fizičkom fakultetu (radovi J. Madora, M. Burić i D. Latasa). U radu su ispitane neke od geometrijskih osobina fazi de Sitterovih prostora u dve i četiri dimenzije, pre svega osobine laplasijana. Fokus istraživanja je skalarno polje na fazi de Sitterovom prostoru, odnosno nalaženje i analiza skupa rešenja/moda Klajn-Gordonove jednačine. Ovo istraživanje predstavlja neophodni prvi korak za kvantovanje skalarnog polja, kao i za analizu potencijalno opservabilnih efekata nekomutativne kosmologije koji iz njega proističu.

Disertacija ima ukupno 127 strana. Sam tekst disertacije napisan je na 112 strana i ima 10 poglavlja, 3 dodatka i 94 reference. Rad je formatiran na način propisan od strane Univerziteta: sadrži naslovnu stranu na engleskom i srpskom jeziku, stranu sa podacima o mentoru i komisiji, stranu sa zahvalnicama, apstrakt na engleskom i srpskom jeziku, biografiju kandidatkinje i spisak njenih publikacija, kao i odgovarajuće izjave.

2.2 Predmet i cilj rada

Motivacija istraživanja nekomutativne geometrije i nekomutativne teorije polja je u teorijskoj fizici dvojaka. Jedan njen deo je intuicija da je na veoma malim, Plankovim skalama dužine, prostor-vreme *kvantno*, odnosno dato nekom od matematičkih struktura koje omogućavaju da se opiše granularnost ili diskretnost prostora. Drugim rečima, ideja da na malim skalama postoji in-

herentna neodređenost merenja prostorno-vremenskih koordinata koja, kao u kvantnoj mehanici, implicira diskretnost. Druga ideja odnosno očekivanje je da bi takvo, diskretno prostor-vreme prirodno rešilo problem UV divergencija u kvantnoj teoriji polja, jer postojanje minimalnog rastojanja implicira postojanje maksimalnog impulsa, odnosno UV regularizaciju.

Iako su obe ideje intuitivno dobro zasnovane, one do sada nisu adekvatno i u potpunosti realizovane u konkretnim modelima. Opstrukcija regularizaciji je UV/IR mešanje, fenomen koji se javlja u skoro svim detaljno analiziranim modelima nekomutativne teorije polja. Sa druge strane, modeli nekomutativne geometrije su po pravilu ograničeni svojom algebarskom strukturom i najčešće narušavaju simetrije polazne komutativne teorije, što je onda poseban problem u fizičkim primenama. Zbog toga se modeli nekomutativne geometrije često interpretiraju kao efektivni a ne fundamentalni, odnosno kao modeli koji opisuju fiziku na skalama koje su između Plankove i skale aktuelnih eksperimenata.

Osnovni predmet rada Bojane Brkić je ispitivanje osobina nekomutativnih, preciznije fazi (eng. *fuzzy*) de Sitterovih prostora i klasičnog i kvantnog skalarnog polja na njima: rezultati prikazani u disertaciji uglavnom se odnose na klasično polje. Ideja za ovako postavljenu temu je da nekomutativna geometrija efektivno opisuje kvantnu gravitaciju, odnosno gravitaciono polje u ranoj fazi evolucije svemira, npr. tokom inflacije. U tom kontekstu, cilj modela je da se izračunaju popravke koje daje kvantna gravitacija na efekte koji se standardno objašnjavaju inflatornom fazom evolucije svemira (precizna merenja nehomogenosti CMB zračenja, raspodela galaksija), i da se uporede sa rezultatima aktuelnih astrofizičkih merenja.

Model nekomutativnog prostora koji je analiziran, mada nema maksimalnu simetriju odgovarajućeg klasičnog prostora, formulisan je u kontekstu simetrije: u okviru algebre de Sitterove grupe $SO(1,4)$ (u dvodimenzionom kosmološkom modelu, $SO(1,2)$). Algebarske osobine ovih Lijeve grupa i korišćenje njihovih unitarnih ireducibilnih reprezentacija daju konkretnu formulaciju fizičkog problema koji se razmatra i omogućavaju različita izračunavanja – makar u principu, i uz razvoj adekvatnih metoda. U skladu sa tim, u tezi su razvijeni i primenjeni različiti matematički metodi.

2.3 Publikacije

Rezultati prikazani u disertaciji, [1] i [2], su publikovani u vodećim međunarodnim časopisima, a radovi Bojane Brkić su do sada citirani 3 puta.

2.4 Pregled naučnih rezultata izloženih u tezi

U tezi su izloženi originalni naučni rezultati Bojane Brkić. Posle kratkog uvoda u fizičku motivaciju datog u glavi 1, u nastavku je ukratko izložen pregled matematičkog formalizma koji se u tezi koristi. Osnove nekomutativne diferencijalne geometrije (nekomutativni frejm forma-

lizam) date su u glavi 2, a zatim je formalizam razrađen i primenjen na h -deformisanu ravan Lobačevskog u glavi 3, nekomutativni prostor koji je osnova za model fazi de Sitterove kosmologije u dve dimenzije. U glavi 4 je sistematizovana raznorodna matematička literatura koja se odnosi na de Sitterovu grupu $SO(1,4)$ (i opštije, $SO(1,d)$) i njene unitarne ireducibilne reprezentacije. Uvedene su tri realizacije reprezentacija glavne neprekidne serije grupe $SO(1,4)$: prva, Tomas-Njutnova reprezentacija indukovana sa podgrupe $SO(4)$, zatim CFT reprezentacija koja se standardno koristi u konformnoj teoriji polja (Dobrev, Mak), i konačno, Mojlanova reprezentacija prilagođena kontrakciji de Sitterove na Poenkareovu grupu. U glavi 5 razmatrani su i izvedeni neki od rezultata kvantovanja skalarnog polja na komutativnom de Sitterovom prostoru u 4 i d dimenzija na način koji omogućava generalizaciju. Dat je skup moda skalarnog polja u Poenkareovim i novim $(\hat{\eta}, y)$ koordinatama koje se koriste u nekomutativnom slučaju, i su diskutovani vakuumi i njihove simetrije.

U glavi 6 su predložena tri modela nekomutativne kosmologije: uvedene su koordinate, impulsi i diferencijalna geometrija, i diskutovane su geometrijske osobine (metrika, koneksija, krivina) i simetrije modela. Prva grupa originalnih rezultata kandidatkinje opisana je u glavi 7 i daje osobine operatora energije fazi de Sitterovog prostora i fazi laplasijana: laplasijan omogućava da se formuliše Klajn-Gordonova jednačina za skalarno polje. Račun je urađen u Mojlanovoj reprezentaciji, za koju se ispostavilo (u ovom i u kasnijim računima) da je dosta tehnički složena. Zato je u nastavku za rešavanje nekomutativne Klajn-Gordonove jednačine, u glavi 8, korišćena CFT reprezentacija. Fazi harmonici skalarnog polja nađeni su na dva načina: prvo operatorski, izborom pogodnih koordinata i operatorskog uređenja. Dobijen je veoma lep rezultat: da se operatorska jednačina (koja je u principu veoma komplikovana, i ne postoje razrađeni standardni metodi za njeno rešavanje) može povezati sa jednačinom na komutativnom prostoru. Određen je njen skup rešenja i pokazano da sva rešenja imaju dobar klasični limes.

Da bi se ispitala kompletnost dobijenog skupa harmonika, fazi Klajn-Gordonova jednačina je reformulisana i rešena na drugi način, kao jednačina za matrične elemente (kernele) moda skalarnog polja. Ovaj pristup koristi konkretne reprezentacije glavne neprekidne serije $SO(1,4)$ i $SO(1,2)$ grupe, i omogućava da se problem potpuno reši. Dobijen je kompletan skup rešenja i analizirane su njegove osobine. U dvodimenzionom slučaju, ovaj skup rešenja je isti kao skup rešenja dobijenih operatorskim metodom. U četvorodimenzionom slučaju, on je “veći” od skupa kvaziklasičnih (ili, geometrijskih) rešenja koja se vise i operatorski. Postoje mode koje odgovaraju unutrašnjim, ili kvantnim stepenima slobode, koje se na klasičnom nivou ne vide, a taj unutrašnji prostor je kompaktan i u tom smislu ima sličnosti sa Kalica-Klajnovim unutrašnjim prostorima.

Trebalo bi naglasiti da su u tezi razrađene i korišćene različite osobine unitarnih, pa zato i beskonačnodimenzionih, reprezentacija de Sitterove grupe. To je u drugom delu rada iziskivalo korišćenje i dobro poznavanje različitih specijalnih funkcija, njihovih integrala i metoda regularizacije. Neke od formula relevantnih za račun date su u dodacima na kraju disertacije.

Rezultati dobijeni u tezi Bojane Brkić otvorili su dalje pravce istraživanja u grupi: generalizaciju na fazi anti-de Sitterov prostor i analizu klasičnog limesa pomoću koherentnih stanja, [4].

3 Spisak publikacija kandidatkinje

- [1] B. Brkić, M. Burić and D. Latas, “Laplacian on fuzzy de Sitter space”, *Class. Quantum Grav.* **39** (2022) 115001 DOI: 10.1088/1361-6382/ac613, ISSN: 0264-9381.
- [2] B. Brkic, I. Buric, M. Buric, D. Latas, “Quantum scalar field on fuzzy de Sitter space. Part I. Field modes and vacua”, *JHEP* **10** (2024), 018, DOI: 10.1007/JHEP10(2024)018, ISSN: 1029-8479.
- [3] B. Brkic, M. Buric and D. Latas, “Fuzzy de Sitter and anti-de Sitter spaces”, *PoS CORFU2021* (2022), 274, ISSN: 1824-8039.
- [4] B. Brkić, I. Burić, M. Burić, D. Đorđević and D. Latas, “QFT on Fuzzy AdS Spaces: Classical Limit and Boundary Correlation Functions”, [arXiv:2502.17595 [hep-th]].

4 Provera originalnosti doktorske disertacije

Na osnovu *Pravilnika o postupku provere originalnosti doktorskih disertacija koje se brane na Univerzitetu u Beogradu* i nalaza u izveštaju iz programa *iThenticate* kojim je izvršena provera originalnosti doktorske disertacije “Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima” (naučna oblast Kvantna polja, čestice i gravitacija), kao i na osnovu ocene tog izveštaja koju je dao mentor, konstatujemo da utvrđeno podudaranje teksta disertacije iznosi do 3%. Ovaj stepen podudarnosti posledica je opštih mesta i podataka, kao i prethodno publikovanih rezultata istraživanja kandidatkinje proisteklih iz disertacije, što je u skladu sa članom 9. *Pravilnika*. Izveštaj iz programa i ocena izveštaja se nalaze u prilogu.

Na osnovu iznetog, u skladu sa članom 8. stav 2. *Pravilnika o postupku provere originalnosti doktorskih disertacija koje se brane na Univerzitetu u Beogradu*, izjavljujemo da izveštaj ukazuje na originalnost doktorske disertacije pa se propisani postupak pripreme za njenu odbranu može nastaviti.

5 Zaključak

Na osnovu izloženog, komisija zaključuje da doktorska disertacija Bojane Brkić “KOSMOLOŠKI MODELI NA NEKOMUTATIVNIM PROSTORIMA” daje značajan doprinos teorijskoj fizici visokih energija, odnosno užoj naučnoj oblasti Kvantna polja, čestice i gravitacija, kao i da su zadovoljeni svi propisani uslovi za odbranu ove disertacije. Zbog toga predlažemo Nastavno-naučnom veću Fizičkog fakulteta da odobri njenu odbranu.

Beograd, 29. maja 2025.

dr Maja Burić

redovni profesor Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

dr Marija Dimitrijević Ćirić

redovni profesor Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

dr Branislav Cvetković

naučni savetnik Instituta za fiziku Univerziteta u Beogradu