UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIČKI FAKULTET

Bojana Brkić

KOSMOLOŠKI MODELI NA NEKOMUTATIVNIM PROSTORIMA

doktorska disertacija

Beograd, 2025

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF PHYSICS

Bojana Brkić

COSMOLOGICAL MODELS ON NONCOMMUTATIVE SPACES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025

Mentor
Doc. dr Duško Latas
docent
Univerzitet u Beogradu Fizički fakultet

Komisija za odbranu doktorske disertacije

Prof. dr Maja Burić
redovni profesor
Univerzitet u Beogradu Fizički fakultet

Prof. dr Marija Dimitrijević Ćirić
redovni profesor
Univerzitet u Beogradu Fizički fakultet

dr Branislav Cvetković
naučni savetnik
Univerzitet u Beogradu Institut za fiziku

Datum odbrane doktorske disertacije

Zahvalnica

Ova disertacija je urađena pod mentorstvom docenta dr Duška Latasa kome se ovom prilikom zahvaljujem na tome što me je uveo u nekomutativni deo fizike. Zahvaljujem mu se na uloženom trudu, pomoći, savetima i prijatnoj radnoj atmosferi. Isto tako, zahvalnost dugujem profesorki dr Maji Burić koja je bila uključena u moj istraživački rad od početka. Od nje sam dosta naučila i veoma je doprinela idejama i rezultatima koji su ovde predstavljeni. Ovde bih dodala i saradnike, dr Iliju Burića i Dušana Đorđevića, koji su svojim znanjem doprineli bržem rešavanju problema iz ove teze.

Želim da se zahvalim nastavnici fizike iz osnovne škole Suzani Zlatić koja me je svojim entuzijazmom i pristupom radu zainteresovala za fiziku još u šestom razredu.

Zahvaljujem se velikom broju prijatelja i kolega, pre svega na nezaboravnim druženjima, a pored toga i na podršci tokom izrade i pisanja disertacije. Nadam se da ostali neće da zamere što ću ovde da izdvojim Danila Nikolića i profesora Srđana Bukvića koji su me svakodnevno bodrili svih ovih godina.

Netrivijalan doprinos motivaciji dobijala sam od studenta kojima sam držala vežbe poslednjih osam godina, tako da im se ovom prilikom zahvaljujem. Takođe hvala na ukazanom poverenju i odličnoj saradnji svim predmetnim nastavnicima sa kojima sam imala priliku da radim.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci Miljani, ocu Draganu i sestri Neveni, na njihovoj neprestanoj podršci od početka studiranja. Hvala im što su uvek verovali u mene više nego ja u sebe.

Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima

Sažetak: U ovoj tezi proučavamo primenu nekomutativne geometrije na prostore koji opisuju ranu fazu razvoja svemira. Razmatramo fazi de Siterov prostor - nekomutativnu verziju de Siterovog prostora koja je bazirana na de Siterovoj grupi simetrije $SO(1,d)$ i njenim unitarnim ireducibilnim reprezentacijama. Konkretno, za impulse su uzeti elementi $\mathfrak{so}(1,d)$ algebre. Nakon iznetih detalja iz diferencijalne geometrije za $d = 2,4$, dolazimo do izraza za laplasijan na ovim prostorima. Prvo nalazimo svojstvene funkcije laplasijana u četiri dimenzije kada on deluje na elemente prostora reprezentacije. Razmatramo varijante kada je spin $s = 0$ i $s = \frac{1}{2}$ i u oba slučaja dolazimo do sličnih izaraza za svojstvene funkcije koje zapisujemo preko Jakobijevih funkcija. Dolazimo to rezultata da je spektar lapalsijana kontinualan. U okviru pomenutih reprezentacija identifikovan je operator energije, nalazimo njegove svojstvene funkcije i zaključujemo da i energija ima kontinualan spektar. Nakon toga, koristimo izraz za laplasijan koji deluje na funkcije nekomutativnih koordinata i operatorski rešavamo Klajn-Gordonovu jednačinu u dve i četiri dimenzije. Koristeći specifičan izbor koordinata, pokazujemo da se mode nekomutativnog polja u tim koordinatama poklapaju sa modama komutativnog polja. Da bismo ispitali kompletnost prethodnog skupa moda, koristimo konkretnu reprezentaciju u Hilbertovom prostoru i razmatramo integralne kernele (matrične elemente) skalarnog polja. Na ovaj način dolazimo do kompletnog skupa rešenja fazi Klajn-Gordonove jednačine. U slučaju kad je dimenzija $d > 2$, prostor nekomutativnih rešenja ima više stepeni slobode u odnosu na komutativan analogon. U četiri dimenzije, negeometrijske unutrašnje mode su parametrizovane sa $S^2 \times W$, gde je W diskretan matrični prostor. Ovim rezultatima se priprema teren za analizu kvantne teorije polja na fazi de Siterovom prostoru, konkretno za dobijanje dvotačkastih funkcija koje su korisne u kosmologiji.

Ključne reči: de Siterov prostor, nekomutativna geometrija, skalarno polje, konformna simetrija, kosmologija, Banč-Dejvisov vakuum, Bogoljubovljeva transformacija, koherentna stanja

Naučna oblast: fizika

Uža naučna oblast: fizika visokih energija

Cosmological models on noncommutative spaces

Abstract: In this thesis, we stady the application of noncommutative geometry to spaces that describe the early stage of the development of the universe. We consider fuzzy de Sitter space, which is a noncommutative version of de Sitter space based on de Sitter symmetry group $SO(1,d)$ and its unitary irreducible representations. Specifically, momenta are taken as elements of $\mathfrak{so}(1,d)$ algebra. Providing details of differential geometry in two and four dimensions, we arrive at the Laplacian defined on such spaces. We first obtain eigenfunctions of the Laplacian in four dimensions acting on elements of representation space. We consider the two cases of spin $s=0$ and $s=\frac{1}{2}$ ending up with similar expressions given in terms of Jacobi's functions. In both cases, the spectra are continuous. We then identify the energy operator, and diagonalizing it we find the spectrum continuous, as well. After that, we take the expression for the Laplacian acting on functions of noncommutative coordinates and solve the Klein-Gordon equation in two and four dimensions. Using a specific set of coordinates, we show that the modes of commutative field coincide with the modes of commutative field. In order to examine the completeness of the former set of modes, we take a specific representation on a Hilbert space considering integral kernels (matrix elements) of the scalar field. In case of $d>2$, the space of noncommutative solutions has more degrees of freedom than the commutative counterpart. In four dimensions, the new non-geometric, internal modes are parametrised by $S^2 \times W$, where W is a discrete matrix space. This results pave the way to analysis of quantum field theory on the fuzzy de Sitter space, in particular for computing a two-point functions in cosmology.

Key words: de Sitter space, noncommutative geometry, scalar field, conformal symmetry, cosmology, Bunch-Davies vacuum, Bogolyubov transformation, coherent states

Scientific field: physics

Scientific subfield: high energy physics

Rezultati iz ove disertacije su publikovani u radovima:

[1] B. Brkić, M. Burić and D. Latas, "Laplacian on fuzzy de Sitter space", Class. Quantum Grav. **39** (2022) 115001 DOI: 10.1088/1361-6382/ac613;

[2] B. Brkic, I. Buric, M. Buric, D. Latas, "Quantum scalar field on fuzzy de Sitter space. Part I. Field modes and vacua", JHEP **10** (2024), 018, DOI: 10.1007/JHEP10(2024)018.

Ostali radovi kandidata:

[1] B. Brkic, M. Buric and D. Latas, "Fuzzy de Sitter and anti-de Sitter spaces", PoS **CORFU2021** (2022), 274;

[2] B. Brkić, I. Burić, M. Burić, D. Đorđević and D. Latas, "QFT on Fuzzy AdS Spaces: Classical Limit and Boundary Correlation Functions", [arXiv:2502.17595 [hep-th]].

Sadržaj

1 Uvod

Na osnovu eksperimentalnih dokaza i činjenice da je klasična fizika nekonzistentna, znamo da se priroda opisuje kvantnom teorijom. Do sada su uspešno kvantovane tri od četiri interakcije u prirodi: elektromagnetna, slaba i jaka.

Opšta teorija relativnosti je aktuelna klasična teorija gravitacije. Ona opisuje prostorvreme kao mnogostrukost sa metrikom na kojoj mogu da se uvedu različita polja. Ova teorija ima problem jer predviđa singularnosti, mesta na kojima je krivina beskonačna i zakoni fizike ne važe. Međutim, ne postoji konzistentan način da se ona kvantuje kao što je slučaj sa ostalim klasičnim teorijama. Taj problem možemo da prikažemo na sledeći način, [1]. Sa jedne strane postoji standardni model elementarnih čestica koji se kontroliše bezdimenzionim kapling konstantama. On je formulisan konzistentno kao renormalizabilna kvantna teorija na svim skalama dužine. Gravitacija je određena dimenzionom Njutnovom konstantom $G_N \sim l_{Pl}^2$, gde je $l_{Pl} \sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}$ Plankova dužina. Ovo znači da je gravitacija jako kuplovana na malim rastojanjima na kojima je značajna kvantna struktura materije i polja. Zbog toga ne očekujemo da na svim skalama dužine gravitacija ostane klasična.

Najvažniji pokušaji kvantovanja gravitacije do sada su teorija struna i kvantna gravitacija na petljama, [2, 3]. Kod teorije struna čestice nisu tačkasti objekti već jednodimenzione strune koje vibriraju, a gravitacija se javlja prirodno kao jedna od vibracija. Teorija struna je nastala osamdesetih godina prošlog veka. Ona je kandidat za tzv. teoriju svega jer potencijalno ujedinjuje sve interakcije u jednu teoriju. Za razliku od nje, kvantna gravitacija na petljama kvantuje samo prostorvreme koristeći formalizam opšte teorije relativnosti i kvantne teorije polja.

Strune imaju određenu prostornu dimenziju, karakterističnu dužinu (eng. *intrinsic length scale*) l_s, ispod koje klasične predstave prostora i vremena prestaju da važe, [4]. Vrednost l_s je reda veličine Plankove dužine. Modifikovana Hajzenbergova relacija neodređenosti se postulira u obliku [5]

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2\,\Delta p\right). \tag{1.0.1}$$

Kada je $l_s = 0$ ova relacija se svodi na strandardnu Hajzenbergovu relaciju u kvantnoj mehanici gde neodređenost koordinate opada kada neodređenost impulsa raste. Iz (1.0.1) sledi da Δx raste kada raste Δp. Može da se nađe minimum funkcije Δp odakle se dobija donja granica za merenje dužina u prostorvremenu, $(\Delta x)_{\min} = l_s$. Na ovaj način se vidi kako teorija struna daje realizaciju prostora u kome su koordinate takoreći razmazane. Opštije, prostornovremenske relacije neodređenosti se postuliraju u obliku [6]

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq l_{Pl}^2, \tag{1.0.2}$$

tako da pojam tačke u prostoru gubi smisao. U limesu niskih energija (velikih skala dužine) $l_{Pl} \to 0$ dobija se klasično prostorvreme sa koordinatama koje komutiraju.

Dosta pre pojave teorije struna postojale su sugestije da na veoma malim skalama dužine koordinate ne komutiraju. Ova ideja je razmatrana tridesetih godina 20. veka prilikom razvoja kvantne mehanike, [7], [8]. U radu obajvljenom 1947. Snajder je formalno pokazao kako pomoću nekomutativne strukture koordinata na malim skalama dužine može da se kontroliše ultravioletna divergencija u kvantnoj teoriji polja, [9].

Ideja o nekomutativnosti koordinata najviše je inspirisana kvantnom mehanikom. Kvantni fazni prostor je definisan tako što su kanonske koordinate i impulsi x^i, p_j zamenjeni hermitskim operatorima $\hat{x}^i, \hat{p}_j$ koji zadovoljavaju komutacionu relaciju

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j. \tag{1.0.3}$$

Na ovaj način se pojam tačke u faznom prostoru menja Plankovom ćelijom. U klasičnom limesu $\hbar \to 0$ dobija se običan (komutativan) prostor.

Koordinate mogu da se zamene operatorima koji ne komutiraju,

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\bar{k}J^{\mu\nu}(x), \tag{1.0.4}$$

gde se oznaka $\bar{k}$ odnosi na konstantu nekomutativnosti, koja je analogna konstanti $\hbar$. Njena dimenzija je dužina na kvadrat. Na osnovu relacije (1.0.4), koordinate ne mogu da se mere simultano i koordinatni prostor je podeljen na Plankove ćelije, tako da postaje fazi (eng. *fuzzy*).

Videli smo da nekomutativnost koordinata proizilazi iz teorije struna, a pored toga idejno sledi iz kvantne mehanike. Sa druge strane, ako pođemo od stanovišta da je gravitacija geometrija prostorvremena, onda kvantovanje gravitacije može da se svede na kvantovanje geometrije. Izdvajaju se dva pristupa nekomutativnoj geometriji. Alan Kon prostor opisuje algebrom operatora umesto skupom tačaka, [10]. On uvodi koncept spektralne trojke $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, gde je $\mathcal{A}$ nekomutativna algebra opservabli, $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor na kome algebra deluje i D Dirakov operator koji nosi informacije o metrici. Ova trojka zamenjuje diferencijalnu strukturu obične mnogostrukosti. Drugi pristup se oslanja na simetriju prostora a potiče od Džona Madora. On je razvio *frame*[1] formalizam u kojem je nekomutativna (diferencijalna) geometrija uopštenje Kartanovog pristupa opštoj teoriji relativnosti pomoću diferencijalne geometrije, [11]. Pristup Džona Madora je intuitivniji i pogodniji za analiziranje fizike, što se uklapa u naše ciljeve, pa ga u radu koristimo. Postoji mogućnost da kvantovanje prostora ne daje fundamentalni, već efektivni opis fizike.

1.1 Nekomutativni prostori i kosmologija

Na početku ćemo kao motivaciju da navedemo nekoliko najjednostavnijih primera fazi prostora, [12],[13].

Razmotrimo fazni prostor klasične čestice koja se kreće u ravni. Ona je opisana koordinatama (x^1, x^2) i impulsima (p_1, p_2). Kada se ovaj sistem kvantuje zadovoljene su komutacione relacije (1.0.3) za $i = 1, 2$. *Mojalov prostor* je dvodimenzioni nekomutativni ravan prostor definisan relacijom

$$[x^1, x^2] = i\bar{k}, \tag{1.1.1}$$

koji je poznat kao prostor sa kanonskom nekomutativnošću. Osobine nekomutativnog prostora su određene algebrom koordinata, reprezentacijom i odgovarajućim diferencijalnim računom. U ovom slučaju to je Hajzenbergova algebra sa jedinstvenom unitarnom ireducibilnom reprezentacijom koja može da se realizuje pomoću algebre operatora ili algebre funkcija sa $\star$ proizvodom. Zamenom

$$x \to x^1, \qquad p \to x^2, \qquad \hbar \to \bar{k} \tag{1.1.2}$$

[1] U odsustvu odgovarajuće reči na srpskom jeziku koristićemo englesku varijantu.

u relaciji (1.0.3), dobija se kanonski dvodimenzioni prostor. On ima translatornu simetriju, a translacije su elementi Vajlove grupe.

Kada postoji određena simetrija nekomutativnog prostora, onda je najlakše uvesti njegovu diferencijalnu geometriju koristeći znanje iz teorije grupa. Postoji mogućnost da se preformuliše Kartanov *moving frame* formalizam tako da može da opiše i nekomutativnu geometriju. Tada formalizam sadrži vezu između nekomutativnosti i gravitacije. Ovo je tema poglavlja 2.1, a ovde uvodimo neke elemente koji su nam neophodni za diskusiju.

Krenućemo od ravnog prostora. Neka su antihermitski generatori translacija (impulsi) u ravni p_i, onda konačne translacije $T(a) = e^{a^i p_i}$, $a^i \in \mathbb{R}$, po definiciji, deluju kao

$$T^{-1}(a)\, x^i\, T(a) = x^i - a^i. \tag{1.1.3}$$

Sa druge strane, rešenje relacija (1.1.1) i (1.1.3) je $T(a) = e^{\frac{i}{\hbar}(a^1x^2 - a^2x^1)}$. Nakon odgovarajuće smene (1.1.2) nalazimo da su nekomutativni impulsi

$$p_1 = i\frac{x^2}{\hbar}, \qquad p_2 = -i\frac{x^1}{\hbar} \tag{1.1.4}$$

elementi algebre koordinata $\mathcal{A}$. Odavde nalazimo

$$[p_i, x^j] = \delta_i^j \tag{1.1.5}$$

i ova relacija je analogna sa $\tilde{\partial}_i \tilde{x}^j = \delta_i^j$ na komutativnoj ravni. Pošto komutator zadovoljava Lajbnicovo pravilo onda $[p_\alpha,]$ deluje kao parcijalni izvod. Ovde može da se pretpostavi da postoji skup vektorskih polja e_α koji deluju na funkcije kao $e_\alpha f = [p_\alpha, f]$ i obrazuju tangentni prostor $\mathcal{X}(\mathcal{A})$. Prostor dualan tangentnom je kotangentni prostor $\Omega^1(\mathcal{A})$ koji obrazuju 1-forme. Bazisne 1-forme su definisane kao $\theta^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Diferencijal d preslikava funkcije u 1-forme i zadovoljava Lajbnicovo pravilo. Važno je da diferencijalna struktura implementirana na $\mathcal{A}$ mora da bude konzistentna sa algebarskom strukturom. U slučaju kanonske nekomutativnosti sledi da je

$$d[x^i, x^j] = [dx^i, x^j] + [x^i, dx^j] = 0, \tag{1.1.6}$$

a rešenje ovog skupa jednačina u opštem slučaju nije jedinstveno. Posledica toga je to da nekomutativni diferencijalni račun nije definisan jedinstveno kao de Ramov račun na komutativnoj mnogostrukosti. U konkretnom slučaju kanonskog prostora rešenje je $[x^i, dx^j] = 0$.

Ovaj pristup je dosta razrađen za opisivanje geometrije matričnih (konačnih) prostora kao i prostora sa visokim stepenom simetrije. U nastavku ćemo da vidimo detalje kvantizacije prostora sa maksimalnom simetrijom, odnosno rešenja Ajnštajnovih jednačina sa kosmološkom konstantom. Jedan od motiva dolazi iz kosmologije: činjenica je da de Siterova geometrija dobro opisuje sadašnje stanje svemira kao i njegovu inflatornu fazu. Drugi motiv dolazi od toga što standardna Mojalova kvantizacija ravnog prostora Minkovskog narušava rotacionu simetriju. Da bi se zadržao određeni skup simetrija, impulsi se biraju tako da pripadaju Lijevoj algebri odgovarajuće grupe simetrije.

Najjednostavniji primer ovakve kvantizacije je *fazi sfera* S_2, [14] [15]. U njenu definiciju je ugrađena ideja da se Kazimirova relacija $SO(3)$ grupe interpretira kao relacija uronjavanja (eng. *embedding*). Tada unitarne ireducibilne reprezentacije definišu fazi sferu. Označimo sa J_a hermitske generatore $\mathfrak{so}(3)$ algebre, $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$ sa $a, b = 1, 2, 3$. Ova signatura je euklidska tako da nije neophodno da pravimo razliku između gornjih i donjih indeksa, ali ćemo to da radimo na mestima gde je potrebno da bi izraz bio jasniji. Kazimirova relacija $SO(3)$ grupe,

$$C_2 = J_a J_a = j(j+1) = \frac{(n^2 - 1)}{4}, \qquad n = 2j + 1, \tag{1.1.7}$$

koja važi u n-dimenzionoj unitarnoj ireducibilnoj reprezentaciji, može da se interpretira kao uronjavanje dvodimenzione nekomutativne sfere u trodimenzioni nekomutativni ravan prostor, $(x^i)^2 = r^2$. Zbog toga definišemo koordinate tako da su proporcionalne generatorima,

$$x^i = \ell J^i = \frac{k\!\!\!^-}{r}\delta^i_a J_a, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.8}$$

Radijus sfere r je kvantovan, $4r^4 = k\!\!\!^-{}^2(n^2-1)$ i u limesu velikog n, on je $r^2 = \frac{k\!\!\!^- n}{2}$. Da bi se zadržala sferna simetrija, uvode se impulsi koji su takođe iz $\mathfrak{so}(3)$ algebre,

$$p_a = \frac{1}{ir} J_a. \tag{1.1.9}$$

Algebra impulsa ima strukturu Lijeve algebre, $[p_a, p_b] = \frac{1}{r}\epsilon_{abc}p_c$. Odavde se dobijaju strukturne konstante $C_{abc} = \frac{1}{r}\epsilon_{abc}$ iz kojih se (što ćemo kasnije da definišemo) dobijaju koneksija, Rimanov i Ričijev tenzor i skalar krvine. Kao i u slučaju nekomutativne ravni, odgovarajući izvodi e_a su dati kao komutatori, a bazisne 1-forme su im dualne, θ^a. Metrika na fazi sferi je euklidska. *Frame* elementi,

$$e^i_a = [p_a, x^j] = \frac{1}{r}\epsilon^i{}_{ja}x^j, \tag{1.1.10}$$

daju komponente inverzne metrike

$$g^{ij} = e^i_a\, e^j_b\, \delta^{ab} = \frac{1}{r^2}\left(r^2\delta^{ij} - \frac{1}{2}\{x^i, x^j\} + \frac{ik\!\!\!^-}{2r}\epsilon^{ijk}x_k\right). \tag{1.1.11}$$

Interesantna je antisimetričnost po indeksima i i j u linearnom članu po $k\!\!\!^-$. U limesu $k\!\!\!^- \to 0$ ovaj izraz se svodi na metriku na sferi. Fazi sfera daje konačan, diskretan model sferno-simetrične površi: u limesu $n \to \infty$ ona teži glatkoj sferi.

Generalizacija sa sfere na hiperboloid, odnosno sa $SO(3)$ na $SO(1,2)$ je pravolinijska u mnogim aspektima. Klasično, dvodimenzioni de Siterov prostor je definisan uronjavanjem u trodimenzioni ravan prostor relacijom

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2_{\mathrm{dS}_2}. \tag{1.1.12}$$

Grupe simetrije $SO(1,2)$ i $SO(2,1)$ su ekvivalentne. Prethodna relacija, uz zamenu vremenske i prostorne koordinate $x^0 \leftrightarrow x^2$ i znaka ispred $\alpha^2_{\mathrm{dS}_2}$, vodi do definicije anti de Siterovog prostora. Ovde navodimo pristup iz rada [16], a kasnije, u glavnom tekstu, ćemo se sresti sa drugom varijantom koja je publikovana u radu [17].

Konstrukcija *nekomutativnog de Siterovog prostora* dS_2 je analogna konstrukciji fazi sfere, [13], osim što metrika nije euklidska već metrika Minkovskog, η_{ab} sa signaturom $(-++)$. Iz komutacionih relacija $\mathfrak{so}(1,2)$ algebre

$$[K_a, K_b] = i\epsilon_{ab}{}^c\, K_c, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{1.1.13}$$

identifikujemo koordinate i impulse kao

$$x^i = \ell K^i\,, \qquad p_a = \frac{1}{i\alpha_{\mathrm{dS}_2}}\, K_a\ . \tag{1.1.14}$$

Odavde se dobija diferencijalna geometrija fazi dS_2 prostora koja je (do na različitu signaturu) analogna onoj koju smo našli u slučaju fazi S_2. *Frame* relacije su analogne odgovarajućim relacijama na fazi S_2,

$$e^i_a = [p_a, x^i] = \frac{1}{\alpha_{\mathrm{dS}_2}}\epsilon^i{}_{ja}x^j. \tag{1.1.15}$$

Međutim, situacija nije potpuno identična: klasičan dS prostor je nekompaktan kao i njegova grupa simetrije. To znači da je njegova unitarna ireducibilna reprezentacija beskonačnodimenziona. Grupa $SO(1,2)$ ili njena natkrivajuća $SU(1,1)$ ima tri serije ireducibilnih reprezentacija. One mogu da se označe kvantnim brojem h koji je određen vrednostima Kazimirovog operatora $C_2 = h(h-1)$. Serije su

- glavna neprekidna $T_\rho\,,\ \ h = \frac{1}{2} + i\rho\,,\ \ \rho \in \mathbb{R}\,,\ \ C_2 < 0,$
- komplementarna neprekidna $T_\sigma\,,\ \ h = \frac{1}{2} + \sigma\,,\ \ \sigma \in (0, \frac{1}{2}),\ \ C_2 < 0,$ i
- diskretna $T_l^{\pm}\,,\ \ h = -l = 1,\, \frac{3}{2}, 2, \dots,\ \ C_2 > 0.$

Na osnovu vrednosti Kazimirovog operatora i činjenice da je kosmološka konstanta pozitivna, odavde deluje logično da se fazi dS_2 definiše kao glavna neprekidna serija $SO(1,2)$. [2]

Da prokomentarišemo da u diskutovanim slučajevima sa maksimalnom simetrijom postoji određeni nesklad u broju koordinata i impulsa. Naime, tri „embedding" koordinate koje su uvedene nisu nezavisne. Na primer, kod fazi sfere je $(x^3)^2 = r^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2$ i $x^3 \sim [x^1, x^2]$, stoga možemo da kažemo da radimo sa dvodimenzionim prostorom. Sa druge strane, odgovarajući tangentni prostor je po konstrukciji trodimenzioni jer je vezan za broj impulsa p_a. Kod nekomutativnih prostora se pojam dimenzionalnosti odnosi na dimenziju tangentnog ili kotangentnog prostora.

Na prethodnim primerima smo videli da *frame* formalizam prirodno uključuje geometriju. Sada ćemo da napravimo pregled literature kao motivaciju za izbor algebre. Najviše nas zanimaju prostori sa sfernom simetrijom u četiri dimenzije. Akcenat stavljamo na crne rupe i kosmologiju zbog mogućeg poređenja sa astofizičarskim merenjima. Po analogiji sa fazi sferom formulisana je algebra nekomutativnih koordinata sa odgovarajućom simetrijom, [18]. Zatim, sa idejom da se nađe nekomutativna verzija Švarcšildove ili Švarcšild-de Siterove crne rupe analizirani su primeri prostora sa sfernom simetrijom bazirani na četvorodimenzionim algebrama sa diferencijalnim računom definisanim pomoću *moving frame* formalizma, [19]. To je urađeno nezavisno od reprezentacije, što znači da podjednako dobro opisuje algebre sa konačno i beskonačnodimenzionim reprezentacijama. *Frame* elementi, prilagođeni sfernoj simetriji, zavise samo od koordinata. Dobijeno je nekoliko interesantnih rešenja, ali nijedno od njih u komutativnom limesu ne sadrži Švarcšildovu crnu rupu. Autori, kao jednu od mogućnosti za postizanje takvog rešenja, predlažu da se poveća broj dimenzija polaznog prostora. Druga opcija je da se, zbog analogije nekomutativnosti i elektromagnetnog polja, u komutatore eksplicitno uključi elektromagnetni potencijal ili tenzor jačine polja, [20]. Nakon toga su takođe pomoću *frame* formalizma nađene dve familije sferno-simetričnih rešenja koje mogu da se uzmu kao ekstenzija statičkog i kosmološkog rešenja Ajnštajnovih jednačina, [21]. Ideja je bila da se fazi sfera proširi na ove četvorodimenzione prostore. Jedan od načina je da je algebra $\mathcal{A}$ generisana sa pet kordinata (koordinatama na fazi sferi dodate su r i t) ili pomoću pet impulsa uz jedan uslov - Kazimirovu relaciju. Iz ove algebre sledi diferencijalni račun iz kojeg se dobija metrika koja opisuje sferno-simetrični nestatički prostor. Mana je što dobijeni prostor nije prostorno homogen, a to je potreban uslov koji znamo iz kosmologije. U drugom pristupu algebra je bila definisana pomoću šest koordinata uz jedan uslov ili pomoću pet koordinata bez uslova. Na taj način su u klasičnom limesu dobijene sve statičke sferno-simetrične konfiguracije prostora. Nedostatak ovog pristupa je dodatna promenljiva koja može da se interpretira kao Kaluca-Klajn parametar koji meri unutrašnji prostor. Na sličan način kao u [21] su dobijene nekomutativne verzije FRW prostora pomoću algebre koja ima pet generatora, [22]. Dve verzije

[2] U radu [17] je dato poređenje fazi de Siterovog prostora u četiri dimenzije sa kosmološkim modelom i tu se jasno vidi da je moguće da se dS prostor definiše i preko diskretne serije.

fazi de Siterovog prostora sa dobrim komutativnim limesom metrike su prvi put razmatrane u [22]. Njima ćemo se detaljno baviti u poglavljima 6.2 i 6.3.

Želimo da naglasimo da u okviru nekomutativnosti postoje i drugi pristupi kosmologiji. U radu [23] je pokazano da deformacija koordinata pomoću Mojalovog proizvoda može da izazove fluktuacije u kosmičkom mikrotalasnom pozadinskom zračenju (CMB) i može da modifikuje disperzione relacije na malim rastojanjima. Kod [24] je napisano dejstvo za inflatonsko polje pomoću generalizovanog star-proizvoda i nađeni su efekti na CMB spektar. U [25] je posmatrano kako modifikovane disperzione relacije u svemiru u kome dominira zračenje mogu da vode do inflacije, bez potrebe za uvođenjem inflatonskog polja. Efekti Mojalove nekomutativnosti između „minisuperspace” varijabli [3] umesto prostornih koordinata su razmatrani u [26, 27]. Autori su našli talasne funkcije svemira tako što su rešili Viler-de Vitovu jednačinu i našli kvalitativne razlike u poređenju sa komutativnim slučajem.

Postoji pristup kosmologiji i preko matričnih modela. U radu [28] je pokazano da su fazi sfere rešenja IKKT (Ishibashi-Kawai-Kitazawa-Tsuchiya) matričnih modela Lorencovog tipa. Ta rešenja se korsite kao pojednostavljeni (tzv. „toy”) modeli zatvorene nekomutativne dvodimenzione kosmologije u kojima singulariteti velikog praska i velikog smrskavanja (eng. *crunch*) pojavljuju nakon uzimanja komutativnog limesa. Rešenja su izražena preko $N \times N$ matrica, gde vreme i prostor imaju diskretan spektar. Komutativni ili kontinualni limes odgovara $N \to \infty$. U [29] su diskutovana rotaciono invarijantna kosmološka rešenja IKKT-tipa matričnih modela u dimenzijama $d = 3, 5$. Nakon uzimanja kontinualnog (komutativnog) limesa, dobijena je $d-1$ dimenziona Poasonova mnogostrukost. Mnogostruskost ima indukovanu Lorencovu metriku koja može da se poveže sa zatvorenim, otvorenim ili statičkim prostorvremenom. Slučaj $d = 5$ je posebno važan jer su nađena rešenja u četiri dimenzije: de Siter i anti de Siter. Model kvantovane FRW kosmologije koji proizilazi iz IKKT matričnih modela je predložen u [30]. Skoro realistično rešenje opisuje homogeno i izotropno prostorvreme sa negativnom prostornom krivinom, $k = -1$. Zajedno sa geometrijom, modeli skalarnog polja, njegova kvantizacija i propagator su analizirani u radovima [31, 32, 33, 34]. Implikacije IKKT modela na kosmološke perturbacije i na gravitacione talase su diskutovane u [35].

Rezultati dobijeni u pristupu nekomutativnoj geometriji preko spektarlnog dejstva su sumirani u knjizi [36]. Diskutuju se, između ostalog, primene na modele ranog svemira, „slow-roll” model inflacije i neizotropne kosmologije.

1.2 Kvantne fluktuacije u kosmologiji

Kvantne fluktuacije se koriste u kosmologiji za objašnjenje formiranja struktura na velikim skalama (galaksija i klastera galaksija) u ranom svemiru. Fluktuacija polja je veličina koja je dobro definisana čak i za ona kvantna stanja koja ne mogu smisleno da se interpretiraju preko čestica. Za FLRW prostore sa pomoćnim poljem $\chi(\eta, \vec{x}) = a(\eta)\Phi(\eta, \vec{x})$, čije mode $v_k(\eta)$ definišu vakuum $|0\rangle$, istovremena korelaciona funkcija je data formulom,

$$\langle 0|\chi(\eta, \vec{x})\chi(\eta, \vec{y})|0\rangle = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{4\pi^2} |v_k(\eta)|^2 \frac{\sin kL}{kL}, \tag{1.2.1}$$

[3] U kvantnoj kosmologiji „minisuperspace” promenljive imaju ulogu koordinata u konfiguracionom prostoru.

gde je $L = |\vec{x} - \vec{y}|$ sopstveno (eng. *comoving*) rastojanje[4], [37]. Ova veličina se razlikuje od fizičkog rastojanja $L_p = a(\eta)L$. Glavni doprinos integrala (1.2.1) dolazi od talasnih brojeva $k \sim \frac{1}{L}$, tako da procenjujemo vrednost korelacione funkcije kao

$$\langle 0|\hat{\chi}(\eta, \vec{x})\hat{\chi}(\eta, \vec{y})|0\rangle \sim k^3 |v_k|^2. \tag{1.2.2}$$

Uobičajeni način da se definiše spektar fluktuacija je da se izdvoji diferencijal koji je bezdimenzioni,

$$\langle 0|\chi(\eta, \vec{x})\chi(\eta, \vec{y})|0\rangle = \int_0^\infty d(\log k)\, \Delta_\chi^2. \tag{1.2.3}$$

Spektar kvantnih fluktuacija pomoćnog polja χ i skalarnog polja Φ je

$$\Delta_\chi^2 = \frac{1}{2\pi^2} k^3 |v_k(\eta)|^2, \qquad \Delta_\Phi^2 = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{a(\eta)} k^3 |v_k(\eta)|^2. \tag{1.2.4}$$

Fluktuacije temperature u kosmičkom mikrotalasnom pozadinskom zračenju mere se skoro rutinski eksperimentima poput Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) i Planck, [38]. Količina podataka skupljenih od strane astrofizičara je sve veća, a podaci su sve precizniji, [39, 40]. Varijacije u temperaturi svedoče o sitnim fluktuacijama u gustini prvobitnog svemira, [41]. Ove fluktuacije, preko gravitacionih nestabilnosti, rastu u strukture na velikim skalama koje danas možemo da posmatramo u svemiru. Pretpostavlja se da se inflacija, rani period eksponencijalnog širenja u ranom svemiru, desila 10^{-34} s nakon velikog praska. Smatra se da je inflacija odgovorna kako za veliku nehomogenost svemira na velikim skalama, tako i za male fluktuacije koje su bile klice za formiranje struktura poput naše galaksije. Teorija inflacije podrazumeva postojanje epohe poput de Siterovog prostora, [42, 43]. Do sada je ostvaren napredak u perturbativnom pristupu na dS geometriji, i u okviru „in-in” formalizma [44] i pristupom preko talasnih funkcija, [45]. Osim toga, ako se granica kasnih vremena gleda sa stanovišta konformne simetrije, onda je moguć „bootstrap” pristup kosmološkim korelacionim funkcijama, [46, 47, 48].

1.3 Pregled

Nakon motivacije koju smo dobili sa više strana, predstavićemo problem koji želimo da rešimo. Na prvom mestu bismo hteli da ispitamo geometriju nekomutativnog de Siterovog prostora. Konkretno, interesuje nas konstrukcija i osobine geometrije fazi de Siterovog prostora izgrađenog na osnovu klasične simetrije u okviru *frame* formalizma. Zatim nas zanima da li na tom prostoru mogu da se reprezentuju polja (skalarno, spinorsko i gejdž) klasično i kvantno. Krajnji cilj je da, koristeći ovaj kosmološki model, dođemo do opservabilnih efekata u kosmologiji.

Navešćemo kratak pregled tema kojima se bavimo u ovoj tezi. Posle uvoda iz obične diferencijalne geometrije i definicije objekata izložili smo *frame* formalizam. Glavna ideja je da se nekomutativna diferencijalna geometrija izgradi po analogiji sa komutativnom verzijom. Ovim ćemo se baviti u uvodnoj glavi 2. Glava 3 je posvećena h-deformisanoj ravni Lobačevkog. Tu ćemo da rešimo svojstveni problem laplasijana kako komutativno, tako i nekomutativno. Razlog analize ovog prostora je taj što se Vikovom rotacijom svodi na de Siterov prostor u dve

[4]U standardnoj kosmologiji, sopstveno i fizičko (ili pravo) rastojanje su pojmovi koji definišu rastojanje između objekata. Sopstveno rastojanje predstavlja rastojanje koje se ne menja sa vremenom (širenjem svemira) osim usled lokalnih faktora kao što je kretanje galaksija unutar klastera. Fizičko rastojanje odgovara udaljenosti između objekata uzimajući u obzir širenje svemira. Ova dva rastojanja su definisana tako da su u sadašnjem trenutku vremenu jednaka.

dimenzije koji takođe analiziramo. Za deo tog poglavlja se može reći da je nov, jer je sagledan na drugi način i predstavlja uvod za analizu (fazi) dS_2 prostora. U glavi 4 ćemo da navedemo detalje o de Siterovoj grupi simetrije i reprezentacijama koje ćemo da koristimo u radu. Glavu 5 posvećujemo klasičnom de Siterovom prostoru. U dva različita koordinatna sistema ćemo da nađemo nekoliko skupova moda koje definišu različite vakuume. Pokazaćemo da su svi de Siter invarijantni i da pripadaju tzv. familiji α-vakuuma. Zatim, u glavi 6 ćemo se detaljno baviti modelima fazi de Siterovog prostora u dve i četiri dimenzije. Koordinate i impulse biramo tako da budu elementi algebre odgovarajuće grupe simetrije. Videćemo kako na osnovu toga dobijamo elemente diferencijalne algebre i nama najvažniji objekat fazi lapalsijan. Zatim ćemo u glavi 7 pokazati kako dolazimo do talasnih funkcija koje su svojstvene funkcije kvantnomehaničkog laplasijana i kakav mu je spektar. Takođe ćemo da nađemo svojstvene funkcije i spektar energije. U glavi 8 dolazimo do glavnih rezultata ove disertacije. Prvo ćemo operatorski da nađemo svojstvene funkcije fazi laplasijana u dve i četiri dimenzije. Zatim ćemo da iskoristimo izraze za generatore algebre u konkretnoj reprezentaciji i da nađemo opšte rešenje Klajn-Gordonove jednačine. Videćemo da u slučaju prostora čija je dimenzija veća od dva postoji dodatna unutrašnja struktura koju komutativna rešenja ne poseduju. Takođe ćemo da analiziramo dalamberijan, operator koji se dobija variranjem dejstva. Uporedićemo svojstvene funkcije ovog operatora sa onima koje smo dobili kod laplasijana. Za kraj ćemo dosta detaljno da prikažemo otvorene pravce daljih istraživanja u glavi 9 i da izvedemo zaključak u glavi 10.

2 Diferencijalna geometrija

Ovde navodimo kratak pregled obične diferencijalne geometrije naglašavajući aspekte koji mogu da se uopšte na nekomutativni slučaj, [49],[11]. Neka je V glatka, orijentisana, realna m-dimenziona mnogostrukost bez granice i neka je $\mathcal{C}(V)$ komutativna, asocijativna algebra glatkih funkcija sa realnim vrednostima na mnogostrukosti V. Zbir i proizvod dve funkcije definisan je zbirom i proizvodom vrednosti funkcije u datoj tački, a pravila komutativnosti, distributivnosti i asocijativnosti se prenose iz polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Svaka takva mnogostrukost V može da se uroni u euklidski prostor dovoljno velike dimenzije $n > m$. Neka je X glatko vektorsko polje na V. Vektorski prostor $\mathcal{X}(V)$ svih takvih X je levi $\mathcal{C}(V)$ modul, što znači da ako je $f \in \mathcal{C}(V)$ i $X \in \mathcal{X}(V)$ tada je $fX \in \mathcal{X}(V)$. Neka je ∂_i prirodan bazis za vektore u uronjenom prostoru $\mathbb{R}^n$, tako da vektor X možemo da razvijemo po njemu, $X = X^i e_i$. Ako se lokalno definiše slobodno padajući referentni sistem (eng. *moving frame*), e_α, $1 \leq \alpha \leq m$ na V tako da svako vektorsko polje na $X \in \mathcal{X}(V)$ može da se napiše kao linearna kombinacija $X = X^\alpha e_\alpha$, za takvu mnogostrukost se kaže da je paralelizabilna.
Lijeva zagrada $[X, Y]$ dva elementa X i Y iz $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ definisana kao

$$[X, Y]f = (XY - YX)f = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j f \tag{2.0.1}$$

je takođe element $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Specijalno, kada je mnogostrukost V paralelizabilna Lijevu zagradu možemo da pišemo kao

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta}\, e_\gamma, \tag{2.0.2}$$

sa strukturnim konstantama $C^\gamma{}_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}(V)$. Generalno, ova jednačina može da se napiše jedino lokalno. Obrnuto tvrđenje od ovog iznad je poznato kao Frobenijusova teorema: ako je m linearno nezavisnih elemenata $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ zatvoreno na Lijeve zagrade tada postoji *frame* za mnogostrukost V i $\mathcal{C}(V)$-modul generisan njima je jednak sa $\mathcal{X}(V)$. Važna osobina vektorskog polja je da ono može da se definiše kao izvod algebre $\mathcal{C}(V)$, linearno preslikavanje $X : \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$ koje zadovoljava Lajbnicovo pravilo

$$X(fg) = (Xf)g + fXg. \tag{2.0.3}$$

Ovo nam dozvoljava da identifikujemo vektorski prostor sa izvodima algebre, $\mathcal{X}(V) \equiv \mathrm{Der}(\mathcal{C}(V))$. To će nam omogućiti da generalizujemo pojam vektorskog polja na nekomutativan slučaj.
Diferencijalna forma reda p ili *p-forma* je p-linearno potpuno antisimetrično preslikavanje vektorskog prostora $\mathcal{X}(V)$ na algebru $\mathcal{C}(V)$. Neka je $f \in \mathcal{C}(V)$ i neka je p vektorskih polja $X_1, X_2 \ldots, X_p$, tada je $\alpha(fX_1, \ldots, X_p) = f\alpha(X_1, \ldots, X_p)$ i vrednost $\alpha(X_1, \ldots, X_p)$ u tački mnogostrukosti V zavisi jedino od vrednosti vektorskih polja u toj tački. Skup svih p-formi $\Omega^p(V)$ je $\mathcal{C}(V)$-modul:

$$(f\alpha)(X_1, \ldots, X_p) = (\alpha f)(X_1, \ldots, X_p) = f(\alpha(X_1, \ldots, X_p)). \tag{2.0.4}$$

Spoljašnji proizvod $\alpha \wedge \beta$ sa $\alpha \in \Omega^p(V)$ i $\beta \in \Omega^q(V)$ je $p+q$ forma, $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(V)$, definisana kao

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum \epsilon(i, j)\, \alpha(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})\, \beta(X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}), \tag{2.0.5}$$

gde se sumira po svim mogućim permutacijama $(1,\ldots,p+q)$ u $(i_1,\ldots,i_p)$ i $(j_1,\ldots,j_p)$, a $\epsilon(i,j)$ označava te permutacije. Ovaj proizvod je gradirano komutativan, $\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha$, i najčešće se jednostavnije piše kao $\alpha\wedge\beta\equiv\alpha\beta$.
Spoljašnji izvod ili *diferencijal* $d\alpha$ p-forme je definisan formulom

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0,\ldots,X_p)=&\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i(\alpha(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p))+\\ &\frac{1}{p+1}\sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p). \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

Kapica na simbolu znači da je on izostavljen. U slučaju 0-forme umesto α pisaćemo f pošto su 0-forme funkcije, elementi algebre $\mathcal{C}(V)$. Na njih spoljašnji izvod deluje kao

$$df(X)=Xf. \tag{2.0.7}$$

Spoljašnji izvod zadovoljava gradirano Lajbnicovo pravilo,

$$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta, \tag{2.0.8}$$

gde p u stepenu potiče od toga što je $\alpha\in\Omega^p(V)$. Iz definicije (2.0.6) sledi da je diferencijal zadovoljava $d^2=0$. Možemo da iskoristimo d da damo drugu definiciju p-forme. Krećemo od toga da je $\Omega^0(V)=\mathcal{C}(V)$. Dalje koristimo (2.0.7) da definišemo df za svako $f\in\mathcal{C}(V)$ i definišemo $\Omega^1(V)$ da bude $\mathcal{C}(V)$-bimodul generisan pomoću df u skladu sa $fdg-dgf=0$. Onda je p-forma element $\mathcal{C}(V)$-modula generisana spoljašnjim proizvodom p elemenata iz $\Omega^1(V)$.
Skup 1-formi θ^α dualnih e_α određeni su jednačinama

$$\theta^\alpha(e_\beta)=\delta^\alpha_\beta. \tag{2.0.9}$$

Iz (2.0.7) vidimo da diferencijal funkcije može da se napiše kao

$$df=(e_\alpha f)\theta^\alpha. \tag{2.0.10}$$

Iz komutacionih relacija za e_α sledi da spoljašnji izvod bazisnih 1-formi može da se napiše u obliku

$$d\theta^\alpha=-\frac{1}{2}C^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta^\beta\theta^\gamma, \tag{2.0.11}$$

i ove jednačine se zovu strukturne jednačine.
Tangentno raslojenje TV mnogostrukosti V, dobijeno tako što je svakoj tački mnogostrukosti pridružen tangentni vektorski prostor, je vektorsko raslojenje sa grupnom strukturom $GL(n,\mathbb{R})$ sa slojem $F=\mathbb{R}^n$. Svaki vektor može da se napiše preko prirodnog bazisa ∂_μ vektora na $\mathbb{R}^n$ (koordinatni bazis), $X=X^\mu\partial_\mu$. Svaki element „moving frame" može da se izrazi preko lokalnog bazisa, $e_\alpha=e^\mu_\alpha\,\partial_\mu$. Prelazak sa ∂_μ na ∂_α je primer promene bazisa.
Slično se definiše i kotangentno raslojenje mnogostrukosti, T^*V. To je vektorsko raslojenje sa grupnom strukturom $GL(n,\mathbb{R})$ i slojem $F=\mathbb{R}^n$. Izdvaja se prirodan bazis dx^μ dualan sa ∂_μ i može da se napiše veza bazisa, $\theta^\alpha=\theta^\alpha_\mu\,dx^\mu$.
Metrika g može da se definiše kao $\mathcal{C}(V)$-linearno, nedegenerisano, simetrično preslikavanje $g:\Omega^1(V)\otimes_{\mathcal{C}(V)}\Omega^1(V)\to\mathcal{C}(V)$. Neka su $g^{\alpha\beta}$ komponente standardne euklidske ili Lorencove metrike u $\mathbb{R}^n$. Kod paralelizabilne mnogostrukosti V metrika može da se definiše uslovom

$$g(\theta^\alpha\otimes\theta^\beta)=g^{\alpha\beta}. \tag{2.0.12}$$

Koristeći slobodno padajući sistem može da se uvede *linearna koneksija* $\omega^\alpha_{\ \beta}$ kao 1-forma na V sa vrednostima u Lijevoj algebri $so(n)$. Ona zadovoljava sledeće strukturne jednačine

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha_{\ \beta} \wedge \theta^\beta, \tag{2.0.13}$$

$$\Omega^\alpha_{\ \beta} = d\omega^\alpha_{\ \beta} + \omega^\alpha_{\ \gamma} \wedge \omega^\gamma_{\ \beta}, \tag{2.0.14}$$

gde 2-forma torzija Θ^α i 2-forma krivina $\Omega^\alpha_{\ \beta}$ zadovoljavaju Bjankijeve identitete,

$$d\Theta^\alpha + \omega^\alpha_{\ \beta} \wedge \Theta^\beta = \Omega^\alpha_{\ \beta} \wedge \theta^\beta, \qquad d\Omega^\alpha_{\ \beta} + \omega^\alpha_{\ \gamma} \wedge \Omega^\gamma_{\ \beta} - \Omega^\alpha_{\ \gamma} \wedge \omega^\gamma_{\ \beta} = 0. \tag{2.0.15}$$

Pretpostavićemo da je torzija nula, $\Theta^\alpha = 0$; u tom slučaju postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.0.13) pa, uz (2.0.11), koneksija može da se izrazi preko strukturnih funkcija,

$$\omega^\alpha_{\ \beta} = -\frac{1}{2}\left(C^\alpha_{\ \beta\gamma} - C_{\gamma\ \beta}^{\ \alpha} - C_{\beta\gamma}^{\ \ \alpha}\right)\theta^\alpha. \tag{2.0.16}$$

Vektorsko polje X na V može da se razvije po elementima e_α, $X = X^\alpha e_\alpha$. Tada *kovarijantni izvod* DX može da se definiše lokalno

$$DX = (DX^\alpha) \otimes e_\alpha, \qquad DX^\alpha = dX^\alpha + \omega^\alpha_{\ \beta} X^\beta. \tag{2.0.17}$$

Koristeći metriku možemo da definišemo *Hodž dualno preslikavanje* $* : \Omega^p(V) \to \Omega^{n-p}(V)$,

$$*(\theta^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_p}) = \frac{1}{(n-p)!} g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_p\beta_p}\, \epsilon_{\beta_1\ldots\beta_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+n}} \theta^{\alpha_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_{p+n}}, \qquad p \leq n. \tag{2.0.18}$$

Ovde je $\epsilon_{\beta_1\ldots\beta_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+n}}$ Levi-Čivita simbol. Za $\alpha \in \Omega^p(V)$ važi $**\alpha = (-1)^{(n+1)p}\alpha$. Dalje, koristeći ovo preslikavanje možemo da definišemo i *kodiferencijal* $\delta : \Omega^p(V) \to \Omega^{p-1}(V)$,

$$\delta\alpha = (-1)^{np+n+1} * d * . \tag{2.0.19}$$

Preslikavanje nije gradirani izvod, međutim, za njega važi $\delta^2 = 0$. Koristeći diferencijal d i kodiferencijal δ možemo da definišemo *laplasijan*,

$$\Delta = d\delta + \delta d, \tag{2.0.20}$$

koji preslikava $\Omega^p(V)$ na sebe. Laplasijan možemo da napišemo i kao $\Delta = (d + \delta)^2$, gde je $d + \delta$ poznat kao Keler-Dirakov operator. Razmotrimo sada realno skalarno polje $\phi \in \mathcal{C}(V)$. Za slobodno skalarno polje jednačine kretanja se dobijaju iz dejstva

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2}\int dx\, D_\alpha\phi\, D^\alpha\phi = \frac{1}{2}\int dx\, \phi\, \Delta\phi, \tag{2.0.21}$$

gde je dx invarijantan element zapremine na V u odnosu na neku metriku. Laplasijan (2.0.20) postaje gejdž kovarijantan, $\Delta = -D_\alpha D^\alpha$. U slučaju da mnogostrukost V ima granicu, pretpostavljamo da polje na njoj glatko ide u nulu. Ako polje ima masu μ, dodajemo maseni član u dejstvo. Za uključivanje interakcije dejstvu dodajemo član sa funkcijom $U(\phi)$ čiji je stepen po ϕ viši nego kvadratni. Ako postoji spoljašnji izvor J, i njega treba uključiti, tako da je dejstvo,

$$S[\phi, J] = \frac{1}{2}\int dx\, \phi\, (\Delta + \mu^2)\phi + \int dx\, U(\phi) + \int dx\, J\phi. \tag{2.0.22}$$

Klasična jednačina kretanja je Klajn-Gordonova koja se dobija iz uslova da je varijacija dejstva S po polju ϕ jednaka nuli, $\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$,

$$(\Delta + \mu)\phi + U' + J = 0, \qquad U' = \frac{dU}{d\phi}. \tag{2.0.23}$$

2.1 Nekomutativni *frame* formalizam

Kao što smo pomenuli u uvodu, naš zadatak je da razmatramo nekomutativnu verziju de Siterovog prostora. Za to su nam neophodni elementi (nekomutativne) diferencijalne geometrije. Diferencijalna geometrija na fazi de Siterovom (fazi dS) prostoru diskutovana je u radovima [22, 50]. Glavna ideja je da se ona izgradi po bliskoj analogiji sa komutativnom geometrijom, koju smo uveli. Ona je, u okviru *frame* formalizma, potpuno definisana operatorima impulsa p_α i njihovom algebrom. Intuitivno rečeno, impulsi generišu infinitezimalne translacije. Oni ne moraju nužno da pripadaju algebri prostorvremena $\mathcal{A}$, što je i slučaj kod komutativnih prostora. Obično se uzima da su p_α antihermitski. Ova pretpostavka je u knjizi [11] nazvana „uslov realnosti": to znači da *frame* izvodi preslikavaju realne funkcije (tj. hermitske operatore) u realne funkcije. Da pomenemo da, sa druge strane, *frame* izvodi u komutativnoj geometriji nisu nužno hermitski. U kvantnoj mehanici fazni prostor se sastoji iz komutativnih koordinata x^μ i impulsa $\hbar\, p_\alpha = \delta^\mu_\alpha \partial_\mu$ za koje smo ovde uzeli da su antihermitski. Dejstvo impulsa p_α na elemente algebre koordinata $f(x) \in \mathcal{A}$ definiše izvode

$$[p_\alpha, f] = e_\alpha f = \delta^\mu_\alpha\, \partial_\mu f, \tag{2.1.1}$$

i specijalno

$$[p_\alpha, x^\mu] = \delta^\mu_\alpha. \tag{2.1.2}$$

Ovo može jasnije da se vidi koristeći eksplicitno Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ na kom reprezentacija algebre deluje: izvodi se javljaju kao impulsi. Na potpuno analogan način može da se interpretiraju *frame* izvodi e_α definisani u Kartanovoj *frame* geometriji,

$$e_\alpha = e^\mu_\alpha(x)\, \partial_\mu, \tag{2.1.3}$$

kao impulsi konjugovani koordinatama (ponovo pretpostavljajući pridruženo dejstvo na funkcijama koordinata). Kanonski komutatori u gravitacionom polju se menjaju,

$$[p_\alpha, x^\mu] = e_\alpha x^\mu = e^\mu_\alpha, \tag{2.1.4}$$

i karakterizuju zakrivljen prostor pošto generalno e_α ne komutiraju, $[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta}(x)\, e_\gamma$. Ova relacija može da se prepiše kao komutator impulsa

$$[p_\alpha, p_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta}(x)\, p_\gamma, \tag{2.1.5}$$

koji deluje u pridruženoj reprezentaciji na proizvoljnu funkciju $f(x)$. Sasvim prirodno, nekomutativnost u impulsnom prostoru je ekvivalentna zakrivljenosti u koordinatnom prostoru. Zbog klasične dualnosti između koordinate i impulsa, nekomutativnost u koordinatnom prostoru je onda povezana sa zakrivljenošću u impulsnom prostoru, pa je pretpostavka da su zakrivljenost i nekomutativnost dva aspekta iste pojave.

Da napomenemo da nije jednostavno da se prenesu fizički i geometrijski zahtevi sa komutativnog na nekomutativni prostor. Posebno delikatno pitanje u nekomutativnoj geometriji je broj dimenzija. Za opisivanje tačke na komutativnoj mnogostrukosti potrebno je $n \in \mathbb{R}$ parametara, a taj broj istovremeno predstavlja dimenziju tangentnog prostora i svaki vektor može da se razvije po bazisu kao $X = X^\mu(x)\, \partial_\mu$. Fazni prostor ima $2n$ dimenzija. U nekomutativnom prostoru brojanje dimenzija je drugačije. Da bi se stekao utisak o tome, razmatramo jednostavan primer iz [22] - prostor kompleksnih $2{\times}2$ matrica, M_2. Kao linearni prostor, on ima 4 kompleksne i 8 realnih dimenzija. Potprostor hermitskih matrica ima 4 realne dimenzije, pa je pogodan bazis $\{\sigma^i, \mathbb{I}\}$, gde su σ^i Paulijeve matrice. Ako razmatramo skup M_2 kao algebru, dovoljne su dve Paulijeve matrice da je generišu: imamo da je $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{I}$ i $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$. U ovom slučaju algebra ima 2 generatora tako da možemo da zaključimo da je njena dimenzija 2. Razmotrimo unutrašnje izvode $\{X\}$ na matričnom prostoru M_2,

$$X_p f = [p, f], \qquad p \in M_2. \tag{2.1.6}$$

Vidimo da je njegova dimenzija 3 pošto je $[\mathbb{I}, f] = 0$. Na nekomutativnom prostoru fX nije izvod uporedo sa X zato što ne zadovoljava Lajbnicovo pravilo. Stoga, da bi se odredio broj dimenzija tangentnog prostora potrebno je prebrojati impulse p kao linearni prostor na realnim ili kompleksnim brojevima. Obrnuto, dimenzija tangentnog prostora može da se razlikuje od dimenzije algebre (broja njenih generatora). Zaključujemo da pojam dimenzije nema precizno značenje i definišemo ge preko komutativnog limesa date nekomutativne geometrije. Pored toga, želimo da interpretiramo određenu algebru kao nekomutativni prostor nezavisno od njegove reprezentacije, gde je dimenzija povezana sa dimenzijom reprezentacije.

Diferencijal d definišemo ograničavajući se na podskup $\{e_\alpha\}$ svih izvoda, time definišemo tangentni prostor. Na funkcije $f \in \mathcal{A}$ deluje kao

$$df = (e_\alpha f)\, \theta^\alpha . \tag{2.1.7}$$

Diferencijal je 1-forma, preslikava vektorska polja u funkcije. Pretpostavićemo da je $d^2 = 0$. Skup 1-formi θ^α obrazuje bazis u kontangentnom prostoru dualan sa e_α, $\theta^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Dualnost implicira da 1-forme komutiraju sa proizvoljnim elementom algebre,

$$[f, \theta^a](e_\beta) = f\theta^\alpha(e_\beta) - \theta^\alpha(e_\beta) f = 0. \tag{2.1.8}$$

Vektorska polja uvek mogu da budu data kao komutatori (2.1.6), a impulsi mogu, ali ne moraju, da pripadaju algebri koordinata $\mathcal{A}$. Pošto koordinate i impulsi zajedno generišu fazni prostor, neobična osobina je da njegova dimenzija generalno nije duplo veća od dimenzije prostorvremena. Ovo dolazi od toga što koordinate ne komutiraju. Na primer, za Hajzenbergovu algebru, odnosno dvodimenzioni Mojalov prostor, gde je $[x, y] = i$, za impulse možemo da uzmemo $p_x = iy$, $p_y = -ix$ i dobijemo $[p_i, x^j] = \delta^j_i$ ravan *frame*, tako da se fazni prostor poklapa sa koordinatnim.

Iz definicije sledi da spoljašnji izvod df elementa algebre $\mathcal{A}$ može da se napiše preko komutatora,

$$df = -[\theta, f], \qquad \theta = -p_\alpha \theta^\alpha. \tag{2.1.9}$$

Dejstvo d može da se proširi na 1-forme, može da se uvede spoljašnje množenje. Kao što je prikazano u knjizi [11], konzistentan način da se uvede spoljašnji proizvod je da se definiše

$$\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \equiv \theta^\alpha\theta^\beta = P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\, \theta^\gamma\theta^\delta , \qquad d\theta^\alpha = -\frac{1}{2} C^\alpha{}_{\beta\gamma}\, \theta^\beta\theta^\gamma. \tag{2.1.10}$$

Pokazaćemo da izbor impulsa nije proizvoljan. Delovanjem sa d na izraz (2.1.9), imamo

$$d(\theta f - f\theta) = d\theta f - \theta df - df\theta - f d\theta = [d\theta, f] + \theta[\theta, f] + [\theta, f]\theta = [d\theta + \theta^2, f]. \tag{2.1.11}$$

Kako je $d\theta + \theta^2 \in \Omega^2(\mathcal{A})$, možemo da je zapišemo u obliku

$$d\theta + \theta^2 = -\frac{1}{2} K_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha\theta^\beta, \tag{2.1.12}$$

pa se nakon vraćanja $\theta = -p_\alpha\theta^\alpha$ i korišćenjem razvoja (2.1.10) dobija

$$2\, p_\alpha\, p_\beta + C^\lambda{}_{\gamma\delta} P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}\, p_\lambda + K_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.1.13}$$

Zamenom $C^{\lambda}{}_{\gamma\delta}P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta} = C^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ i $p_\alpha\, p_\beta = P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}\, p_\gamma\, p_\delta$, dobijamo relaciju koju zadovoljavaju impulsi,

$$2\, P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + C^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\, p_\lambda + K_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.1.14}$$

gde su $P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}$, $C^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ i $K_{\alpha\beta}$ konstante. U slučaju koji mi razmatramo, θ^α antikomutiraju, što odgovara

$$P^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta\right). \tag{2.1.15}$$

Vidimo da diferencijalni račun nije jedinstven; svaki izbor impulsa konzistentan sa (2.1.14) daje različito d. Ako pretpostavimo da su komponente metrike konstante u *frame* bazisu

$$g^{\alpha\beta} = g(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta) = \eta^{\alpha\beta}, \tag{2.1.16}$$

onda možemo θ^α da interpretiramo kao „moving frame”.

Da bi se definisao laplasijan $\triangle$ potreban nam je Hodž-dual $*$ i kodiferencijal δ. Nekomutativni kodiferencijal δ je definisan kao odgovarajući komutativni operator: njegovo dejstvo na p-forme je $\delta = (-1)^{np+n+1} * d\, *$, gde je n dimenzija kotangentnog prostora. Nekomutativni Hodž-dual se razlikuje od standardne definicije jedino kada 1-forme ne antikomutairaju, što je na primer slučaj kod skraćene (eng. *truncated*) Hajzenbergove algebre, [51]. Na prostorima koje ćemo raditi definicija je pravolinijska generalizacija komutativnog operatora. Laplasijan je dat izrazom

$$\triangle = d\delta + \delta d\,. \tag{2.1.17}$$

Kao i u komutativnom slučaju 2-forma krivine je definisana preko (2.0.14). Takođe važe definicije torzije (2.0.13) i koneksije (2.0.16) koje smo uveli kod standardne diferencijalne geometrije.

3 Nekomutativna ravan Lobačevskog

U ovoj glavi prvo ćemo da razmatramo komutativnu, a zatim i nekomutativnu h-deformisanu ravan Lobačevskog. Krenućemo sa navođenjem nekih od rezultata koji su publikovani u radovima [52, 53, 54] - elementima diferencijalne geometrije i svojstvenim funkcijama laplasijana. Zatim ćemo da nađemo svojstvene funkcije na drugi način. Nakon toga ćemo da uvedemo nove koordinate i odgovarajuće izvode i 1-forme, na osnovu kojih ćemo da nađemo laplasijan i njegove svojstvene funkcije u tim koordinatama. Motivacija za detaljnu analizu ovog prostora je činjenica da se on „do na Vikovu rotaciju” razlikuje od de Siterovog prostora u dve dimenzije koji ćemo da uvedemo u poglavlju 6.1. Samim tim ćemo naše rezultate da poredimo sa rezultatima iz ovog poglavlja.

Kvantne ravni su jednostavni primeri kvantnih prostora i dosta su razmatrani devedesetih godina prošlog veka. One nastaju kao deformacije ravni na kojima kvantne grupe deluju kovarijantno. Jedna od kvantnih ravni, nazvana q-deformisana kvantna ravan, definiše se kao asocijativna algebra generisana nekomutativnim elementima, koordinatama $\hat{u}$ i $\hat{v}$, takvim da je

$$\hat{u}\hat{v} = q\hat{v}\hat{u}. \tag{3.0.1}$$

Grupa simetrije diferencijalnog računa na ovoj ravni je kvantna grupa $GL_q(2)$. Druga kvantna ravan, poznata kao h-deformisana kvantna ravan, definisana je kao asocijativna algebra generisana sa dva nekomutirajuća elementa $\hat{u}$ i $\hat{v}$ takva da je

$$\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u} = \tilde{h}\hat{v}^2, \tag{3.0.2}$$

a grupa simetrije diferencijalnog računa je $GL_h(2)$. Proširena h-deformisana kvantna ravan je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ generisana sa $\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}^{-1}, \hat{v}^{-1}$ koji zadovoljavaju jednačinu (3.0.2). Proširena h-deformisana ravan je takođe interesantna sa stanovišta geometrije pošto metrika i linearna koneksija imaju interesantan komutativan limes. Diferencijalni račun na ovoj ravni je prirodniji ako uvedemo

$$\hat{x} = \hat{u}\hat{v}^{-1} + \frac{1}{2}\tilde{h}, \qquad \hat{y} = \hat{v}^{-2} \tag{3.0.3}$$

i tada komutaciona relacija postaje

$$[\hat{x}, \hat{y}] = -2\tilde{h}\hat{y}. \tag{3.0.4}$$

Ovakav izbor generatora je koristan zbog razmatranja komutativnog limesa. Ako su $\hat{u}$ i $\hat{v}$ hermitski, onda su i $\hat{x}$ i $\hat{y}$, a iz toga sledi da je $\tilde{h} \in i\mathbb{R}$. U nastavku ćemo parametar deformacije $\tilde{h}$ zameniti sa ih, gde je novouvedeno h realno. Komutaciona relacija je sada

$$[\hat{x}, \hat{y}] = -2ih\hat{y}. \tag{3.0.5}$$

Diferencijalni račun definišemo uvođenjem 1-formi θ^a,

$$\theta^1 = \frac{1}{y}dx, \qquad \theta^2 = \frac{1}{y}dy, \tag{3.0.6}$$

koje komutiraju sa elementima algebre

$$f\theta^a = \theta^a f, \qquad f \in \mathcal{A}, \tag{3.0.7}$$

i za koje važi

$$(\theta^1)^2 = 0, \qquad (\theta^2)^2 = 0, \qquad \theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1 = 0. \tag{3.0.8}$$

Vidimo da možemo da zapišemo kao $\theta^a\theta^b = P^{ab}{}_{cd}\theta^c\theta^d$, gde su $P^{ab}{}_{cd}\theta^c\theta^d$ dati izrazom (2.1.15). Uvodi se metrika $g(\theta^a \otimes \theta^b) = \delta^{ab}$, gde je δ^{ab} metrika u euklidskom prostoru. Impulsi su elementi algebre

$$\hat{p}_1 = \frac{\hat{y}}{2ih}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{\hat{x}}{2ih}, \tag{3.0.9}$$

takvi da je $[\hat{p}_1, \hat{p}_2] = \hat{p}_1$. Strukturne konstante su realni brojevi,

$$C^1{}_{12} = -C^1{}_{21} = 1, \qquad C^2{}_{ab} = 0. \tag{3.0.10}$$

Odavde računamo 1-formu koneksiju $\omega^a{}_b$ i 2-formu krivinu $\Omega^a{}_b$. Njihove nenulte komponente su

$$\omega^1{}_2 = -\omega^2{}_1 = \theta^1, \qquad -\Omega^1{}_2 = \Omega^2{}_1 = \theta^1\theta^2. \tag{3.0.11}$$

sa $\omega_{112} = -\omega_{211} = 1$ i $\omega_{121} = 0$, koje smo dobili iz uslova da je torzija nula. Zatim, za Rimanov tenzor dobijamo nenultu komponentu $R_{1212} = -1$, a za Ričijev tenzor nenulte su $R_{11} = R_{22} = -1$, tako da možemo da napišemo da je $R_{ab} = -\delta_{ab}$. Skalarna krivina je konstantna i negativna, $R = -2$. Ova geometrija je nekomutativna verzija Poenkareove (Poincaré) poluravni. Zanimljivo je da vidimo strukturu h-deformisane kvantne ravni u komutativnom limesu. Preko komutativnog limesa $\mathtt{x}, \mathtt{y}$[1] generatora $\hat{x}, \hat{y}$ algebre $\mathcal{A}$ i odgovarajućeg komutativnog limesa *frame* elemenata $\tilde{\theta}^a$, metrika je data elementom dužine,

$$ds^2 = (\tilde{\theta}^1)^2 + (\tilde{\theta}^2)^2 = \frac{1}{\mathtt{y}^2}(d\mathtt{x}^2 + d\mathtt{y}^2), \tag{3.0.12}$$

što je zaista metrika Poenkareove poluravni. Izvodi su dualni 1-formama θ^a,

$$e_1\hat{x} = [\hat{p}_1, \hat{x}] = \hat{y}, \qquad e_2\hat{x} = [\hat{p}_2, \hat{x}] = 0, \tag{3.0.13}$$

$$e_1\hat{y} = [\hat{p}_1, \hat{y}] = 0, \qquad e_2\hat{y} = [\hat{p}_2, \hat{y}] = -\hat{y}. \tag{3.0.14}$$

Kao i u klasičnoj geometriji možemo da uvedemo Hodž dualni operator na $\Omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \oplus \Omega^1 \oplus \Omega^2$. Redom, na funkcije, 1- i 2-forme deluje kao

$$*1 = \theta^1\theta^2, \qquad *\theta^1 = \theta^2, \qquad *\theta^2 = -\theta^1, \qquad *\theta^1\theta^2 = 1, \tag{3.0.15}$$

gde važi $** = (-1)^{p(2-p)}$. U ovom slučaju, p uzima vrednosti $0, 1, 2$ u zavisnosti od toga da li se operacija vrši na funkciji, 1- ili 2-formi. Dalje, kodiferencijal δ deluje na p-formu kao

$$\delta\omega = (-1)^{2(p+1)+1} * d * \omega, \tag{3.0.16}$$

tako da na funkciju, 1-forme i 2-formu deluje na sledeći način

$$\delta f = 0, \qquad \delta\theta^1 = 0, \qquad \delta\theta^2 = -1, \qquad \delta(\theta^1\theta^2) = 0. \tag{3.0.17}$$

[1]Veličine koje se odnose na komutativnu ravan, $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ i $\mathtt{z}$, pišemo drugačijim fontom od nekomutativnih koordinata koje označavamo tako što dodamo ˆ iznad oznake.

Laplasijan se definiše kao $-\Delta = \delta d + d\delta$, što može da se zapiše preko izvoda kao

$$-\Delta\phi = (e_1^2 + e_2^2 + e_2)\phi = [\hat{p}_1, [\hat{p}_1, \phi]] + [\hat{p}_2, [\hat{p}_2, \phi]] + [\hat{p}_2, \phi], \qquad \phi \in \mathcal{A}. \tag{3.0.18}$$

Neka je $\phi(\hat{x}, \hat{y}) = f(\hat{x})g(\hat{y})$ funkcija koordinata. Pre nego što krenemo da rešavamo svojstveni problem laplasijana na nešto drugačiji način nego u radu [53], ukratko ćemo da obrazložimo kako je to prvobitno urađeno. Komutativni limes laplasijana je

$$\lim_{h\to 0} \Delta = \tilde{\Delta} = -\mathtt{y}^2(\partial_\mathtt{x}^2 + \partial_\mathtt{y}^2). \tag{3.0.19}$$

On se poklapa sa klasičnim laplasijanom ravni Lobačevskog izračunatim na osnovu metrike (3.0.12) preko formule

$$-\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu). \tag{3.0.20}$$

Svojstveni problem ovog laplsijana

$$\tilde{\Delta}\, \phi(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \lambda_{k,\kappa}\, \phi(\mathtt{x}, \mathtt{y}), \tag{3.0.21}$$

se rešava razdvajanjem promenljivih, $\phi(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = f(\mathtt{x})g(\mathtt{y})$. Od svojstvene jednačine

$$f''(\mathtt{x})\mathtt{y}^2 g(\mathtt{y}) + f(\mathtt{x})\mathtt{y}^2 g''(\mathtt{y}) = -\lambda_{k,\kappa}\, f(\mathtt{x})g(\mathtt{y}) \tag{3.0.22}$$

su dobijene dve diferencijalne jednačine

$$\partial_\mathtt{x}^2 f(\mathtt{x}) = -k^2 f(\mathtt{x}), \tag{3.0.23}$$

$$\mathtt{y}^2\partial_\mathtt{y}^2\, g(\mathtt{y}) = (k^2\mathtt{y}^2 - \lambda_{k,\kappa})\, g(\mathtt{y}), \tag{3.0.24}$$

gde je $k \in \mathbb{R}$. Uvodi se κ^2 kao $\lambda_{k,\kappa} = \kappa^2 + \frac{1}{4}$. Svojstvene vrednosti $\lambda_{k,\kappa}$ zapravo ne zavise od k i beskonačno su degenerisane. Rešenje po koordinati $\mathtt{x}$ su ravni talasi, $f(\mathtt{x}) \propto e^{ik\mathtt{x}}$. Rešenje druge diferencijalne jednačine su modifikovane Beselove funkcije $I_{i\kappa}(k\mathtt{y})$ i $K_{i\kappa}(k\mathtt{y})$, čije su osobine razmatrane u Dodatku A.2.1. Pošto $I_{i\kappa}(k\mathtt{y})$ divergira kad $k\mathtt{y} \to \infty$, to rešenje se odbacuje. Svojstvene funkcije

$$\phi_{k,\kappa}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = C\, e^{ik\mathtt{x}}\sqrt{\mathtt{y}}\, K_{i\kappa}(|k|\mathtt{y}) \tag{3.0.25}$$

se normiraju u odnosu na skalarni proizvod

$$(\phi, \phi') = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{d\mathtt{x}d\mathtt{y}}{\mathtt{y}^2}\phi^*_{k,\kappa}(\mathtt{x}, \mathtt{y})\phi_{k',\kappa'}(\mathtt{x}, \mathtt{y}). \tag{3.0.26}$$

Ovde je iskorišćena ortogonalnost modifikovanih Beselovih funkcija (A.2.28). Normiran skup svojstvenih funkcija laplasijana (3.0.19) je

$$\phi_{k,\kappa}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \pi^{-3/2}\sqrt{\kappa \sinh \pi\kappa}\, e^{ik\mathtt{x}}\sqrt{\mathtt{y}}\, K_{i\kappa}(|k|\mathtt{y}), \tag{3.0.27}$$

sa $\kappa > 0$ i $k \neq 0$. Vrednosti $\kappa < 0$ su isključene zbog osobine Beselove funkcije, $K_{-\nu}(|k|\mathtt{y}) = K_\nu(|k|\mathtt{y})$. Slučaj $k = 0$ je izuzet zbog divergiranja Beselove funkcije u limesu malih argumenata.

U nekomutativnom slučaju, fiksiranjem uređenja $\phi(\hat{x}|\hat{y}) = f(\hat{x})g(\hat{y})$, formalno mogu da se razdvoje promenljive. Jednačine za funkciju $f(\hat{x})$ su

$$e_1^2 f(\hat{x}) = -L_+^2\hat{y}^2 f(\hat{x}), \qquad e_1^2 f(\hat{x}) = -L_-^2 f(\hat{x})\hat{y}^2, \tag{3.0.28}$$

gde je $L_\pm \in \mathbb{R}$. Pošto komutacione relacije $[\hat{y}, e_2] = \hat{y}$ i $[\mathtt{y}, \mathtt{y}\partial_\mathtt{y}] = -\mathtt{y}$ imaju isti oblik, onda i diferencijalna jednačina za funkciju $g(\hat{y})$ ima isti oblik kao (3.0.24) iako je algebra promenjena,

$$(e_2^2 + e_2)g(\hat{y}) = (L_\pm^2 \hat{y}^2 - \lambda_{k,\kappa})g(\hat{y}). \tag{3.0.29}$$

Razmotrimo funkcije $L_\pm = \frac{e^{\pm 2hk}-1}{2h}$. Neka je za svako realno k funkcija $e^{ik\hat{x}}$ definisana razvojem u red po $\hat{x}$. Iz dejstva $e_1\hat{x} = \hat{y}$ sledi da je $e_1 e^{ik\hat{x}} = iL_+(k)\hat{y}\, e^{ik\hat{x}} = iL_-(k)e^{ik\hat{x}}\hat{y}$ gde je iskorišćeno $e^{ik\hat{x}} f(\hat{y}) = f(e^{2hk}\hat{y})e^{ik\hat{x}}$. Stoga je rešenje jednačine (3.0.28) $f(\hat{x}) = e^{ik\hat{x}},\ L_\pm = L_\pm(k)$. Familija formalnih rešenja svojstvenog problema laplasijana na kvantnoj proširenoj h-deformisanoj ravni, koja u komutativnom limesu teži normiranim funkcijama, data je izrazom

$$\phi_{k,\kappa}(\hat{x}, \hat{y}) = \pi^{-3/2}\sqrt{\kappa \sinh \pi\kappa}\, e^{ik\hat{x}} \sqrt{\hat{y}}\, K_{i\kappa}(|L_-(k)|\hat{y}). \tag{3.0.30}$$

Sada rešavamo svojstveni problem laplasijana, malo drugačije nego u izvornim radovima. Hoćemo da izračunamo komutatore tako da ne promenimo redosled koordinata $\hat{x}$ i $\hat{y}$

$$-\Delta\phi = [\hat{p}_1, [\hat{p}_1, f(\hat{x})]]g(\hat{y}) + f(\hat{x})[\hat{p}_2, [\hat{p}_2, g(\hat{y})]] + f(\hat{x})[\hat{p}_2, g(\hat{y})] \tag{3.0.31}$$

Krenemo od

$$[\hat{p}_1, f(\hat{x})] = \frac{1}{2ih}[\hat{y}, f(\hat{x})] = \frac{1}{2ih}(\hat{y}f(\hat{x}) - f(\hat{x})\hat{y}). \tag{3.0.32}$$

Iz komutatora (3.0.5) sledi da je

$$\hat{y}\hat{x} = (\hat{x} + 2ih)\hat{y}, \qquad \hat{y}\hat{x}^n = (\hat{x} + 2ih)^n\hat{y}. \tag{3.0.33}$$

Razvijemo funkciju $f(\hat{x})$ u red i iskoristimo prethodni izraz

$$\hat{y}f(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{y}\hat{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\hat{x} + 2ih)^n\hat{y} = f(\hat{x} + 2ih)\hat{y}. \tag{3.0.34}$$

Odatle vidimo da je komutator

$$[\hat{p}_1, f(\hat{x})] = \frac{1}{2ih}(f(\hat{x} + 2ih) - f(\hat{x}))\hat{y} = f'(\hat{x})\hat{y}. \tag{3.0.35}$$

Na osnovu prethodnog izraza zaključujemo da je

$$[\hat{p}_1, [\hat{p}_1, f(\hat{x})]] = f''(\hat{x})\hat{y}^2, \tag{3.0.36}$$

a slično se dobijaju i sledeći komutatori

$$[\hat{p}_2, g(\hat{y})] = -g'(\hat{y})\hat{y}, \qquad [\hat{p}_2, [\hat{p}_2, g(\hat{y})]] = g'(\hat{y})\hat{y} - g''(\hat{y})\hat{y}^2. \tag{3.0.37}$$

Svojstveni problem laplasijana $-\Delta\phi = \lambda\phi$ se svodi na operatorsku jednačinu

$$f''(\hat{x})\hat{y}^2 g(\hat{y}) + f(\hat{x})g''(\hat{y})\hat{y}^2 = -\lambda f(\hat{x})g(\hat{y}), \tag{3.0.38}$$

koja ima isti oblik kao svojstvena jednačina za komutativni laplasijan na h-deformisanoj ravni (3.0.22). Odavde zaključujemo da je rešenje isto kao u komutativnom slučaju (3.0.27) samo po koordinatama $\hat{x}$ i $\hat{y}$.

Prelaskom na nove komutativne promenljive,

$$\mathtt{z} = \frac{\mathtt{x}}{\mathtt{y}} \in (-\infty, \infty), \qquad \mathtt{y} \in (0, \infty), \tag{3.0.39}$$

dobija se da je metrika

$$ds^2 = \frac{1+\mathtt{z}^2}{\mathtt{y}^2}d\mathtt{y}^2 + 2\frac{\mathtt{z}}{\mathtt{y}}d\mathtt{y}d\mathtt{z} + d\mathtt{z}^2. \tag{3.0.40}$$

Laplasijan se računa na osnovu formule (3.0.20) i dobija se

$$\tilde{\Delta} = (1+\mathtt{z}^2)\,\partial_{\mathtt{z}}^2 + 2\,\mathtt{z}\,\partial_{\mathtt{z}} - 2\,\mathtt{y}\,\mathtt{z}\,\partial_{\mathtt{z}}\partial_{\mathtt{y}} + \mathtt{y}^2\partial_{\mathtt{y}}^2. \tag{3.0.41}$$

Njegov svojstveni problem, $-\tilde{\Delta}\phi(\mathtt{z},\mathtt{y}) = \lambda\phi(\mathtt{z},\mathtt{y})$, rešavamo razdvajanjem promenljivih, $\phi(\mathtt{z},\mathtt{y}) = h(\mathtt{z})g(\mathtt{y})$,

$$(1+\mathtt{z}^2)h''(\mathtt{z})g(\mathtt{y}) + 2h'(\mathtt{z})\mathtt{z}g(\mathtt{y}) - 2\mathtt{z}h'(\mathtt{z})\mathtt{y}g'(\mathtt{y}) + h(\mathtt{z})\mathtt{y}^2g''(\mathtt{y}) = -\lambda h(\mathtt{z})g(\mathtt{y}). \tag{3.0.42}$$

Zatim prelazimo na nove koordinate

$$\hat{z} = \frac{1}{2}(\hat{y}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{y}^{-1}) \in (-\infty,\infty) \qquad \text{i} \qquad \hat{y} \in (0,\infty), \tag{3.0.43}$$

koje su nekomutativni analogon koordinata $(\mathtt{z},\mathtt{y})$. One su nam interesantne zbog toga što komutator impulsa sa svakom od ovih koordinata daje ili tu koordinatu ili konstantu. Izvodi su sada

$$e_1\hat{z} = [\hat{p}_1,\hat{z}] = 1, \qquad e_2\hat{z} = [\hat{p}_2,\hat{z}] = \hat{z} \tag{3.0.44}$$

$$e_1\hat{y} = [\hat{p}_1,\hat{y}] = 0, \qquad e_2\hat{y} = [\hat{p}_2,\hat{y}] = -\hat{y}. \tag{3.0.45}$$

Dalje, 1-forme određujemo znajući da je $\theta^a(e_b) = \delta^a_b$ i $df(e_a) = e_a f$. Dobili smo

$$\theta^1 = dz + \frac{z}{y}dy, \qquad \theta^2 = -\frac{1}{y}dy, \tag{3.0.46}$$

a mera je $d\mu = \theta^1 \wedge \theta^2 = -\frac{1}{y}dz \wedge dy = \frac{1}{y}dy \wedge dz$. Svojstveni problem laplasijana u ovim koordinatama,

$$-(e_1^2 + e_2^2 + e_2)\phi(\hat{z},\hat{y}) = \lambda\phi(\hat{z},\hat{y}), \tag{3.0.47}$$

rešavamo tako što fiksiramo uređenje prilikom razdvajanja promenljivih $\phi(\hat{z},\hat{y}) = h(\hat{z})g(\hat{y})$. Nakon toga se diferencijalna jednačina svodi na

$$(1+\hat{z}^2)h''(\hat{z})g(\hat{y}) + 2h'(\hat{z})\hat{z}g(\hat{y}) - 2\hat{z}h'(\hat{z})\hat{y}g'(\hat{y}) + h(\hat{z})\hat{y}^2g''(\hat{y}) = -\lambda h(\hat{z})g(\hat{y}). \tag{3.0.48}$$

Ova operatorska jednačina ima isti oblik kao njena komutativna verzija (3.0.42), tako da se njeno partikularno rešenje poklapa sa rešenjem u komutativnom slučaju. Vidimo da je rešenje po $\hat{y}$ koordinati oblika $g \propto \hat{y}^{is}$, gde je $s \in \mathbb{R}$, što je potreban uslov da bi rešenje bilo normirano. Nakon zamene pomenutog oblika funkcije $g(\hat{y})$ ostaje diferencijalna jednačina po $\hat{z}$ čije je opšte rešenje

$$(1+\hat{z}^2)^{\frac{is}{2}}\left(c_1\,Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\hat{z}) + c_2\,Q^{is}_{-\frac{1}{2}-i\kappa}(i\hat{z})\right),$$

gde su $Q^{is}_{-\frac{1}{2}\pm i\kappa}$ asocirane Ležandrove funkcije, dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće diferencijalne jednačine[2]. Ponovo smo uveli smenu $\lambda = \kappa^2 + \frac{1}{4}$. Hoćemo da vidimo da li su svojstvene funkcije laplasijana

$$\phi_{s,\kappa} = c\,\mathtt{y}^{is}\,(1+\mathtt{z}^2)^{\frac{is}{2}}\,Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z}) \tag{3.0.49}$$

[2]Više o ovim funkcijama može se naći u dodatku A.2.4

normirane u odnosu na sledeći skalarni proizvod,

$$(\phi_{s,\kappa},\phi_{s',\kappa'}) = \int d\mu\, \phi^*_{s,\kappa}\phi_{s',\kappa'} = \int_0^\infty \frac{d\mathtt{y}}{\mathtt{y}}\mathtt{y}^{i(s-s')}\int_0^\infty d\mathtt{z}\, \left(Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z})\right)^* Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa'}(i\mathtt{z}) =$$

$$2\pi\delta(s-s')\int_0^\infty d\mathtt{z}\, \left(Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z})\right)^* Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa'}(i\mathtt{z}), \tag{3.0.50}$$

gde smo razmatrali gornju poluravan $\mathtt{y} > 0$. Da bismo pokazali ortogonalnost funkcija $\phi_{s,\kappa}$, ostalo je da rešimo integral po $\mathtt{z}$. Jedan od načina je da asocirane Ležandrove funkcije zapišemo preko Jakobijevih, za koje smo pokazali da su ortogonalne u dodatku A.2.3. Iz definicija asociranih Ležandrovih funkcija preko hipergeometrijske funkcije (A.2.43)(A.2.4) vidimo da kompleksnom konjugacijom dobijamo

$$\left(Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z})\right)^* = e^{-2s\pi}Q^{-is}_{-\frac{1}{2}-i\kappa}(-i\mathtt{z}). \tag{3.0.51}$$

Ako zatim iskoristimo osobinu (A.2.51) iz dodatka o asociranim Ležandrovim funkcijama, dobijamo

$$\left(Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z})\right)^* = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\kappa-is\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\kappa+is\right)}Q^{is}_{-\frac{1}{2}-i\kappa}(-i\mathtt{z}). \tag{3.0.52}$$

Prateći definiciju (A.2.36) Jakobijevih funkcija preko hipergeometrijskih vidimo da asocirana Ležandrova funkcija i njoj konjugovana funkcija mogu da se zapišu preko Jakobijevih na sledeći način,

$$Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z}) = e^{-\pi s}2^{1+is}\sqrt{\pi}\, i^{-\frac{1}{2}-i\kappa}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\kappa+is\right)}{\Gamma(1+i\kappa)}(\cosh t)^{is}\,\sinh t\,\phi^{\left(\frac{1}{2},is\right)}_{-\kappa}(t), \tag{3.0.53}$$

$$\left(Q^{is}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(i\mathtt{z})\right)^* = e^{-\pi s}2^{1+is}\sqrt{\pi}\,(-i)^{-\frac{1}{2}+i\kappa}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\kappa-is\right)}{\Gamma(1-i\kappa)}(\cosh t)^{is}\,\sinh t\,\phi^{\left(\frac{1}{2},is\right)}_{\kappa}(t), \tag{3.0.54}$$

gde je $\mathtt{z} = \sinh t$. Skalarni proizvod sada može da se izračuna,

$$(\phi_{s,\kappa},\phi_{s',\kappa'}) \sim \delta(s-s')\int_0^\infty dt\,\sinh t\,(\cosh t)^{2is+1}\,\phi^{\left(\frac{1}{2},is\right)}_{\kappa}(t)\phi^{\left(\frac{1}{2},is\right)}_{-\kappa'}(t) \sim \delta(s-s')\delta(\kappa+\kappa'). \tag{3.0.55}$$

Ovim smo pokazali ortogonalnost svojstvenih funkcija $\phi_{s,\kappa}$ komutativnog (3.0.41) i nekomutativnog laplasijana (3.0.47). Primer (proširene) h-deformisane ravni nam je važan i detaljno smo ga analizirali jer se smenom koordinata $\mathtt{y}\to\eta$ i $\mathtt{z}\to i\mathtt{y}$ (tj. $\mathtt{x}\to i\mathtt{x}$) u metrici (3.0.40) (tj. 3.0.12) dobija metrika de Siterovog prostora (5.2.2) (tj. 5.2.1) uz napomenu da se na ovaj način dobija obrnuta signatura u odnosu na onu koju koristimo u većem delu našeg rada.

4 De Siterova grupa simetrije

Pošto se konstrukcija fazi dS prostora zasniva na algebri de Siterove grupe, ovo poglavlje ćemo da posvetimo reprezenacijama koje kasnije koristimo. Prvo ćemo da damo pregled algebre $\mathfrak{so}(1,4)$, videćemo dve moguće kontrakcije i nabrojaćemo unitarne ireducibilne reprezentacije (UIR). Drugi deo ove glave posvećujemo reprezentaciji grupe $SO(1,d)$ iz konformne teorije polja. Na kraju, u poslednjem poglavlju, ćemo da proanaliziramo reprezentaciju glavne neprekidne serije pomoću operatora u Hilbertovom prostoru stanja. Ova reprezentacija je poznata kao Mojlanova (Moylan) reprezentacija.

4.1 $SO(1,4)$ - prilagođeno podgrupi $SO(3)$

Za početak ćemo da uvedemo notaciju koju koristimo. Grupa $SO(1,4)$ ima 10 generatora $M_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 0,1,\dots 4$; relacije koje slede su napisane u signaturi $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-++++)$. Generatori zadovoljavaju komutacione relacije

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = i(\eta_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}). \tag{4.1.1}$$

Koristeći $M_{\alpha\beta}$ možemo da definišemo vektor W_α koji je kvadratni po generatorima, i sa njima zadovoljava sledeću komutacionu relaciju

$$W_\alpha = \frac{1}{8}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\eta}M^{\alpha\beta}M^{\delta\eta}, \tag{4.1.2}$$

$$[M_{\alpha\beta}, W_\gamma] = i(\eta_{\alpha\gamma}W_\beta - \eta_{\beta\gamma}W_\alpha). \tag{4.1.3}$$

Grupa $SO(1,4)$ ima dva Kazimirova operatora, drugog i četvrtog stepena po generatorima

$$C_2 = \mathcal{Q} = -\frac{1}{2}\,M_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}, \qquad C_4 = \mathcal{W} = -W_\alpha W^\alpha. \tag{4.1.4}$$

Da bismo razumeli osobine algebre u odnosu na rotacije prilagodićemo notaciju $SO(3)$ podgrupi i označićemo trovektore indeksima $i,j = 1,2,3$. Preimenovaćemo generatore

$$L_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}M_{jk}, \qquad P_i = M_{i4}, \qquad Q_i = M_{0i}, \qquad R = M_{04}, \tag{4.1.5}$$

tako da su komutacione relacije $SO(1,4)$ tada

$$\begin{aligned}
&[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, && [L_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, && [L_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k,\\
&[P_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, && [P_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, && [P_i, Q_j] = i\delta_{ij}R,\\
&[Q_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k, && [Q_i, P_j] = -i\delta_{ij}R, && [Q_i, Q_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k,\\
&[R, L_j] = 0 = iQ_j, && [R, P_j] = iQ_j, && [R, Q_j] = iP_j.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Algebra može da se kontrahuje na nekoliko načina, ovde ćemo navesti dva. Sa Λ ćemo da označimo kosmološku konstantu. Reskaliranjem generatora $P_i \to P_i/\sqrt{\Lambda}$, $R \to R/\sqrt{\Lambda}$, i uzimanjem limesa $\Lambda \to 0$ dobijamo Vigner-Ino kontrakciju na Poenkareovu algebru. Na ovaj način se dobija ravan limes de Siterove algebre: R i P_i postaju generatori četvorotranslacija dok su L_i and Q_i generatori trorotacija i bustova. U ovom limesu $\mathcal{Q}$ and $\mathcal{W}$ postaju Kazimirovi operatori Poenkareove algebre: kvadrat mase i kvadrat vektora Pauli-Lubanskog. Kontrakcija $P_i \to \mu P_i$, $Q_i \to \mu Q_i$, $R \to \mu^2 R$ za $\mu \to \infty$ daje fazni prostor u tri dimenzije sa rotacijama, gde R postaje centralni element.

U ovoj notaciji komeponente W_α su date izrazima

$$W_0 = L_i P_i = P_i L_i, \qquad W_4 = -L_i Q_i = -Q_i L_i, \tag{4.1.7}$$

$$W_i = R L_i + \epsilon_{ijk} Q_j P_k = R L_i - \epsilon_{ijk} P_j Q_k, \tag{4.1.8}$$

a komutacione relacije (4.1.3) mogu da se napišu kao

$$\begin{aligned}
&[L_i, W_0] = 0, && [L_i, W_4] = 0, && [L_i, W_j] = i\epsilon_{ijk} W_k, \\
&[P_i, W_0] = 0, && [P_i, W_4] = -iW_i, && [P_i, W_j] = i\delta_{ij} W_4, \\
&[Q_i, W_0] = -iW_i, && [Q_i, W_4] = 0, && [Q_i, W_j] = -i\delta_{ij} W_0, \\
&[R, W_0] = -iW_4, && [R, W_4] = -iW_0, && [R, W_j] = 0,
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Za Kazimirove operatore se dobija

$$-\mathcal{Q} = -R^2 - Q_i Q_i + P_i P_i + L_i L_i, \tag{4.1.10}$$

$$-\mathcal{W} = -(W_0)^2 + W_i W_i + (W_4)^2 = -(W_0)^2 - [W_0, Q_i]^2 - [W_0, R]^2. \tag{4.1.11}$$

UIR grupe SO(1,4) se označavaju kvantnim brojevima (ρ, s). Različite UIR daju pozitivne ili negativne vrednosti Kazimirovog operatora $\mathcal{W}$. Videćemo kasnije da nam od toga zavisi da li kosmološka konstanta Λ ima pozitivnu ili negativnu vrednost. Iz vrednosti ρ i s kojima su zadate unitarne ireducibilne reprezentacije:

- glavna neprekidna serija: $\rho \geq 0$, $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, $\mathcal{Q} = -s(s+1) + \frac{9}{4} + \rho^2$, $\mathcal{W} = s(s+1)(\frac{1}{4} + \rho^2)$,
- komplementarna neprekidna serija: $i\rho = \nu \in \mathbb{R}$, $|\nu| < \frac{3}{2}$, $s = 0, 1, 2 \ldots$, $\mathcal{Q} = -s(s+1) + \frac{9}{4} - \nu^2$, $\mathcal{W} = s(s+1)(\frac{1}{4} - \nu^2)$,
- diskretna serija: $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots$, $\frac{1}{2} + i\rho = q = s, s-1, \ldots 0$ ili $\frac{1}{2}$, $\mathcal{Q} = -s(s+1) - (q+1)(q-2)$, $\mathcal{W} = s(s+1)\, q\, (q-1)$,

vidimo da je Λ pozitivno u svim reprezentacijama glavne neprekidne serije, reprezentacijama dopunske neprekidne serije za $|\nu| < \frac{1}{2}$ i reprezentacijama diskretnih serija za $s \neq 0$, $q \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

4.2 $SO(1,d)$ - prilagođeno reprezentaciji u konformnoj teoriji polja

Ovde ćemo da navedemo konvencije za de Siterovu grupu $G = SO(1,d)$ i njenu algebru koristeći reprezentaciju iz konformne teorije polja. Konformna grupa nekog prostorvremena je grupa difeomorfizama $x \to x'(x)$ koji zadovoljavaju uslov

$$g'_{\rho\sigma}(x') = \Omega^2(x') g_{\rho\sigma}(x). \tag{4.2.1}$$

Ove transformacije ne menjaju uglove. Konkretno, konformne transformacije prostora $\mathbb{R}^d$ su sve izometrije (translacije i rotacije), dilatacije kao i inverzije. Ova četiri tipa transformacija generišu grupu $O(d+1,1)$.

Za algebru $\mathfrak{so}(1,d)$ nenulte Lijeve zagrade su

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{jk} L_{il} - \delta_{ik} L_{jl} + \delta_{jl} L_{ki} - \delta_{il} L_{kj} \, , \tag{4.2.2}$$

$$[L_{ij}, P_k] = \delta_{jk} P_i - \delta_{ik} P_j, \quad [L_{ij}, K_k] = \delta_{jk} K_i - \delta_{ik} K_j \, , \tag{4.2.3}$$

$$[D, P_i] = P_i, \quad [D, K_i] = -K_i, \quad [K_i, P_j] = 2 \left(L_{ij} - \delta_{ij} D \right) \ . \tag{4.2.4}$$

sa $i, j = 1, \ldots, d-1$. Ovde su P_i generatori translacija, L_{ij} rotacija, D dilatacija i K_i generatori specijalnih konformnih transformacija. Generatori K_i su povezani sa P_i preko $K_i = I P_i I$, gde je I inverzija prostora. Generatori $M_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, \ldots, d$ su sa gornjim povezani na sledeći način:

$$D = -i M_{0d}, \quad P_i = i(M_{0i} + M_{id}), \quad K_i = i(M_{0i} - M_{id}), \quad L_{ij} = i M_{ij} \ . \tag{4.2.5}$$

Oni zadovoljavaju sledeću komutacionu relaciju

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = i \left(\eta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} \right) \ . \tag{4.2.6}$$

Svaku reprezentaciju karakterišu konformna težina $\mathbb{\Delta}$ i spin s. Kvadratni Kazimir i njegova vrednost u reprezentaciji $(\mathbb{\Delta}, l) = \pi_{\mathbb{\Delta},(l)}$ grupe $SO(1,d)$ su dati izrazima

$$C_2 = -\frac{1}{2} M^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = -D^2 - \frac{1}{2} \{P_i, K^i\} + \frac{1}{2} L^{ij} L_{ij}, \quad C_2(\mathbb{\Delta}, l) = -\mathbb{\Delta}(\mathbb{\Delta} - d + 1) - l(l + d - 3) \, . \tag{4.2.7}$$

U četiri dimenzije, de Siterova grupa ima još jedan nezavisni Kazimirov element, (4.1.4). Njegova vrednost u reprezentaciji $(\mathbb{\Delta}, 1/2)$, jedinoj kojoj koristimo u ovoj tezi, glasi

$$C_4 \left(\mathbb{\Delta}, 1/2 \right) = -\frac{3}{4} (\mathbb{\Delta} - 1)(\mathbb{\Delta} - 2) \ . \tag{4.2.8}$$

Ova reprezentacija može da se realizuje na prostorima konformnih polja u $(d-1)$ dimenzija. Preciznije, možemo da napišemo generatore $SO(1,d)$ kao diferencijalne operatore

$$P_i = -\partial_i, \quad L_{ij} = z_i \partial_j - z_j \partial_i - \Sigma_{ij} \, , \tag{4.2.9}$$

$$D = -z^i \partial_i - \mathbb{\Delta}, \quad K_i = -z^2 \partial_i - 2 z_i D - 2 z^j \Sigma_{ij} \ , \tag{4.2.10}$$

koji deluju na funkcije $\psi_a(z_i)$ realnih varijabli z_i, gde je $i = 1, \ldots, d-1$. Funkcije $\psi_a(z_i)$ uzimaju vrednosti u nekom konačnodimenzionom prostoru reprezentacije V grupe $SO(d-1)$, a Σ_{ij} su matrični predstavnici generatora L_{ij} u ovoj reprezentaciji. Pored toga, $\mathbb{\Delta}$ je konstantno i iz zahteva unitarnosti sledi da ima oblik $\mathbb{\Delta} = (d-1)/2 + i\tau$, gde je $\tau \in \mathbb{R}$. Indeksi a prebrojavaju bazis $\{e^a\}$ prostora V, a podižu se i spuštaju pomoću $SO(d-1)$ invarijantne metrike na njemu. Hilbertov prostor funkcija $\mathbb{R}^{d-1} \to V$ je označen sa $\mathcal{H}$. Skalarni proizvod na $\mathcal{H}$ zadat je integralom sa standardnom merom na $\mathbb{R}^{d-1}$:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1} z \ \left(\psi_1^a(z^i) \right)^* \psi_{2a}(z^i) \ . \tag{4.2.11}$$

Ako sa $\pi_{\mathbb{\Delta},V}$ označimo glavnu seriju reprezentacije, onda su reprezentacije $\pi_{\mathbb{\Delta},V}$ i $\pi_{d-1-\mathbb{\Delta},V}$ izomorfne jedna drugoj. Ova konstatacija je tačna ako je V simetrična tenzorska reprezentacija nultog traga, što zapravo u radu i koristimo. Opštije važi $\pi_{\mathbb{\Delta},V} \cong \pi_{d-1-\mathbb{\Delta},V^R}$ (videti [55]), gde je V^R reflektovana reprezentacija od V.

U slučaju $d = 2$ ne postoji rotaciona grupa $SO(d-1)$, tako da su matrice Σ_{ij} nula. Za $d = 4$ i u slučaju da je spin $s = \frac{1}{2}$, matrice su

$$\Sigma_{ij} = -\frac{i}{2} \, \epsilon_{ijk} \sigma_k \ . \tag{4.2.12}$$

Više detalja o unitarnim reprezentacijama grupe $SO(1,d)$ može da se nađe u [56], a za slučaj $d = 2$ u [57].

4.3 Mojlanova reprezentacija

Drugu realizaciju glavne neprekidne serije daje Mojlanova reprezentacija koju ćemo ovde da izložimo.

Značaj teorije reprezentacije za talasne jednačine je davno uočen. Na primer Bargman i Vigner [58] su razmatrali Poenkare invarijantne konačno dimenzione spinorske talasne jednačine i pokazali da određenim ireducibilnim reprezentacijama Poenkareove grupe odgovaraju prostori rešenja određene talasne jednačine, koji opisuju čestice određene mase i spina. Zamisao Mojlanovog rada [59], koji ćemo ovde ispratiti, je da poveže veću simetriju Dirakove jednačine SO(4,1) (preciznije jediničnu komponentu de Siterove grupe $\mathrm{SO}_0(4,1)$) sa uobičajenom Poenkareovom simetrijom teorije. Poenkareova grupa $\mathcal{P}$ je realizovana na standardan način: generatori su reprezentovani auto-adjungovanim operatorima definisanim na invarijantnom domenu sadržanom u prostoru $\mathcal{H}(m,s,+)$. Ovo je prostor unitarne ireducibilne reprezentacije grupe $\mathcal{P}$ sa masom $m>0$, gde s označava celobrojne ili polucelobrojne vrednosti spina, a znak $+$ se odnosi na pozitivnu vrednost energije. Generatori u unitarnim ireducibilnim reprezentacijama SO(4,1) grupe su realizovani kao auto-adjungovani operatori definisani na invarijantnom domenu sadržanom u $\mathcal{H}(m,s,+)\oplus\mathcal{H}(m,s,+)$. Pod UIR uvek podrazumevamo jednoznačne reprezentacije prostopovezanih natkrivajućih grupa povezanih sa datim grupama. Njih označavamo sa $\overline{\mathcal{P}}$ i $\overline{\mathrm{SO}(4,1)}$. Grupe $\overline{\mathcal{P}}$ i $\overline{\mathrm{SO}(4,1)}$ su realizovane na $\mathcal{H}(m,s,+)$ i $\mathcal{H}(m,s,+)\oplus\mathcal{H}(m,s,+)$, redom. Time što ćemo glavnu neprekidnu seriju UIR grupe $\mathrm{SO}_0(4,1)$ da realizujemo preko UIR grupe $\overline{\mathcal{P}}$, koja se koristi za opisivanje elementarnih čestica, dobijamo neposrednu fizičku interpretaciju. Razmotrimo skup svih talasnih funkcija ψ koje zadovoljavaju Bargman-Vignerovu jednačinu

$$\left(\gamma^{\mu}_{(k)}p_\mu - m\right)\psi = 0, \qquad \psi = \psi(p;\xi_1,\dots,\xi_{2s}), \qquad k=1,\dots 2s, \tag{4.3.1}$$

gde je ξ četvorokomponentna varijabla i $p\in T_3=\{p_\mu\,|\,p_\mu p^\mu = m^2\}$. Prostor svih rešenja ψ ćemo označiti sa $\mathcal{R}^{(s)}$. Na njemu možemo da definišemo skalarni proizvod

$$(\psi,\psi) = \int_{T_3}\left|\sum_\xi \psi^*\gamma_1^0\gamma_2^0\dots\gamma_{2s}^0\psi\right| d\Omega, \tag{4.3.2}$$

gde je ψ^* hermitska konjugacija vektora ψ. Neka je $\mathcal{R}^{(s)}$ Hilbertov prostor skupa svih talasnih funkcija ψ za koje je skalarni proizvod (4.3.2) konačan. U radu [58] je pokazano da se ovaj prostor razlaže na ireducibilne reprezentacije na sledeći način:

$$\mathcal{R}^{(s)} = \mathcal{H}(m,s,+)\oplus\mathcal{H}(m,s,-). \tag{4.3.3}$$

Bazis u kojem je ova dekompozicija izvršena je unitarni kanonski bazis vektora $|ps_3\epsilon\rangle$, gde je $\epsilon=\mathrm{sgn}(p_0)$. Zbog ovog razlaganja talasnu funkciju možemo da napišemo kao

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{4.3.4}$$

sa $\psi_1\in\mathcal{H}(m,s,+)$ i $\psi_2\in\mathcal{H}(m,s,-)$. Za skalarni proizvod imamo

$$(\psi,\psi) = (\psi_1,\psi_1)_+ + (\psi_2,\psi_2)_-, \tag{4.3.5}$$

gde su $(\ ,\ )_+$ i $(\ ,\ )_-$ skalarni proizvodi na prostorima $\mathcal{H}(m,s,+)$ i $\mathcal{H}(m,s,-)$ redom. Grupne generatore iz $\mathcal{R}^{(s)}$ ćemo označiti sa $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} M_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & M_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= i\Big(p_i \frac{\partial}{\partial p^j} - p_j \frac{\partial}{\partial p_i}\Big) + S_{ij}, & M_{i0} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p^i} + S_{i0}, \\ M_{4j} &= -\frac{\rho}{m}\, p_j - \frac{1}{2m}\{p^0, M_{0j}\} - \frac{1}{2m}\{p^i, M_{ij}\}, & M_{40} &= -\frac{\rho}{m}\, p_0 + \frac{1}{2m}\{p^i, M_{0i}\}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Ovde latinični indeksi uzimaju sledeće vrednosti $i, j = 1, 2, 3$. Indekse $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ podižemo i spuštamo pomoću metričkog tenzora prostora Minkovskog, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Radi jednostavnosti reskaliraćemo p_μ tako da bude bezdimenziono, $p_\mu/m \to p_\mu$. U izrazima (4.3.7), $S_{\mu\nu}$ su spinski generatori. Za skalarne UIR $(\rho, s = 0)$, $S_{\mu\nu} = 0$, a za spinorske $(\rho, s = \frac{1}{2})$, $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Iako je Moylan-ova reprezentacija na Hilbertovom prostoru stanja blok-dijagonalna (na nivou algebre), ona nije reducibilna jer su operatori $M_{\alpha\beta}$, koji se pojavljuju na dijagonali izraza (4.3.6), nehermitski. Međutim, kao što smo već pomenuli, operator $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}$ je hermitski u $\mathcal{H}(m, s, +) \oplus \mathcal{H}(m, s, -)$.

Infinitezimalni generatori koji deluju na proizvoljan vektor (4.3.4) u $\mathcal{R}^{(s)}$ mogu da se napišu kao matrični operatori

$$M_{\mu\nu} \times I, \qquad B_\mu \times I, \tag{4.3.8}$$

gde su $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$ i $B_\mu = M_{4\mu} = -\frac{\rho}{m} p_\mu - \frac{1}{2m}\{p^\rho, M_{\rho\mu}\}$ dati izrazima (4.3.7). Iz (4.3.8) deluje da su potprostori $\mathcal{H}(m, s, +)$ i $\mathcal{H}(m, s, -)$ invarijantni na celu grupu, ali to nije tačno. Može da se pokaže da $e^{i\omega B_i}$ ne ostavlja $\mathcal{H}(m, s, +)$ i $\mathcal{H}(m, s, -)$ invarijantnim. Zbog toga ćemo ovu reprezentaciju $\overline{\mathrm{SO}_0(4,1)}$ grupe da prenesemo u $\overline{\mathcal{R}}^{(s)} = \mathcal{H}(m, s, +) \oplus \mathcal{H}(m, s, +)$. Stoga uvodimo linearni operator

$$\theta : \mathcal{R}^{(s)} \to \overline{\mathcal{R}}^{(s)} \equiv \mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow, \tag{4.3.9}$$

definisan preko njegovog delovanja na kanonski bazis:

$$\theta \begin{pmatrix} |\vec{p}\, s_3 +\rangle \\ |\vec{p}\, s_3 -\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{p}\, s_3 +\rangle \\ |-\vec{p}\, s_3 +\rangle \end{pmatrix}, \qquad \theta \begin{pmatrix} p_\mu & 0 \\ 0 & p_\mu \end{pmatrix} \theta^{-1} = \begin{pmatrix} p_\mu & 0 \\ 0 & -p_\mu \end{pmatrix}. \tag{4.3.10}$$

Stanja i generatore označavamo sa

$$\theta\, \widetilde{\Psi} \equiv \Psi, \qquad \theta \widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} \theta^{-1} \equiv \mathcal{M}_{\mu\nu}, \tag{4.3.11}$$

za $\widetilde{\Psi} \in \mathcal{R}^{(s)}$ i $\Psi \in \overline{\mathcal{R}}^{(s)}$. Želimo da prokomentarišemo da se kod slučaja sferno-simetričnih operatora prelazak sa $\mathcal{H}(m, s, +)$ na $\mathcal{H}(m, s, +) \oplus \mathcal{H}(m, s, +)$ svodi na promenu intervala radijalne promenljive, koju ćemo kasnije da uvedemo, sa $z \in (0, 1)$ na $z \in (0, \infty)$. Ova promena utiče na hermitskost odgovarajućih operatora preko graničnih uslova. Dejstvo θ implicira da su generatori dati izrazima

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} M_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & M_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_{\mu 4} = \begin{pmatrix} M_{\mu 4} & 0 \\ 0 & -M_{\mu 4} \end{pmatrix}, \tag{4.3.12}$$

i da su onda komponente vektora Pauli-Lubanskog

$$\mathcal{W}_0 = \begin{pmatrix} W_0 & 0 \\ 0 & -W_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{W}_4 = \begin{pmatrix} W_4 & 0 \\ 0 & W_4 \end{pmatrix}. \tag{4.3.13}$$

Zbog unitarnosti θ, reprezentacija $U(A)$ grupe $\mathrm{SO}_0(4,1)$ na prostoru $\mathcal{R}^{(s)}$ i reprezentacija $\overline{U}(A) = \theta U(A) \theta^{-1}$ na $\overline{\mathcal{R}}^{(s)}$ su ekvivalentne. Izračunavanjem Kazimirovih operatora grupe

$SO_0(4,1)$ na $\overline{\mathcal{R}}^{(s)}$ sa generatorima (4.3.12) vidimo da je konstruisana ireducibilna reprezentacija (ρ, s).

Skalarni proizvod je pozitivno-definitan i invarijantan na preslikavanje θ. Međutim, specifičan oblik izraza (4.3.10) implicira kontraintuitivan oblik nakon θ-preslikavanja. Ako stanje zapišemo kao

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

skalarni proizvod može da se izrazi kao

$$(\Psi, \Psi') = (\psi_\uparrow, \psi'_\uparrow) + (-1)^{2s}(\psi_\downarrow, \psi'_\downarrow), \tag{4.3.15}$$

gde (ψ, ψ') u poslednjoj formuli zavisi od spina. Za nas su od interesa $s = 0, \frac{1}{2}$ ([59, 58]):

$$(\psi, \psi') = \int \frac{d^3p}{2|p_0|} \; \psi^* \psi' \,, \qquad s = 0 \,, \tag{4.3.16}$$

$$(\psi, \psi') = \int \frac{d^3p}{2|p_0|} \; \psi^\dagger \gamma^0 \psi' \,, \quad s = \frac{1}{2} \,. \tag{4.3.17}$$

Mojlanova reprezentacija, pored velikog broja prednosti, ima nekoliko mana: problem sa tim što generatori nisu hermitski i što skalarni proizvod ima različite izaze u zavisnosti od vrednosti spina. Zbog toga je praktičnije koristiti reprezentaciju Hilbertovog prostora glavne neprekidne serije koja se koristi u konformnoj teoriji polja, [56].

5 Mode skalarnog polja i vakuumi na dS$_d$

Ovo poglavlje započinjemo pregledom osnovih koraka u kanonskom kvantovanju realnog skalarnog polja na ravnom i zakrivljenom prostoru. Nakon toga ćemo da uvedemo poznate Poenkareove koordinate (η, x^i) i nove koordinate (η, y^i), sugerisane nekomutativnom geometrijom, nakon čega ćemo da navedemo odgovarajuće izraze za laplasijan u ova dva koordinatna sistema. Zatim ćemo da se bavimo vakuumima u de Siterovom prostoru. Izdvojićemo familiju de Siter-invarijatnih vakuuma koji se dobijaju konstantnom Bogoljubovljevom transformacijom iz Banč-Dejvisovog vakuuma. Zatim ćemo da razmatramo Klajn-Gordonovu jednačinu u d-dimenzionom de Siterovom prostoru, dS$_d$. Rešićemo Klajn-Gordonovu jednačinu u koordinatama (η, x^i) i (η, y^i), razvićemo mode u jednim koordinatama po modama u drugim i naći ćemo Bogoljubovljeve koeficijente. U oba koordinatna sistema nađen je prostor rešenja koji je prirodno podeljen u dva ortogonalna $SO(1,d)$ invarijantna potprostora koja nose izomorfne unitarne ireducibilne reprezentacije de Siterove grupe. Odatle sledi da su vakuumi koji odgovaraju ovim rešenjima de Siter invarijantni.

Ovde ćemo da uvedemo notaciju koju koristimo u narednim poglavljima. Oznake (η, x^i) i (η, y^i) se odnose na koordinate na komutativnom de Siterovom prostoru dS$_d$, dok su njihovi nekomutativni analogoni $(\hat{\eta}, \hat{x}^i)$ i $(\hat{\eta}, \hat{y}^i)$ operatori na fazi de Siterovom prostoru (nekomutativnoj algebri $\mathcal{A}$). Sa (ξ, y^i) označavamo varijable u prostoru reprezentacije $\mathcal{H}$ algebre $\mathcal{A}$.

5.1 Pregled: kvantovanje skalarnog polja, vakuumi

5.1.1 Kvantovanje skalarnog polja u ravnom prostoru

Ovde ćemo da navedemo najosnovnije segmente kvantovanja realnog skalarnog polja u ravnom prostoru, [60], kao kratak pregled pre kvantovanja u zakrivljenom prostoru.

Realno skalarno polje $\Phi(x)$ u d-dimenzionom prostoru u signaturi koja se koristi u teoriji polja (više negativna) opisano je dejstvom

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \tag{5.1.1}$$

Jednačina kretanja koja se dobija variranjem dejstva je Klein-Gordonova jednačina

$$\Box \Phi + m^2 \Phi = 0. \tag{5.1.2}$$

Generalisani impuls je

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi} = \partial_0 \Phi. \tag{5.1.3}$$

Klajn-Gordonov skalarni proizvod dva polja je dat formulom [1]

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int d^{d-1}x \left(\Phi_1(\partial_0 \Phi_2^*) - (\partial_0 \Phi_1)\Phi_2^*\right), \tag{5.1.4}$$

što se u slučaju realnog skalarnog proizvoda svodi na simplektički proizvod dva polja,

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int d^{d-1}x \,(\Phi_1 \pi_2 - \pi_1 \Phi_2). \tag{5.1.5}$$

Partikularna rešenja Klein-Gordonove jednačine su ravni talasi pozitivne i negativne energije (redom)

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{-ikx} \qquad \text{i} \qquad u^*_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{ikx}, \tag{5.1.6}$$

sa disperzionom relacijom $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, a skup $\{u_{\vec{k}}, u^*_{\vec{k}}\}$ je kompletan skup rešenja. Ona su ortonormirana u odnosu na (5.1.4), tako da je

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad (u_{\vec{k}}, u^*_{\vec{k}'}) = 0, \qquad (u^*_{\vec{k}}, u^*_{\vec{k}'}) = -\delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{5.1.7}$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija partikularnih,

$$\Phi(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \int d^{d-1}k \,(\alpha_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + \alpha^*_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}), \tag{5.1.8}$$

gde je Φ^+ pozitivno energetski, a Φ^- negativno energetski deo polja. Izbor bazisnih funkcija koji se sastoji od $u_{\vec{k}}$ i njima kompleksno konjugovanih $u^*_{\vec{k}}$ je standardan jer se na taj način određuje podskup $\{u_{\vec{k}}\}$ koji definiše prostor jednočestičnih stanja pozitivne energije (nevezano od toga da li su eksponencijalne funkcije, tj. od toga kako je vreme definisano). Skalarno polje kvantujemo tako što polje Φ tretiramo kao operator i nametnemo istovremene komutacione relacije

$$[\Phi(t, \vec{r}), \pi(t, \vec{r}')] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \qquad [\Phi(t, \vec{r}), \Phi(t, \vec{r}')] = [\pi(t, \vec{r}), \pi(t, \vec{r}')] = 0, \tag{5.1.9}$$

ili ekvivalentno,

$$[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a^\dagger_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = 0, \tag{5.1.10}$$

gde smo amplitude zamenili operatorima kreacije i anhilacije. Pogodan bazis u Hilbertovom prostoru je Fokova reprezentacija.

Vakuum se zadaje uslovom

$$\Phi^+(x)|0\rangle = 0 \qquad \text{ili} \qquad a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \ \forall \vec{k}. \tag{5.1.11}$$

Jednočestična stanja se dobijaju delovanjem operatora kreacije na vakuum, $|\vec{k}\rangle = a^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle$, a višečestična njihovom višestrukom primenom

$$|n_1, \vec{k}_1; n_2, \vec{k}_2; ...\rangle = \frac{(a^\dagger_{\vec{k}})^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a^\dagger_{\vec{k}})^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} ...|0\rangle. \tag{5.1.12}$$

Ukupni prostor stanja se dobija kada se uzmu sve linearne kombinacije.

[1] Videćemo kasnije da se ovaj izraz može uopštiti na zakrivljen prostor.

5.1.2 Kvantovanje skalarnog polja u zakrivljenom prostoru

Osnovni formalizam kvantne teorije polja, koji je iznad naveden, uopšten je na zakrivljen prostor, [61, 37]. Ovde ćemo da navedemo osnovne ideje tog uopštavanja. Dejstvo realnog skalarnog polja na zakrivljenom prostoru je

$$S = \int d^n x\, \mathcal{L}(x), \qquad \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g(x)}\left(g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\Phi(x)\partial_\nu\Phi(x) - (m^2 + \xi R(x))\Phi^2(x)\right). \tag{5.1.13}$$

Sprezanje između skalarnog i gravitacionog polja opisano je članom $\xi R(x)\Phi^2(x)$, gde je ξ neki numerički faktor, a $R(x)$ skalarna krivina. Iz uslova da je varijacija dejstva po Φ nula, dobija se jednačina koju zadovoljava skalarno polje

$$\left(\Box + m^2 + \xi R(x)\right)\Phi(x) = 0, \tag{5.1.14}$$

gde je $\Box\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right)$. Skalarni proizvod (5.1.4) se uopštava na

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i\int_\Sigma d\Sigma^\mu \sqrt{-g_\Sigma(x)}\left(\Phi_1(x)\partial_\mu\Phi_2^*(x) - \left(\partial_\mu\Phi_1(x)\right)\Phi_2^*(x)\right), \tag{5.1.15}$$

gde je $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, sa jediničnim vektorom n^μ orijentisanim u budućnost, ortogonalnim na hiperpovrš prostornog tipa Σ i $d\Sigma$ elementom hiperpovršine, a g_Σ je determinatna metričkog tenzora na Σ. Hiperpovrš Σ je Košijeva površ u globalno hiperboličkom prostor-vremenu i vrednost skalarnog proizvoda (Φ_1, Φ_2) ne zavisi od izbora hiperpovrši. Postoji kompletan skup rešenja jednačine (5.1.14) ortonormiranih u odnosu na (5.1.15), koja zadovoljavaju

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \qquad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \qquad (u_i, u_j^*) = 0. \tag{5.1.16}$$

Ovde indeks i simbolički predstavlja sve kvantne brojeve koji su neophodni za obeležavanje moda. Kao i u ravnom prostoru, polje se može razviti po njima

$$\Phi(x) = \sum_i \left(a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)\right). \tag{5.1.17}$$

Polje se kovarijantno kvantuje zadržavanjem komutacionih relacija (5.1.10)

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = [a_i^*, a_j^*] = 0. \tag{5.1.18}$$

Konstrukcija vakuuma i Fokovog prostora moguća je na isti način kao i u ravnom prostoru, uz činjenicu da u zakrivljenom prostoru postoji nejednoznačnost u formalizmu. U prostoru Minkovskog postoji preferirani izbor koordinata, to su Dekartove koordinate koje se linearno transformišu pod dejstvom Lorencove grupe i ravni talasi $e^{\pm ikx}$ su invarijantne funkcije, kao što postoji i izbor vremena u odnosu na koje su partikularna rešenja pozitivno ili negativno energetska. Vektor $i\,\partial_t$ je Kilingov vektor prostora Minkovskog, ortogonalan na hiperpovrš $t =$ const i mode $u_{\vec{k}} = e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}$ su njegove svojstvene funkcije za pozitivne svojstvene vrednosti ω. Vakuum je invarijantan na Lorencove transformacije. Iz ovoga ne sledi jednoznačnost vakuuma, ona sledi iz prirodno definisanih graničnih uslova. U proizvoljnom zakrivljenom prostoru ne postoji grupa simetrije ni Kilingov vektor vremenskog tipa kojim bi se prirodno definisalo vreme. Uopšteno, ne postoji privilegovan koordinatni sistem ni prirodan izbor moda po kojima se razvija polje Φ. U opštem slučaju, drugim izborom moda, definiše se drugi vakuum. Neka je izborom ortonormiranih moda u_i, definisan vakuum

$$a_i|0\rangle_a = 0. \tag{5.1.19}$$

Razvijmo sada polje Φ po nekom drugom kompletnom skupu rešenja $\{v_i, v_i^*\}$,

$$\Phi(x) = \sum_i \left(b_i v_i(x) + b_i^\dagger v_i^*(x)\right), \tag{5.1.20}$$

gde je odgovarajući vakuum $b_i|0\rangle_b = 0$. Kako su oba skupa rešenja kompletna, možemo jedan skup da razvijemo po drugom

$$v_j = \sum_i \left(\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*\right), \qquad u_i = \sum_j \left(\alpha_{ji}^* v_j - \beta_{ji} v_j^*\right). \tag{5.1.21}$$

Ove relacije su poznate kao Bogoljubovljeve transformacije, a α_{ij}, β_{ij} su Bogoljubovljevi koeficijenti koji mogu da se izračunaju kao $\alpha_{ij} = (v_i, u_j)$ i $\beta_{ij} = -(v_i, u_j^*)$. Iz (5.1.21) i razvoja polja sledi da su operatori kreacije i anhilacije povezani

$$a_i = \sum_j \left(\alpha_{ji} b_j + \beta_{ji} b_j^\dagger\right), \qquad b_j = \sum_i \left(\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger\right), \tag{5.1.22}$$

i relacije među Bogoljubovljevim koeficijentima

$$\sum_k \left(\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*\right) = \delta_{ij}, \qquad \sum_k \left(\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}\right) = 0. \tag{5.1.23}$$

Iz prethodnih relacija je očigledno da su dva Fokova prostora stanja formirana izborom moda u_i i v_j različita kada je $\beta_{ji} \neq 0$ tj. kada postoji mešanje pozitivno-frekventnih i negativno-frekventnih moda. Vakuum $|0\rangle_b$ se ne anhilira operatorom a_i:

$$a_i|0\rangle_b = \sum_j \beta_{ji}^* |1_j\rangle_b \neq 0, \tag{5.1.24}$$

a očekivana vrednost operatora broja čestica $N_i = a_i^\dagger a_i$ definisanim modama u_i u stanju $|0\rangle_b$ je

$$\langle 0|_b N_i |0\rangle_b = \sum_j |\beta_{ji}|^2, \tag{5.1.25}$$

što će reći da vakuum v_j moda sadrži $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ čestica u vakuumu u_i moda.

5.2 Koordinatni sistemi

U ovom poglavlju ćemo da razmatramo d-dimenzionalan de Siterov prostor. Preciznije rečeno, radimo sa polovinom ovog prostora, koji možemo da parametrizujemo konformno ravnim Poenkareovim koordinatama,

$$ds^2 = \frac{\alpha_{\rm dS}^2}{\upeta^2}\left(-d\upeta^2 + d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}_i\right), \qquad \upeta \in (-\infty, 0), \quad \mathrm{x}^i \in (-\infty, \infty). \tag{5.2.1}$$

U kontekstu kosmologije, ovaj prostor modeluje inflatornu fazu svemira i asimptotska oblast $\{\eta = 0\}$ je tzv. „reheating surface”. Indeksi $i, j = 1, \dots, d-1$ se podižu i spuštaju pomoću ravne euklidske metrike. U nastavku ćemo da koristimo i drugi skup koodinata $(\upeta, \mathrm{y}^i)$ povezan sa gornjim na sledeći način

$$\mathrm{y}^i = \frac{\mathrm{x}^i}{\upeta}, \qquad ds^2 = \frac{\alpha_{\rm dS}^2}{\upeta^2}\left(-\left(1 - \mathrm{y}^2\right) d\upeta^2 + 2\upeta\, \mathrm{y}^i\, d\upeta d\mathrm{y}_i + \upeta^2 d\mathrm{y}^i d\mathrm{y}_i\right). \tag{5.2.2}$$

Kao što smo pomenuli u uvodu, naš zadatak je da razmatramo nekomutativnu verziju de Siterovog prostora. Za to su nam neophodni elementi (nekomutativne) diferencijalne geometrije.

Diferencijalna geometrija na fazi de Siterovom (fazi dS) prostoru diskutovana je u radovima [22, 50]. Glavna ideja je da se ona izgradi po bliskoj analogiji sa komutativnom geometrijom, koju smo uveli. Ona je, u okviru *frame* formalizma, potpuno definisana operatorima impulsa p_α i njihovom algebrom. Intuitivno rečeno, impulsi generišu infinitezimalne translacije. Oni ne moraju nužno da pripadaju algebri prostorvremena $\mathcal{A}$, što je i slučaj kod komutativnih prostora. Obično se uzima da su p_α antihermitski. Ova pretpostavka je u knjizi [11] nazvana „uslov realnosti": to znači da *frame* izvodi preslikavaju realne funkcije (tj. hermitske operatore) u realne funkcije. Da pomenemo da, sa druge strane, *frame* izvodi u komutativnoj geometriji nisu nužno hermitski. U kvantnoj mehanici fazni prostor se sastoji iz komutativnih koordinata x^μ i impulsa $\hbar p_\alpha = \delta^\mu_\alpha \partial_\mu$ za koje smo ovde uzeli da su antihermitski. Dejstvo impulsa p_α na elemente algebre koordinata $f(x) \in \mathcal{A}$ definiše izvode Zbog odsustva naziva, ove koordinate ćemo oslovljavati sa „Dekartovim". Osnovne osobine i najčešće korišćene koordinate na de Siterovom prostoru date su u dodatku A.1. U radu ćemo uglavnom da fiksiramo kosmološku konstantu tako što ćemo da uzmemo da je $\alpha_{\rm dS} = 1$, osim kada bude eksplicitno potrebna zbog intepretacije. Grupa izometrija de Siterovog prostora je $G = SO(1,d)$. Ova grupa na asimptotskoj granici $\{\eta = 0\}$ deluje pomoću konformnih transformacija i zbog toga ćemo često za njene generatore da koristimo notaciju kao u konformnoj teoriji polja $\{P_i, K_i, L_{ij}, D\}$. Relacije između ovih generatora i generatora Lorencove grupe, kao i ostale konvencije u vezi $SO(1,d)$ grupe su navedene u poglavlju 4.2. Lijeva algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ na dS_d prostoru deluje pomoću vektorskih polja. U Poenkareovim koordinatama ova vektorska polja su

$$P_i = -\partial_{\mathrm{x}^i}, \quad L_{ij} = \mathrm{x}_i \partial_{\mathrm{x}^j} - \mathrm{x}_j \partial_{\mathrm{x}^i}\,, \tag{5.2.3}$$

$$D = -\eta\partial_\eta - \mathrm{x}^i\partial_{\mathrm{x}^i}, \quad K_i = (\eta^2 - \mathrm{x}^2)\partial_{\mathrm{x}^i} - 2\mathrm{x}_i D\,, \tag{5.2.4}$$

dok su u koordinatama (η, y^i)

$$P_i = -\frac{1}{\eta}\,\partial_{\mathrm{y}^i}, \quad L_{ij} = \mathrm{y}_i\partial_{\mathrm{y}^j} - \mathrm{y}_j\partial_{\mathrm{y}^i}\,, \tag{5.2.5}$$

$$D = -\eta\partial_\eta, \quad K_i = \eta\left(1 - \mathrm{y}^2\right)\partial_{\mathrm{y}^i} + 2\eta^2 \mathrm{y}_i \partial_\eta\ . \tag{5.2.6}$$

Da bismo razmatrali kvantnu teoriju polja na de Sitter-ovom prostoru potrebno je da znamo mode slobodnog polja, tj. svojstvene funkcije Laplasovog operatora. Iz tog razloga navodimo izraze za laplasijan u oba prethodno uvedena koordinatna sistema. Operator nalazimo pomoću standardne formule

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\ . \tag{5.2.7}$$

U Poenkareovim koordinatama je

$$\Delta_{dS_d} = -\eta^2\partial_\eta^2 + \eta^2\partial_{\mathrm{x}^i}\partial_{\mathrm{x}_i} + (d-2)\eta\partial_\eta\,, \tag{5.2.8}$$

dok smo (η, y^i) koordinatama za laplasijan dobili

$$\Delta_{dS_d} = -\mathrm{y}^i\mathrm{y}^j\partial_{\mathrm{y}^i}\partial_{\mathrm{y}^j} + \partial_{\mathrm{y}^i}\partial_{\mathrm{y}_i} - \eta^2\partial_\eta^2 + 2\eta\partial_\eta \mathrm{y}^i\partial_{\mathrm{y}^i} - d\,\mathrm{y}^i\partial_{\mathrm{y}^i} + (d-2)\eta\partial_\eta\ . \tag{5.2.9}$$

Laplasijan komutira sa generatorima $SO(1,d)$ i poklapa se sa kvadratnim Kazimirovim operatorom konstruisanim od njih, [62].

5.3 Vakuumi u de Siterovom prostoru; familija α vakuuma

Ovde razmatramo vakuume masenog skalarnog polja u de Siterovom prostoru fokusirajući se na one koji su invarijantni na de Siterovu grupu. Pokazaćemo da postoji jednoparametarska familija de Siter invarijantnih vakuuma koji su generisani iz specijalnog slučaja, euklidskog ili Banč-Dejvisovog vakuuma, pomoću Bogoljubovljeve transformacije sa konstantnim koeficijentima (nezavisnim od frekvencije), [63]. U de Siter invarijantnom stanju, dvotačkasta funkcija $\langle\Phi(x)\Phi(y)\rangle$ jedino zavisi od geodezijskog rastojanja između tačaka x i y i zbog toga je potrebno da uvedemo geodezijsko rastojanje. Neka su X i Y uronjene koordinate u petodimenzioni ravan prostor i neka je realna funkcija Z koja zavisi od promenljivih x i y definisana kao $Z(x,y) = \alpha_{\mathrm{dS}}^{-2}\,\eta_{ab}\,X^a(x)\,Y^b(y)^2$. Tada je geodezijsko rastojanje

$$d(x,y) = \alpha_{\mathrm{dS}}\cos^{-1} Z(x,y). \tag{5.3.1}$$

U Poenkareovim koordinatama (5.2.1), za tačku x određenu koordinatama $(\eta,\vec{x})$ i drugu tačku y određenu koordinatama $(\eta',\vec{x}')$, dobija se da je

$$Z(x,y) = \frac{\eta^2+\eta'^2-(\vec{x}-\vec{x}')^2}{2\eta\eta'}. \tag{5.3.2}$$

Razmotrimo simetričnu dvotačkastu funkciju

$$G_\lambda^{(1)}(x,y) = \langle\lambda|\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(y)\Phi(x)|\lambda\rangle \tag{5.3.3}$$

u de Sitter invarijantnom stanju. Pretpostavićemo da je $|\lambda\rangle$ invarijantno na celu $O(1,4)$ grupu što implicira da funkcija (5.3.3) zavisi od x i y preko geodezijskog rastojanja $d(x,y)$. Pošto je ono funkcija $Z(x,y)$, onda je

$$G^{(1)}(x,y) = G^{(1)}(d(x,y)) = F(Z). \tag{5.3.4}$$

Dvotačkasta funkcija zadovoljava Klajn-Gordonovu jednačinu,

$$(\Delta_x - m^2)\,G^{(1)}(x,y) = 0. \tag{5.3.5}$$

Dalamberijan se računa na osnovu (5.2.7), pa se u Poenkareovim koordinatama dobija izraz (5.2.8). Prethodnu jednačinu možemo da napišemo preko jedne promenljive kao

$$\left((Z^2-1)\frac{d^2}{dZ^2}+4Z\frac{d}{dZ}+m^2\alpha_{\mathrm{dS}}^2\right)F(Z) = 0. \tag{5.3.6}$$

Ova diferencijalna jednačina ima dva fundamentalna realna rešenja: neka je prvo $f(Z)$, onda je drugo $f(-Z)$ zbog invarijantnosti jednačine na smenu $Z\to -Z$. Jedno rešenje je

$$f(Z) = F\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+m^2\alpha_{\mathrm{dS}}^2},\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}+m^2\alpha_{\mathrm{dS}}^2};2;\frac{1+Z}{2}\right), \tag{5.3.7}$$

gde je $F(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1(a,b;c;z)$ (Gausova) hipergeometrijska funkcija. Za $m^2>0$ rešenje (5.3.7) ima singularitet u $Z=1$ i zasek je duž pozitivng dela realne ose za $1<Z<\infty$. Singularitet se javlja kad je geodezijsko rastojanje između tačaka x i y jednako nuli. Drugo, linearno nezavisno rešenje za $m^2>0$, je $f(-Z)$. Singularitet je sada u $Z=-1$ i odgovara situaciji kada je geodezijsko rastojanje između x i $\bar{y}$, antipodalne tačke od koordinate y[3], jednako nuli. Opšte rešenje jednačine (5.3.6) je linearna kombinacija pomenutih rešenja,

$$F(Z) = af(Z)+bf(-Z). \tag{5.3.8}$$

[2]Pošto ćemo grčko slovo α da koristimo kod α-vakuuma, onda konstantu koja je povezana sa Hablovom konstanom označavamo sa $\alpha_{\mathrm{dS}} = \frac{1}{H}$.

[3]Za tačku x sa petovektorom $X^a(x)$ antipodalna tačka $\bar{x}$ je određena petovektorom $-X^a(x)$, tako da je $X^a(\bar{x}) = -X^a(x)$.

Banč-Dejvisov (BD) vakuum, koji ovde označavamo sa $\lambda = 0$, odgovara situaciji kada je $b = 0$. Vrednost konstante a je određena kanonskim komutacionim relacijama između Φ i $\dot{\Phi}$, [64].

Sada ćemo da pokažemo da iz ortonormiranog skupa moda koje definišu BD vakuum, $u_i(x)$, možemo da definišemo novi skup moda $v_i(x)$ tako da su vakuumi definisani novim modama takođe de Sitter invarijantni. Nove mode su definisane Bogoljubovljevom transformacijom

$$v_i(x) = A\, u_i(x) + B\, u_i^*(x), \tag{5.3.9}$$

uz dva zahteva: A i B su konstante koje ne zavise od i i mode v_i su ortonormirane. Iz drugog zahteva se dobija uslov na konstante $|A|^2 - |B|^2 = 1$. Razmotrimo sada sledeće mogućnosti za izbor konstanti:

- $A, B \in \mathbb{R}$, pa mogu da se napišu kao $A = \cosh\alpha$, $B = \sinh\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
- $A, B \in \mathbb{C}$ i mogu da se napišu kao $A = \cosh\alpha\, e^{i\gamma}$, $B = \sinh\alpha\, e^{i(\gamma+\beta)}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

Pošto je $e^{i\gamma}$ ukupna faza, ona će da nestane kada gledamo očekivane vrednosti, tako da možemo da uzemo da je $\gamma = 0$. Onda su mode date izrazom

$$v_i(x) = \cosh\alpha\, u_i(x) + \sinh\alpha\, e^{i\beta}\, u_i^*(x), \tag{5.3.10}$$

sa $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in (-\pi, \pi)$. Izbor $\alpha = 0$ tj. $A = 1$ odgovara BD vakuumu. Ideja je da pokažemo da je za $\alpha \neq 0$ vakuum definisan modama (5.3.10) de Sitter inavrijantan.

Sada ćemo da prikažemo zbog čega BD mode mogu da se izaberu tako da zadovoljavaju

$$u_i(\bar{x}) = u_i^*(x), \tag{5.3.11}$$

gde je $\bar{x}$ antipodalna tačka od x, a indeks i se odnosi na sve kvantne brojeve koje mode nose. Uzmimo koordinatni sistem koji pokriva ceo prostor ($k = 1$), sa metrikom

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \;\; d\Omega^2, \qquad \alpha_{\mathrm{dS}} = 1, \tag{5.3.12}$$

gde je $d\Omega^2$ metrika na jediničnoj sferi S^3. Mode koje definišu euklidski vakuum su oblika

$$u_{klm}(x) = u_{klm}(t, \chi, \theta, \varphi) = y_k(t) Y_{klm}(\Omega), \tag{5.3.13}$$

gde je Y_{klm} kompletan skup sfernih harmonika na S^3 koji zadovoljavaju $-\Delta_3 Y_{klm} = k(k+2) Y_{klm}$, a k, l, m su celi brojevi takvi da je $m = -l, ..., +l, l = 0, ..., k$. Pri antipodalnoj transformaciji $x \to \bar{x}$ tj. $(t, \Omega) \to (-t, \bar{\Omega})$, vremenski i prostorni deo moda (5.3.13) se transformišu na sledeći način

$$y_k(\bar{t} = -t) = y_k^*(t), \qquad Y_{klm}(\bar{\Omega}) = (-1)^k Y_{kl-m}^*(\Omega), \tag{5.3.14}$$

tako da je $u_{klm}(\bar{x}) = (-1)^k\, u_{kl-m}^*(x)$. Sada, preko moda (5.3.13), koristeći Bogoljubovljevu transformaciju, definišemo nove mode

$$\tilde{u}_{klm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/2)k} (e^{i\pi/4} u_{klm}(x) + e^{-i\pi/4} u_{kl-m}(x)), \tag{5.3.15}$$

za koje se lako pokazuje da čine kompletan skup ortonormiranih moda. Iz (5.1.21) vidimo da je (5.3.15) trivijalna Bogoljubljeva transformacija jer su svi koeficijenti β jednaki nuli. Nenulti su jedino koeficijenti $\alpha_{klm,klm} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/2)k + i\pi/4}$ i $\alpha_{klm,kl-m} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/2)k - i\pi/4}$. Pošto trivijalna Bogoljubovljeva transformacija definiše ekvivalentne vakuume, onda BD vakuum može da se definiše skupom moda $u_i(\bar{x}) = u_i^*(x)$.

Pošto slobodna teorija polja može da se definiše preko dvotačkastih funkcija, onda ćemo da pokažemo da su one de Siter invarijantne. Razmotrimo simetričnu dvotačkastu funkciju u stanju (α, β) kao sumu po modama,

$$G^{(1)}_{\alpha\beta}(x,y) = \langle \alpha,\beta|\{\Phi(x),\Phi(y)\}|\alpha,\beta\rangle = \sum_i \left(v_i(x)v_i^*(y) + v_i^*(x)v_i(y)\right). \tag{5.3.16}$$

Desna strana poslednjeg izraza se lako dobija iz razvoja polja $\Phi(x)$ i $\Phi(y)$ po modama (npr. kao u (5.1.17)), definicije vakuuma (npr. 5.1.19) i komutatora koji zadovoljavaju operatori kreacije i anhilacije $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Odgovarajuću dvotačkastu funkciju u BD vakuumu $\alpha = 0$ ćemo da označimo sa $G^{(1)}_0$. Zamenjujući (5.3.10) u izraz (5.3.16), dobija se

$$G^{(1)}_{\alpha,\beta}(x,y) = \cosh 2\alpha\, G^{(1)}_0(Z(x,y)) + \sinh 2\alpha\, (\cos\beta\, G^{(1)}_0(-Z(x,y)) - \sin\beta\, D_0(\bar{x},y)). \tag{5.3.17}$$

Odavde se vidi da je $G^{(1)}_{\alpha,\beta}$ invarijantno na celu (nepovezanu) de Siterovu grupu jedino kad je $\beta = 0$.

5.4 Skalarno polje na dS$_d$

Razmatramo teoriju realnog skalarnog polja Φ mase M u de Siterovom prostoru u d dimenzija, dS$_d$. Za početak treba da se nađe prostor kompleksnih rešenja Klajn-Gordonove jednačine,

$$\left(\Delta_{dS_d} - M^2\right)\Phi = 0\ . \tag{5.4.1}$$

Skalarni proizvod na ovom prostoru je definisan kao integral po Košijevoj površi Σ, za koju smo izabrali $\Sigma = \{\eta = \text{const}\}$,

$$\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle = -i\int_\Sigma d^{d-1}\mathrm{x}\ \eta^{-d+2}\left(\Phi_1^*\partial_\eta\Phi_2 - \Phi_2\partial_\eta\Phi_1^*\right)\ . \tag{5.4.2}$$

U odsustvu terminologije, ovaj skalarni proizvod zovemo Klajn-Gordonov. Iz jednačina kretanja (5.4.1) sledi da je on nezavistan od izbora površi prostornog tipa. Iskoristićemo tu slobodu i pomerićemo Σ ka asimptotskoj budućnosti u Poenkareovim koordinatama $\eta \to 0$. Ponašanje rešenja u ovom limesu se lako nalazi iz asimptotike diferencijalnog operatora (5.2.8),

$$\Delta_{dS_d} \sim -\eta^2\partial_\eta^2 + (d-2)\eta\partial_\eta\ . \tag{5.4.3}$$

Svako rešenje može da se napiše u sledećem obliku [65]

$$\Phi(\eta, \mathrm{x}^i) \sim (-\eta)^{\Delta_+}\Phi^+(\mathrm{x}^i) + (-\eta)^{\Delta_-}\Phi^-(\mathrm{x}^i)\,, \qquad \eta \to 0\,, \tag{5.4.4}$$

gde su

$$\Delta_\pm = \frac{d-1}{2} \pm i\kappa\,, \qquad \kappa^2 = M^2 - \left(\frac{d-1}{2}\right)^2 . \tag{5.4.5}$$

Obrnuto, za svaki par funkcija $\Phi^\pm(\mathrm{x}^i)$, postoji rešenje Klajn-Gordonove jednačine sa ovom asimptotikom (5.4.4). Zbog toga rešenja možemo da označimo ovim parom funkcija na sledeći način

$$\Phi(\eta, \mathrm{x}^i) \cong \begin{pmatrix}\Phi^+(\mathrm{x}^i)\\ \Phi^-(\mathrm{x}^i)\end{pmatrix}, \tag{5.4.6}$$

i često ćemo za parove $(\Phi^+(\mathrm{x}^i), \Phi^-(\mathrm{x}^i))^T$ jednostavno da govorimo da su rešenja. Skalarni proizvod (5.4.2) zapisan preko asimptotskih funkcija postaje

$$\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle = 2\kappa\int d^{d-1}\mathrm{x}\ \left((\Phi_1^+)^*\Phi_2^+ - (\Phi_1^-)^*\Phi_2^-\right)\ . \tag{5.4.7}$$

Pošto laplasijan komutira sa dejstvom izometrija dS_d, prostor rešenja jednačine (5.4.1) nosi reprezentaciju $SO(1,d)$ grupe. Reprezentacija se sastoji iz dve ireducibilne komponente, izomorfne jedna drugoj, koje pripadaju glavnoj unitarnoj seriji, [56][4]. Ova činjenica se ispoljava u dvokomponentnoj notaciji (5.4.6) - svaka od komponenti $\Phi^+(\mathtt{x}^i)$ i $\Phi^-(\mathtt{x}^i)$ parametrizuje vektor u jednoj od dve glavne serije reprezentacije $SO(1,d)$ [5]. Iz izraza (5.4.7) je takođe jasno da je Klajn-Gordonov skalarni proizvod (5.4.2) $SO(1,d)$-invarijantan. Skalarno polje se kvantuje na standardni način, sledeći proceduru iz 5.1.2

5.5 Mode skalarnog polja u Poenkareovim koordinatama; Banč-Dejvisov vakuum

Ovde rešavamo Klajn-Gordonovu jednačinu u Poenkareovim koordinatama. Sa $h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i)$ označavamo svojstvene funkcije laplasijana u ravnom prostoru $\partial_{\mathtt{x}^i}\partial_{\mathtt{x}_i}$, sa svojstvenim vrednostima $-k^2$. Oznaka λ u indeksu se odnosi na dodatne kvantne brojeve koji određuju ove funkcije. U ravnom $d-1$ dimenzionom prostoru u sfernim koordinatama laplasijan je

$$\partial_{\mathtt{x}^i}\partial_{\mathtt{x}_i} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{d-2}}, \tag{5.5.1}$$

gde je $\Delta_{S^{d-2}}$ laplasijan na sferi S^{d-2}. Svojstvene funkcije ovog laplasijana su sferni harmonici $Y_l^{\vec{m}}(\theta_a)$ na sferi S^{d-2} sa svojstvenim vrednostima $-l(l+d-3)$. U sfernim koordinatama svojstvene funkcije lapalsijana (5.5.1) su

$$h_{k,l,\vec{m}}(\mathtt{x}^i) = \sqrt{k}\, r^{\frac{3-d}{2}} J_{\frac{d-3}{2}+l}(kr)\, Y_l^{\vec{m}}(\theta_a)\,. \tag{5.5.2}$$

Mode koje su rešenja Klajn-Gordonove jednačine označavamo sa

$$u_{k,\lambda,\pm\kappa}(\eta,\mathtt{x}^i) = C_\pm(-\eta)^{\frac{d-1}{2}} J_{\pm i\kappa}(-k\eta)\, h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i)\,, \tag{5.5.3}$$

gde su $J_{\pm i\kappa}$ Beselove funkcije. Asimptotsko ponašanje funkcija $u_{k,\lambda,\pm\kappa}(\eta,\mathtt{x}^i)$ u limesu $\eta\to 0$ je određeno osobinama Beselovih funkcija,

$$(-\eta)^{\frac{d-1}{2}} J_{\pm i\kappa}(-k\eta) \sim (-\eta)^{\frac{d-1}{2}\pm i\kappa}\, \frac{(k/2)^{\pm i\kappa}}{\Gamma(1\pm i\kappa)}\,. \tag{5.5.4}$$

U dodatku A.2.1 su definisane Beselove funkcije i sumirane njihove osnovne osobine. Vidimo da se mode polja u ovom limesu pojednostavljuju. Koristeći dvokomponentnu notaciju koju smo uveli u (5.4.6), zapisujemo ih na sledeći način

$$u_{k,\lambda,\kappa} \cong \frac{C_+(k/2)^{i\kappa}}{\Gamma(1+i\kappa)}\begin{pmatrix} h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{k,\lambda,-\kappa} \cong \frac{C_-(k/2)^{-i\kappa}}{\Gamma(1-i\kappa)}\begin{pmatrix} 0 \\ h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i) \end{pmatrix}\,. \tag{5.5.5}$$

Jasno je da su funkcije sa indeksom κ ortogonalne funkcijama sa indeksom $-\kappa$. Štaviše, pokazaćemo da su funkcije u svakom od skupova ortogonalne u odnosu na skalarni proizvod

[4]Pretpostavljamo da je $\kappa^2 > 0$ tj. da je skalarno polje teško, $M^2 > (d-1)^2/4$, i prema tome koristimo glavnu seriju reprezentacija grupe $SO(1,d)$. Informacija o tome da li je κ realno ili imaginarno je relevantna kod transformacionih osobina Beselovih funkcija koje ćemo da koristimo; konačni rezultati su zapravo slični i za polja sa malom masom.

[5]Kvantni brojevi reprezentacija u $d=4$ u notaciji iz radova [66, 50] su $\rho=\kappa$, $s=0$.

(5.4.2). Računamo skalarni proizvod sledećih moda

$$\langle u_{k,l,\vec{m},\kappa}, u_{k',l',\vec{m}',\kappa}\rangle = -i\int r^{d-2}dr\, d\Omega\, \eta^{-d+2}\left(u^*_{k,l,\vec{m},\kappa}\partial_\eta u_{k',l',\vec{m}',\kappa} - u_{k',l',\vec{m}',\kappa}\partial_\eta u^*_{k,l,\vec{m},\kappa}\right)$$
$$= i\,|C_+|^2\int_0^\infty dr\, r J_{\frac{d-3}{2}+l}(kr) J_{\frac{d-3}{2}+l}(k'r)\int d\Omega\, Y_l^{\vec{m}}(\theta_a)\, Y_{l'}^{\vec{m}'}(\theta_a)$$
$$\sqrt{kk'}\eta\left(J_{-i\kappa}(-k\eta)\,\partial_\eta J_{i\kappa}(-k'\eta) - J_{i\kappa}(-k'\eta)\,\partial_\eta J_{-i\kappa}(-k\eta)\right)$$
$$= -i\,|C_+|^2\,\eta\,\mathcal{W}\{J_{i\kappa}(-k\eta), J_{-i\kappa}(-k\eta)\}\,\delta(k-k')\delta_{ll'}\,\delta_{\vec{m}\vec{m}'} = \frac{2\sinh(\kappa\pi)}{\pi}|C_+|^2\,\delta(k-k')\,\delta_{ll'}\,\delta_{\vec{m}\vec{m}'}, \tag{5.5.6}$$

gde smo iskoristili integral Beselovih funkcija (A.2.16), zatim ortogonalnost sfernih harmonika i vronskijan Beselovih funkcija

$$\mathcal{W}\{J_{i\kappa}(z), J_{-i\kappa}(z)\} = -\frac{2\sin(i\kappa\pi)}{\pi z}. \tag{5.5.7}$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da za normalizacionu konstantu možemo da uzmemo $C_+ = \sqrt{\pi/(2\sinh(\pi\kappa))}$. Ponavljanjem računa za $\langle u_{k,\lambda,-\kappa}, u_{k',\lambda',-\kappa}\rangle$, dolazimo do istog rezultata i za konstantu $C_- = \sqrt{\pi/(2\sinh(\pi\kappa))}$. Dobili smo da je

$$\langle u_{k,\lambda,\kappa}, u_{k',\lambda',\kappa}\rangle = -\langle u_{k,\lambda,-\kappa}, u_{k',\lambda',-\kappa}\rangle = \delta(k-k')\,\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{5.5.8}$$

tako da prostori $\{u_{k,\lambda,\kappa}\}$ i $\{u_{k,\lambda,-\kappa}\}$ formiraju međusobno ortogonalne potprostore pozitivno- i negativno-frekventnih rešenja jednačine (5.4.1). Pošto je $J^*_{\pm i\kappa}(-k\eta) = J_{\mp i\kappa}(-k\eta)$, kompleksna konjugacija preslikava ova dva prostora jedan u drugi, što ove mode čini pogodnim za kvantizaciju, kao što je navedeno u uvodnom poglavlju 5.1.2. Da budemo skroz precizni, mode zadovoljavaju uslov $u^*_{k,\lambda,\kappa} = u_{k,\lambda,-\kappa}$ jedino ako je prostorni deo rešenja (5.5.2) realan,

$$h^*_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i) = h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i)\ , \tag{5.5.9}$$

što uvek možemo da izaberemo. U slučaju $d=4$, kada su koordinate $(\eta, r, \theta, \varphi)$, to možemo da pokažemo tako što umesto sfernih harmonika Y_l^m uzimamo njihovu linearnu kombinaciju Ψ_l^m definisanu izrazom

$$\Psi_l^m(\theta,\varphi) = \frac{e^{\frac{i\pi m}{2}}}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}Y_l^m(\theta,\varphi) + e^{-\frac{i\pi}{4}}Y_l^{-m}(\theta,\varphi)\right)\ , \tag{5.5.10}$$

koja je očigledno realna. Iz izraza (5.5.5) sledi da je skup pozitivno-frekventnih moda (a stoga i odgovarajući vakuum) $SO(1,d)$ invarijantan.

U kosmologiji je uobičajeni izbor pozitivno-frekventnih rešenja definisan ponašanjem moda u asimptotskoj prošlosti, $|k\eta| \to \infty$. Zbog toga se kod vremenske zavisnosti rešenja umesto Beselovih funkcija uzimaju Hankelove zbog odgovarajućeg ponašanja za velike argumente. Te mode su oblika

$$u^{BD}_{k,\lambda,\kappa} = C\,(-\eta)^{\frac{d-1}{2}}H^{(1)}_{i\kappa}(-k\eta)\,h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i), \tag{5.5.11}$$

i u limesu $|k\eta| \to \infty$ se ponašaju kao

$$u^{BD}_{k,\lambda,\kappa} \sim (-\eta)^{\frac{d-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{-k\eta}}e^{-ik\eta}. \tag{5.5.12}$$

One definišu Banč-Dejvisov vakuum. Normiranjem u odnosu na skalarni proizvod (5.4.2), sličnim računom kao za mode $u_{k,\lambda,\kappa}$, dobija se konstanta $C = \sqrt{\pi/4}\,e^{-\kappa\pi}$. Sada je iskorišćeno je da je $\left(H^{(1)}_{i\kappa}(-k\eta)\right)^* = e^{\kappa\pi}H^{(2)}_{i\kappa}(-k\eta)$ i da je vronskijan Hankelovih funkcija

$$\mathcal{W}\{H^{(1)}_{i\kappa}(z), H^{(2)}_{i\kappa}(z)\} = -\frac{4i}{\pi z}. \tag{5.5.13}$$

Kompletan skup moda koje određuju Banč-Dejvisov vakuum je

$$u^{BD}_{k,\lambda,\kappa} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi\kappa}{2}} (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} H^{(1)}_{i\kappa}(-k\eta)\, h_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i), \tag{5.5.14}$$

$$(u^{BD}_{k,\lambda,\kappa})^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi\kappa}{2}} (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} H^{(2)}_{-i\kappa}(-k\eta)\, h^*_{k,\lambda}(\mathtt{x}^i). \tag{5.5.15}$$

Ovde je, nakon kompleksne konjugacije, iskorišćena još jedna osobina Hankelovih funkcija (A.2.7), $H^{(2)}_{i\kappa}(-k\eta) = e^{-\frac{\kappa\pi}{2}} H^{(2)}_{-i\kappa}(-k\eta)$. Ove mode su ortonormirane,

$$\langle u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}, u^{BD}_{k',\lambda',\kappa}\rangle = \delta(k-k')\,\delta_{\lambda\lambda'}\,, \qquad \langle u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}, (u^{BD}_{k',\lambda',\kappa})^*\rangle = 0\ . \tag{5.5.16}$$

Kako im je prostorni deo isti kao kod moda $u_{k,\lambda,\pm\kappa}$, koristeći veze Beselovih i Hankelovih funkcija koje su date izrazima (A.2.5) i (A.2.6), vidimo da $u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}$ i ${u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}}^*$ mogu da se razviju po modama $u_{k,\lambda,\pm\kappa}$ na sledeći način

$$u^{BD}_{k,\lambda,\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2\sinh(\pi\kappa)}} \left(e^{\frac{\pi\kappa}{2}} u_{k,\lambda,\kappa} - e^{-\frac{\pi\kappa}{2}} u_{k,\lambda,-\kappa}\right)\,, \tag{5.5.17}$$

$$(u^{BD}_{k,\lambda,\kappa})^* = \frac{1}{\sqrt{2\sinh(\pi\kappa)}} \left(e^{\frac{\pi\kappa}{2}} u^*_{k,\lambda,\kappa} - e^{-\frac{\pi\kappa}{2}} u^*_{k,\lambda,-\kappa}\right)\ . \tag{5.5.18}$$

Banč-Dejvisov vakuum je $SO(1,d)$ invarijantan, što na primer može da se vidi iz razvoja $u_{k,\lambda,\kappa}$ po Banč-Dejvisovim modama. Ako odgovarajuće Bogoljubovljeve koeficijente definišemo kao

$$u_{k,\lambda,\kappa} = \sum_{k'\lambda'} \left(\alpha_{k\lambda,k'\lambda'}\, u^{BD}_{k',\lambda',\kappa} + \beta_{k\lambda,k'\lambda'}\,(u^{BD}_{k',\lambda',\kappa})^*\right)\,, \tag{5.5.19}$$

nalazimo da su oni konstante, nezavisne od kvantnih brojeva k i λ,

$$\alpha_{k\lambda,k'\lambda'} = \frac{e^{\frac{\pi\kappa}{2}}}{\sqrt{2\sinh(\pi\kappa)}}\,\delta(k-k')\,\delta_{\lambda\lambda'}\,, \quad \beta_{k\lambda,k'\lambda'} = \frac{e^{-\frac{\pi\kappa}{2}}}{\sqrt{2\sinh(\pi\kappa)}}\,\delta(k-k')\,\delta_{\lambda\lambda'}\ . \tag{5.5.20}$$

Ako sad uporedimo izraz (5.5.19) sa (5.3.10) i napravimo paralelu: $v_i \to u_{k,\lambda,\kappa}$, $u_i \to u^{BD}_{k',\lambda',\kappa}$ i $\beta \to 0$, zaključujemo da vakuum definisan modama $u_{k,\lambda,\kappa}$ pripada familiji α-vakuuma ([63],[67]), sa

$$\coth\alpha = e^{\pi\kappa}\ . \tag{5.5.21}$$

Vakuumi u de Siterovom prostoru, i α-vakuum kao poseban slučaj, su uvedeni u poglavlju 5.3. Odgovarajuće Grinove funkcije mogu lako da se dobiju iz Banč-Dejvisove dvotačkaste funkcije, što se vidi iz (5.3.17). Pošto su dve ireducibilne reprezentacije grupe $SO(1,d)$ određene skupovima $\{u_{k,\lambda,\kappa}\}$ i $\{u^*_{k,\lambda,\kappa}\}$ izomorfne jedna drugoj, onda konstantne linearne kombinacije $u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}$ ovih moda ponovo formiraju reprezentaciju $SO(1,d)$ i odgovarajući vakuum je de Siter invarijantan.

5.6 Mode polja u koordinatama $(\eta, \mathtt{y}^i)$

Dalje rešavamo Klajn-Gordonovu jednačinu u $(\eta, \mathtt{y}^i)$ koordinatama uvedenim u (5.2.2) tako što razdvajamo promenljive na sledeći način

$$v(\eta, \mathtt{y}^i) = (-\eta)^{-i\omega} F(\rho)\, Y^{\vec{m}}_l(\theta_a)\,, \tag{5.6.1}$$

gde su (ρ, θ_a) sferne koordinate dobijene iz $\mathtt{y}^i$. Radijalna koordinata ρ je povezana sa radijalnom koordinatom r dobijenom od $\mathtt{x}^i$, $\rho = r/|\eta|$. Pored laplasijana Δ_{dS_d}, ove funkcije su svojstvene i za operator dilatacije D za svojstvenu vrednost $i\omega$. To znači da u dve dimenzije, uz granične uslove, možemo potpuno da odredimo mode (5.6.1) dok je u četiri dimenzije potrebno naći svojstvene funkcije kompletnog skupa komutirajućih operatora $\{\Delta_{dS_4}, D, L_{ij}L^{ij}, L_{12}\}$ i tada je rešenje određeno kvantnim brojevima ω, l, m. Delovanjem laplasijana (5.2.9) na anzac (5.6.1) on se redukuje na diferencijalni operator po radijalnoj koordinati ρ:

$$\Delta_{dS_d}^{-i\omega,l,\vec{m}} = \left(1-\rho^2\right)\partial_\rho^2 + \left(\frac{d-2}{\rho} - (d+2i\omega)\rho\right)\partial_\rho - \frac{l(l+d-3)}{\rho^2} - i\omega(d-1+i\omega)\ . \tag{5.6.2}$$

Svojstvene funkcije ovog operatora za svojstvenu vrednost M^2 su

$$F_1(\rho) = \rho^l\,{}_2F_1\left(\frac{2l+d-1+2i(\omega-\kappa)}{4}, \frac{2l+d-1+2i(\omega+\kappa)}{4}; \frac{d-1}{2}+l\,;\rho^2\right), \tag{5.6.3}$$

$$F_2(\rho) = \rho^{3-d-l}\,{}_2F_1\left(\frac{-2l-d+5+2i(\omega-\kappa)}{4}, \frac{-2l-d+5+2i(\omega+\kappa)}{4}; \frac{5-d}{2}-l\,;\rho^2\right), \tag{5.6.4}$$

gde je $i\kappa = \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - M^2}$. Razmotrimo njihovo ponašanje za $\rho = 0$. Kada iskoristimo osobinu hipergeometrijske funkcije ${}_2F_1(a,b;c;0) = 1$ vidimo da je rešenje (5.6.4) beskonačno, tako da ga odbacujemo i zadržavamo (5.6.3) koje je konačno. Međutim, pošto nam je za dalju analizu važno ponašanje rešenja u kasnim vremenima $\eta \to 0$, koristićemo promenljivu ρ^{-1}. Stoga je opšte rešenje oblika

$$\begin{aligned} &v(\eta,\rho,\theta_a) = \\ &(-\eta)^{-i\omega}\Bigg(c_+\,\rho^{-\frac{d-1}{2}-i(\omega+\kappa)}\,{}_2F_1\left(\frac{2l+d-1+2i(\omega+\kappa)}{4}, \frac{-2l+5-d+2i(\omega+\kappa)}{4}, 1+i\kappa, \rho^{-2}\right) \\ &+ c_-\,\rho^{-\frac{d-1}{2}-i(\omega-\kappa)}\,{}_2F_1\left(\frac{2l+d-1+2i(\omega-\kappa)}{4}, \frac{-2l+5-d+2i(\omega-\kappa)}{4}, 1-i\kappa, \rho^{-2}\right)\Bigg)\,Y_l^{\vec{m}}(\theta_a)\ . \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

nakon što smo iskoristili osobinu hipergeometrijske funkcije (A.2.31). Slično kao i u prethodnom odeljku, uvodimo mode sa odgovarajućom asimptotikom,

$$\begin{aligned} v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} = c\,(-\eta)^{-i\omega}\,\rho^{-\frac{d-1}{2}-i(\omega+\kappa)} \\ {}_2F_1\left(\frac{2l+d-1+2i(\omega+\kappa)}{4}, \frac{-2l+5-d+2i(\omega+\kappa)}{4}, 1+i\kappa, \rho^{-2}\right)\Psi_l^{\vec{m}}(\theta_a)\ , \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

gde su $\Psi_l^{\vec{m}}$ linearne kombinacije $Y_l^{\vec{m}}$ sa fiksnim l. U limesu $\eta \to 0$, držeći r konstantnim, $\rho^{-1} \to 0$ i rešenja se ponašaju kao

$$v_{\omega,l,\vec{m},\pm\kappa} \sim c\,(-\eta)^{\frac{d-1}{2}\pm i\kappa}\,r^{-\frac{d-1}{2}\mp i\kappa - i\omega}\,\Psi_l^{\vec{m}}(\theta_a)\ . \tag{5.6.7}$$

Opet možemo da koristimo dvokomponentnu notaciju kao i ranije u (5.4.6), pa su mode

$$v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} \cong \begin{pmatrix} c\,r^{-\frac{d-1}{2}-i\kappa-i\omega}\,\Psi_l^{\vec{m}}(\theta_a) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\omega,l,\vec{m},-\kappa} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ c\,r^{-\frac{d-1}{2}+i\kappa-i\omega}\,\Psi_l^{\vec{m}}(\theta_a) \end{pmatrix}\ . \tag{5.6.8}$$

Zbog toga možemo da koristimo izraz za skalarni proizvod na asimptotskoj granici (5.4.7),

$$\begin{aligned} \langle v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, v_{\omega',l',\vec{m}',\kappa}\rangle &= 2\kappa\,|c|^2 \int r^{d-2}\,dr\,d\Omega\left(r^{-\frac{d-1}{2}+i\kappa+i\omega}\Psi_l^{\vec{m}*}(\theta_a)\,r^{-\frac{d-1}{2}-i\kappa-i\omega'}\,\Psi_{l'}^{\vec{m}'}(\theta_a) - 0\right) \\ &= 2\kappa\,|c|^2 \int d\Omega\,\Psi_l^{\vec{m}*}(\theta_a)\,\Psi_{l'}^{\vec{m}'}(\theta_a) \int_0^\infty \frac{dr}{r}\,r^{i(\omega-\omega')} \\ &= 2\kappa\,|c|^2\,\delta_{ll'}\,\delta_{\vec{m}\vec{m}'} \int_{-\infty}^\infty d(\log r)\,e^{i(\omega-\omega')\log r} = 4\pi\kappa|c|^2\,\delta_{ll'}\,\delta_{\vec{m}\vec{m}'}\delta(\omega-\omega') \end{aligned} \tag{5.6.9}$$

i fiksiramo $c = 1/\sqrt{4\pi\kappa}$. Dobili smo

$$\langle v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, v_{\omega',l',\vec{m}',\kappa}\rangle = -\langle v^*_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, v^*_{\omega',l',\vec{m}',\kappa}\rangle = \delta(\omega-\omega')\,\delta_{ll'}\delta_{\vec{m}\vec{m}'}\,, \quad \langle v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, v^*_{\omega',l',\vec{m}',\kappa}\rangle = 0\,.$$

Funkcije $\{v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}\}$ su validan izbor skupa pozitivno-frekventnih rešenja. Iz izraza u okolini asimptotske budućnosti $\eta \to 0$ (5.5.5) i (5.6.8) jasno je da su pozitivno-frekventna rešenja $v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}$ linearne kombinacije pozitivno-frekventnih rešenja $u_{k,l,\vec{m},\kappa}$. Oba skupa obrazuju prostor rešenja kod kojih je druga komponenta u (5.4.6) nula. To znači da su vakuumi definisani ovim izborima moda isti ali različiti od Banč-Dejvisovog vakuuma. Odatle zaključujemo da rešenja Klajn-Gordonove jednačine u (η, y^i) koordinatama prirodno daju de Siter invarijantan vakuum. Možemo da izračunamo Banč-Dejvisove mode u (η, y^i) koordinatama inverzijom α transformacije (5.5.19), tj. sledeći razvoj (5.5.18). To nas vodi do

$$v^{BD}_{\omega,l,\vec{m},\kappa} = \cosh\alpha\, v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} - \sinh\alpha\, v^*_{\omega,l,\vec{m},\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2\sinh(\pi\kappa)}}\left(e^{\frac{\pi\kappa}{2}} v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} - e^{\frac{-\pi\kappa}{2}} v^*_{\omega,l,\vec{m},\kappa}\right), \quad (5.6.10)$$

gde je α dato izrazom (5.5.21). Možemo da idemo i korak dalje i da nađemo preklapanje između u i v moda. Neka je razvoj

$$v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} = \sum_{kl'\vec{m}'}\left(\alpha_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'}\, u^{BD}_{k,l',\vec{m}',\kappa} + \beta_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'}\,(u^{BD}_{k,l',\vec{m}',\kappa})^*\right), \quad (5.6.11)$$

iz kojeg nalazimo Bogoljubovljeve koeficijente

$$\alpha_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'} = \langle v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, u^{BD}_{k,l',\vec{m}',\kappa}\rangle, \qquad \beta_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'} = \langle v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}, (u^{BD}_{k,l',\vec{m}',\kappa})^*\rangle\,. \quad (5.6.12)$$

Pošto ćemo da ih računamo koristeći skalarni proizvod na granici (5.4.7), onda su nam potrebne mode u dvokomponentnoj notaciji,

$$v_{\omega,l,\vec{m},\kappa} \cong \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}}\, r^{-\frac{d-1}{2}-i\kappa-i\omega}\,\Psi^{\vec{m}}_l(\theta_a) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6.13)$$

$$u^{BD}_{k,l,\vec{m},\kappa} \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh\pi\kappa}\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\kappa}{2}}\frac{(k/2)^{i\kappa}}{\Gamma(1+i\kappa)} \\ e^{-\frac{\pi\kappa}{2}}\frac{(k/2)^{-i\kappa}}{\Gamma(1-i\kappa)} \end{pmatrix}\sqrt{k}\, r^{\frac{3-d}{2}} J_{\frac{d-3}{2}+l}(kr)\,\Psi^{\vec{m}}_l(\theta_a). \quad (5.6.14)$$

Za ovaj zapis $u^{BD}_{k,l,\vec{m},\kappa}$ iskoristili smo razvoj po modama $u_{k,l,\vec{m},\kappa}$ i $u_{k,l,\vec{m},-\kappa}$(5.5.18) koje imamo zapisane u dvokomponentnoj notaciji (5.5.5). Sada računamo

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'} = \\
&= 2\kappa\int r^{d-2}\,dr\,d\Omega\,\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}} r^{-\frac{d-1}{2}+i\kappa+i\omega}\Psi^{\vec{m}*}_l(\theta_a)\frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh\pi\kappa}e^{\frac{\pi\kappa}{2}}\frac{(k/2)^{i\kappa}}{\Gamma(1+i\kappa)}\sqrt{k}\, r^{\frac{3-d}{2}} J_{\frac{d-3}{2}+l}(kr)\,\Psi^{\vec{m}}_l(\theta_a) \\
&= \frac{\sqrt{\kappa}\, e^{\frac{\pi\kappa}{2}}}{2\sinh(\pi\kappa)\,\Gamma(1+i\kappa)}\,\delta_{ll'}\delta_{\vec{m}\vec{m}'}\int_0^\infty dr\; r^{i\kappa+i\omega}\left(\frac{k}{2}\right)^{i\kappa}\sqrt{k}\, J_{\frac{d-3}{2}+l}(kr) \\
&= \frac{e^{\frac{\pi\kappa}{2}}}{2\pi\sqrt{k\kappa}}\,\Gamma(1-i\kappa)\left(\frac{k}{2}\right)^{-i\omega}\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{d-1}{2}+l+i(\kappa+\omega)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{d-1}{2}+l-i(\kappa+\omega)}{2}\right)}\,\delta_{ll'}\,\delta_{\vec{m}\vec{m}'}\,, \qquad (5.6.15)
\end{aligned}$$

gde smo iskoristili integral (6.561 14.) iz [68]

$$\int_0^\infty x^\mu\, J_\nu(ax)\,dx = 2^\mu\, a^{-\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}, \qquad -\mathrm{Re}\,\nu - 1 < \mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{2}, \quad a>0, \quad (5.6.16)$$

i osobinu gama funkcije,

$$\Gamma(1+iy)\Gamma(1-iy) = \frac{\pi y}{\sinh \pi y}. \tag{5.6.17}$$

Slično se dobijaju i koeficijenti $\beta_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'} = -e^{-\pi\kappa}\,\alpha_{\omega l\vec{m},kl'\vec{m}'}$. Dodatno, preklapanje između moda $\{v^{BD}_{\omega,l,\vec{m}}, (v^{BD}_{\omega,l,\vec{m}})^*\}$ i $\{u_{k,l,\vec{m},\kappa}, u^*_{k,l,\vec{m},\kappa}\}$ može da se dobije odavde uz pomoć (5.5.19) i (5.5.21).

Završićemo našu analizu o komutativnom de Siterovom prostoru napomenama o dvodimenzionom slučaju. U $d=2$ (što povlači da je $l=0$), mode (5.6.6) mogu da se napišu preko asociranih Ležandrovih funkcija, što je oblik koji ćemo da koristimo u nastavku[6],

$$v_{\omega,\kappa}(\eta,\rho) = c_{\omega,\kappa}\,(-\eta)^{-i\omega}(\rho^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\rho)\,, \qquad \rho>0\,. \tag{5.6.18}$$

Promenljiva $\rho = \mathtt{y}$ u dve dimenzije može da ima i negativne vrednosti, pa je potrebno da izrazom (5.6.18) obuhvatimo i vrednosti $\rho<0$. Najjednostavniji način je da proširimo $Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}$ na parnu funkciju. Sada ćemo da proanaliziramo asimptotiku moda (5.6.18). Kada $\eta\to 0$, tada pri fiksnom $\mathtt{x}$, imamo da $\frac{1}{\mathtt{y}} = \frac{-\eta}{\mathtt{x}} \to 0$, tako da se asocirana Ležandrova funkcija, (A.2.43)

$$\begin{aligned} Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\mathtt{y}) =& e^{\pi\omega}\,2^{-\frac{1}{2}-i\kappa}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(i\kappa-i\omega+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+i\kappa)}\,\mathtt{y}^{i\omega-i\kappa-\frac{1}{2}}(\mathtt{y}^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}} \\ &\times F\left(\frac{3+2i(\kappa-\omega)}{4},\frac{1+2i(\kappa-\omega)}{4},1+i\kappa;\frac{1}{\mathtt{y}^2}\right) \end{aligned} \tag{5.6.19}$$

ponaša kao

$$\begin{aligned} Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\mathtt{y}) &\sim e^{\pi\omega}\,2^{-\frac{1}{2}-i\kappa}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+i\kappa)}\,\mathtt{y}^{i\omega-i\kappa-\frac{1}{2}}(\mathtt{y}^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}} \\ &\sim e^{\pi\omega}\,2^{-\frac{1}{2}-i\kappa}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+i\kappa)}\,\mathtt{y}^{-i\kappa-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

pošto u ovom limesu hipergeometrijska funkcija teži jedinici. Zaključujemo da se mode asimptotski ponašaju kao

$$v_{\omega,\pm\kappa}(\eta,\mathtt{y}) \sim c_{\omega,\pm\kappa}\,e^{\pi\omega}\,2^{-\frac{1}{2}\mp i\kappa}\,\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-i\omega\pm i\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1\pm i\kappa)}(-\eta)^{\frac{1}{2}\pm i\kappa}\,\mathtt{x}^{-\frac{1}{2}\mp i\kappa-i\omega}, \qquad \eta\to 0, \tag{5.6.21}$$

što omogućava zapis u dvokomponentnoj notaciji

$$v_{\omega,\kappa} \cong \begin{pmatrix} c_+\,\mathtt{x}^{-\frac{1}{2}-i\kappa-i\omega} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\omega,-\kappa} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ c_-\,\mathtt{x}^{-\frac{1}{2}+i\kappa-i\omega} \end{pmatrix}, \tag{5.6.22}$$

gde su konstante

$$c_\pm = c_{\omega,\pm\kappa}\,e^{\pi\omega}\,2^{-\frac{1}{2}\mp i\kappa}\,\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(-i\omega\pm i\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1\pm i\kappa)}. \tag{5.6.23}$$

Koristeći skalarni proizvod na asimptotskoj granici (5.4.7), dobijamo da je skalarni proizvod moda

$$\begin{aligned} \langle v_{\omega,\kappa}, v_{\omega',\kappa}\rangle = 2\kappa\int_{-\infty}^{\infty} d\mathtt{x}\, v^*_{\omega,\kappa}\,v_{\omega',\kappa} =& 4\kappa\int_0^{\infty} d\mathtt{x}\, v^*_{\omega,\kappa}\,v_{\omega',\kappa} = \\ & 4\pi^2\kappa\,|c_{\omega,\kappa}|^2 e^{2\pi\omega}\,\frac{|\Gamma(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2})|^2}{|\Gamma(1+i\kappa)|^2}\delta(\omega-\omega'). \end{aligned} \tag{5.6.24}$$

[6]Zbog osobine (A.2.51) kod moda umesto $Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}$ možemo da uzmemo $Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}$, pri čemu se malo menja izraz za normalizacionu konstantu. Definicije i osobine asociranih (pridruženih) Ležandrovih funkcija koje su nam potrebne prilikom računanja date su u dodatku A.2.4.

Normalizaciona konstanta u ovom slučaju je

$$c_{\omega,\kappa} = \frac{\Gamma(1+i\kappa)}{2\pi\sqrt{\kappa}} \, \frac{e^{-\pi\omega}}{\Gamma\left(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2}\right)} \,, \qquad |c_{\omega,\kappa}|^2 = \frac{1}{4\pi^2\sinh(\pi\kappa)} \, e^{-2\pi\omega}\cosh(\pi(\kappa-\omega)) \,. \tag{5.6.25}$$

Ovde smo iskoristili osobine gama funkcija (5.6.17) i

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) = \frac{\pi}{\cosh \pi y}. \tag{5.6.26}$$

Takođe, moguće je razmotriti i drugi način proširenja funkcija $Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}$, npr. koristeći formulu (A.2.52) iz dodatka o Ležandrovim funkcijama,

$$Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(-\rho) = \pm i e^{\mp\kappa\pi} \, Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\rho) \,, \tag{5.6.27}$$

Znak $\pm$ nakon znaka jednakosti odgovara analitičkim proširenjima u gornjoj i donjoj ravni, respektivno. Koristeći proširenje na gornjoj poluravni, tj. gornji znak u (5.6.27), iz skalarnog proizvoda moda,

$$\begin{aligned} \langle v_{\omega,\kappa}, v_{\omega',\kappa}\rangle = 2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{x}\, v^*_{\omega,\kappa}\, v_{\omega',\kappa} = 2\kappa\,(1+e^{-2\kappa\pi}) \int_{0}^{\infty} d\mathrm{x}\, v^*_{\omega,\kappa}\, v_{\omega',\kappa} = \\ 4\kappa\, e^{-\kappa\pi}\cosh\kappa\pi \int_{0}^{\infty} d\mathrm{x}\, v^*_{\omega,\kappa}\, v_{\omega',\kappa} = 4\pi^2\kappa\, |c_{\omega,\kappa}|^2 e^{2\pi\omega} e^{-\kappa\pi}\cosh\kappa\pi \, \frac{|\Gamma(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2})|^2}{|\Gamma(1+i\kappa)|^2}\delta(\omega-\omega'), \end{aligned} \tag{5.6.28}$$

zaključujemo da je vrednost konstante

$$c_{\omega,\kappa} = \frac{\Gamma(1+i\kappa)}{2\pi}\sqrt{\frac{e^{\pi\kappa}}{\kappa\cosh(\pi\kappa)}}\frac{e^{-\pi\omega}}{\Gamma\left(-i\omega+i\kappa+\frac{1}{2}\right)} \,, \; |c_{\omega,\kappa}|^2 = \frac{e^{\pi\kappa}e^{-2\pi\omega}}{2\pi^2\sinh(2\pi\kappa)}\cosh(\pi(\kappa-\omega)) \;.$$

Videli smo u (5.3.16) da se prilikom računanja dvotačkastih Grinovih funkcija sumira ili integrali po kvantnim brojevima moda. Zavisnost od ω, koja je za to relevantna je ista u oba navedena pristupa. U narednim poglavljima ćemo se držati jednostavnijeg slučaja (5.6.25).

6 Kosmološki modeli na nekomutativnom prostoru

Kao što je izloženo u uvodnom delu, fazi prostor se definiše pomoću dva skupa promenljivih: koordinata $\hat{x}^\mu$ i impulsa $\hat{p}_\alpha$, koji zadovoljavaju *frame* relacije oblika

$$[\hat{p}_\alpha, \hat{x}^\mu] = e^\mu_\alpha(\hat{x}) \ . \tag{6.0.1}$$

Desna strana je izražena samo preko $\hat{x}^\mu$. Grubo rečeno, struktura koja proizilazi iz $\{\hat{p}_\alpha, \hat{x}^\mu\}$ bi trebalo da bude kvantna verzija klasične geometrije sa filbajnima $e^\mu_\alpha(x)$. Koordinate i impulsi su ili elementi neke apstraktne algebre ili operatori koji deluju na Hilbertovom prostoru stanja. Algebra $\mathcal{A}$ generisana skupom $\hat{x}^\mu$ je fazi prostor. Impulsi i relacije među njima definišu diferencijalnu geometriju fazi prostora uključujući i laplasijan. Kod fazi de Siterovog prostora, i impulsi $\hat{p}_\alpha$ i koordinate $\hat{x}^\mu$ su konstruisani od elemenata Lijeve algebre $\mathfrak{so}(1,d)$, koji deluju u određenoj ireducibilnoj reprezentaciji. Ovde ćemo da uvedemo fazi de Siterov prostor u dve i četiri dimenzije. U četiri dimenzije ćemo da razmatramo dve mogućnosti za izbor tangentnog prostora. U prvoj verziji se broj dimenzija tangentnog prostora poklapa sa dimenzijom prostora, ali na taj način nije zadržana cela simetrija, dok je u drugoj varijanti tangentni prostor desetodimenzioni, ali poseduje celu simetriju.

6.1 Fazi dS_2

U literaturi postoji nekoliko modela de Siterovog i anti de Siterovog prostora u dve dimenzije (dS_2 i AdS_2) definisanih koristeći $\mathfrak{so}(1,2)$ algebru, [53, 69, 70]. Mi definišemo *fazi dS_2* koristeći *frame* formalizam [11] i konstrukciju h-deformisane ravni Lobačevskog, [52]. O diferencijalnoj geometriji na ovoj nekomutativnoj ravni, [53], je bilo više detalja u uvodnoj glavi 3. Ovaj pristup odgovara i našoj generalnoj konstrukciji fazi de Siterovog prostora u d dimenzija, dS_d. Ako sa ƛ[1] označimo parametar deformacije, onda koordinate $\hat{\eta}$ i $\hat{x}$ fazi dS_2 prostora zadovoljavaju

$$[\hat{\eta}, \hat{x}] = i\text{ƛ}\hat{\eta} \ . \tag{6.1.1}$$

One mogu da se identifikuju sa generatorima translacija i dilatacija $\mathfrak{so}(1,2)$ algebre,

$$\hat{\eta} = -i\text{ƛ}P, \quad \hat{x} = -i\text{ƛ}D \ . \tag{6.1.2}$$

Impulsi su onda

$$\hat{p}_0 = D\,, \qquad \hat{p}_1 = -P \ , \tag{6.1.3}$$

i nenulte *frame* zagrade

$$[\hat{p}_0, \hat{\eta}] = \hat{\eta}\,, \quad [\hat{p}_1, \hat{x}] = \hat{\eta} \ . \tag{6.1.4}$$

[1]Nekomutativnost prostorvremena se meri konstantom ƛ. Postojanje drugih skala dužine ℓ (ili Λ) povezanih sa krivinom prostorvremena omogućava da diskutujemo različite limese, komutativan i limes ravnog prostora. Pošto ih nadalje nećemo diskutovati, u većem delu teksta ćemo fiksirati $\ell = 1$.

Stoga, *frame* elementi

$$e_0^0 = e_1^1 = \eta, \qquad e_1^0 = e_1^0 = 0, \tag{6.1.5}$$

daju korektnu metriku dvodimenzionog de Siterovog prostora u Poenkareovim koordinatama,

$$g^{\mu\nu} = e_\alpha^\mu \, e_\beta^\nu \, \eta_{\alpha\beta}, \qquad g^{00} = -g^{11} = -\eta^2, \qquad g^{01} = g^{10} = 0. \tag{6.1.6}$$

Diferencijalna geometrija ne zavisi od komutatora između koordinata (6.1.1), a zavisi od komutatora između impulsa koji je ovde

$$[\hat{p}_0, \hat{p}_1] = \hat{p}_1 \ . \tag{6.1.7}$$

Nenulte strukturne konstante su $C^1{}_{01} = -C^1{}_{10} = 1$. *Frame* relacije i komutatori među impulsima definišu diferencijal i daju izvode 0- i 1-formi:

$$d\hat{\eta} = (e_\alpha^\mu \, \partial_\mu \hat{\eta})\theta^\alpha = \hat{\eta}\, \theta^0 \, , \quad d\hat{x} = (e_\alpha^\mu \, \partial_\mu \hat{x})\theta^\alpha = \hat{\eta}\, \theta^1 \, , \tag{6.1.8}$$

$$d\theta^0 = -\frac{1}{2} C^0{}_{\beta\gamma} \theta^\beta \theta^\gamma = 0 \, , \quad d\theta^1 = -\frac{1}{2} C^1{}_{\beta\gamma} \theta^\beta \theta^\gamma = -\theta^0 \theta^1 \ . \tag{6.1.9}$$

Co-frame 1-forme θ^α su dualne izvodima $e_\alpha = \mathrm{ad}_{p_\alpha}$. Oni se ponašaju kao njihovi komutativni analogoni: komutiraju sa koordinatama i antikomutiraju međusobno. Prateći pravila iz [11] može se naći jedinstvena Levi-Čivita koneksija $\nabla\theta^\alpha = -\omega^\alpha{}_\beta \otimes \theta^\beta$, sa 1-formama $\omega^\alpha{}_\beta = \omega^\alpha{}_{\gamma\beta}\, \theta^\gamma$ i $\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\gamma\alpha\beta} - C_{\beta\gamma\alpha}\right)$,

$$\omega_{011} = -\omega_{110} = 1, \qquad \omega_{101} = 0, \tag{6.1.10}$$

$$\omega^0{}_1 = \omega^1{}_0 = -\theta^1 \, , \quad \omega^0{}_0 = \omega^1{}_1 = 0 \ . \tag{6.1.11}$$

Ovde su $\alpha, \beta = 0, 1$ *frame* indeksi. Odgovarajuće 2-forme krivine

$$\Omega^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\gamma \omega^\gamma{}_\delta = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \theta^\gamma \theta^\delta \, , \tag{6.1.12}$$

su

$$\Omega^0{}_0 = \Omega^1{}_1 = 0, \qquad \Omega^1{}_0 = \Omega^0{}_1 = \theta^0 \theta^1. \tag{6.1.13}$$

Iz njih se dobijaju komponente Rimanovog $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ i Ričijevog tenzora $R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$, kao i skalar krivine $R = R^\alpha_\alpha$,

$$R_{0101} = -1, \qquad R_{00} = -R_{11} = -1, \qquad R = 2, \tag{6.1.14}$$

koje su iste kao kod dvodimenzionog komutativnog dS prostora.

Takođe, po analogiji sa komutativnom geometrijom, definišemo Hodž dual $*$ i kodiferencijal δ. Hodž dual deluje na (bazisne) 0-, 1- i 2-forme kao

$$*1 = \theta^0 \theta^1, \qquad *\theta^0 = -\theta^1, \qquad *\theta^1 = -\theta^0, \qquad *(\theta^0 \theta^1) = -1, \tag{6.1.15}$$

gde smo uzeli da je $\epsilon_{01} = 1$. Kodiferencijal u tangentnom prostoru dimenzije $n = 2$ na 0 i 1-forme deluje kao $\delta = - * d *$. Kada deluje na 0-forme daje nulu, $\delta\Phi = 0$. Zaključak izvodimo na osnovu toga što u dvodimenzionom tangentnom prostoru Hodž dual 0-formu prebacuje u 2-formu, a diferencijal 2-forme je 0. Stoga, da bismo dobili izraz za laplasijan, koji deluje na funkcije nekomutativnih koordinata (0-forme), krećemo od

$$\Delta\Phi \equiv (\delta d + d\delta)\Phi = \delta d\Phi = - * d * d\Phi, \tag{6.1.16}$$

zatim iskoristimo da je diferencijal funkcije $d\Phi = [p_\alpha, \Phi]\, \theta^\alpha$, nakon čega slede operacije $*$, d pa $*$:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= - *d\left([p_0, \Phi] * \theta^0 + [p_1, \Phi] * \theta^1\right) = *d\left([p_0, \Phi]\, \theta^1 + [p_1, \Phi]\, \theta^0\right) \\
&= *\left([p_0, [p_0, \Phi]]\, \theta^0\theta^1 + [p_0, \Phi]\, d\theta^1 + [p_1, [p_1, \Phi]]\, \theta^1\theta^0 + [p_1, \Phi]\, d\theta^0\right) \\
&= *\left([p_0, [p_0, \Phi]]\, \theta^0\theta^1 - [p_0, \Phi]\, \theta^0\theta^1 + [p_1, [p_1, \Phi]]\, \theta^1\theta^0\right) \\
&= ([p_0, [p_0, \Phi]] - [p_0, \Phi] - [p_1, [p_1, \Phi]]) * \left(\theta^0\theta^1\right). \qquad (6.1.17)
\end{aligned}$$

U prvom redu smo iskoristili (6.1.15), a u drugom smo zaključili da diferencijal komutatora impulsa i 0-forme daje 1-formu koja sadrži dvostruki komutator. Zbog antikomutiranja bazisnih 1-formi imamo da je $(\theta^0)^2 = 0 = (\theta^1)^2$, što znači da postoji ograničenje da se u dvostrukom komutatoru javlja ista komponenta impulsa. U trećem redu smo zamenili diferencijale 1-formi na osnovu (6.1.9). Došli smo do izraza za laplasijan koji deluje na skalarna polja (elemente algbre $\mathcal{A}$):

$$\Delta\Phi = -[\hat{p}_0, [\hat{p}_0, \Phi]] + [\hat{p}_0, \Phi] + [\hat{p}_1, [\hat{p}_1, \Phi]]\ . \qquad (6.1.18)$$

6.2 Fazi dS u četiri dimenzije - I varijanta

Definicija *fazi* dS_4, [66], bazirana je na sličnosti između realizacije klasičnog de Siterovog prostora kao hiperboloida koji je uronjen u petodimenzioni prostor Minkovskog,

$$X^\alpha X_\alpha = \alpha_{\mathrm{dS}}^2\,, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, 4\,, \qquad (6.2.1)$$

i izraza za Kazimirov element $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,4)$,

$$C_4 = W^\alpha W_\alpha\ . \qquad (6.2.2)$$

Ovde su W_α komponente vektora Pauli-Lubanskog

$$W^\alpha = \frac{1}{8}\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\eta} M_{\beta\gamma} M_{\delta\eta}\,, \qquad (6.2.3)$$

gde koristimo konvenciju $\epsilon^{01234} = 1$. U svakoj ireducibilnoj reprezentaciji $\mathfrak{so}(1,4)$, kvadratni Kazimir deluje kao konstanta. Identifikujemo W_α and X_α, koristeći jednačinu uronjavanja (eng. *embedding*) (6.2.1), sa odgovarajućom vezom između kosmološke konstante i vrednosti C_4. Sličnu opservaciju možemo da napravimo za bilo koji de Siterov prostor u parnom broju dimenzija[2]. Kod neparnog broja dimenzija, npr. za $d = 3$, odgovarajući izbor koordinata u slučaju prostora negativne krivine je sugerisan u radu [71]. Uronjene koordinate su kvadratne po

[2]Ova konstrukcija fazi dS prostora može pravolinijski da se generalizuje na ostale prostore maksimalne simetrije sa grupom simetrije $SO(p,q)$ posebno za $p+q = d+1$ sa parnim d. Koordinate mogu da se identifikuju sa vektorom u $d+1$ dimenzionom ravnom prostoru $W^\alpha = \epsilon^{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-1}\alpha_d} M_{\alpha_1\alpha_2} \ldots M_{\alpha_{d-1}\alpha_d}$. Relacija uronjavanja je i Kazimirova relacija $W_\alpha W^\alpha = \mathrm{const}$, tako da je odgovarajući fazi prostor definisan kao unitarna ireducibilna reprezentacija $SO(p,q)$ grupe.

generatorima grupe tako da se ne zatvaraju pri komutiranju, što se vidi iz sledećih komutatora:

$$[X_0, X_i] = \frac{\ell}{2}\epsilon_{ijk}\left(X_j\left(P_i - K_i\right) + L_{jk}X_4\right), \tag{6.2.4}$$

$$[X_4, X_i] = \frac{\ell}{2}\epsilon_{ijk}\left(\left(P_i + K_i\right)X_k + L_{jk}X_0\right), \tag{6.2.5}$$

$$[X_i, X_j] = -\frac{\ell}{2}\epsilon_{ijk}\left(2D\,X_k + (P_k - K_k)X_0 + (P_k + K_k)X_4\right), \tag{6.2.6}$$

$$[X_0, X_4] = \frac{\ell}{2}\,L_{jk}X_i. \tag{6.2.7}$$

Hipotetički, moguće je da bi se u nekoj reprezentaciji dobile relacije koje su zatvorene. Za fazi dS_4 koordinate su izabrane među komponentama vektora Pauli-Lubanskog,

$$\hat{\eta} = -\ell(W_0 - W_4), \quad \hat{x}^i = \ell W^i, \qquad i = 1, 2, 3\ . \tag{6.2.8}$$

To su Poenkareove koordinate koje definišu diferencijalnu (fazi) geometriju. Konstantu ℓ fiksiramo

$$\ell = ƙ\sqrt{\Lambda}, \qquad C_4 = \mathcal{W} = -\frac{3}{ƙ^2\Lambda^2}, \tag{6.2.9}$$

gde je $ƙ$ skala nekomutativnosti sa dimenzijom dužine na kvadrat. Impulsi $\hat{p}_\alpha$ su definisani kao određeni generatori $SO(1,4)$ grupe, slično kao u dvodimenzionom slučaju. Impulsi su [3]

$$\hat{p}_0 = D, \quad \hat{p}_i = -P_i, \qquad i = 1, 2, 3\ . \tag{6.2.10}$$

Da je ovakav izbor impulsa korektan potvrđuju relacije

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}^\alpha] = \delta^\alpha_\mu\,\hat{\eta}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{6.2.11}$$

iz kojih se dobijaju *frame* elementi $e^\alpha_\mu = \hat{\eta}\,\delta^\alpha_\mu$ koji daju metriku dS_4 prostora, $g^{00} = -\hat{\eta}^2$, $g^{ij} = \hat{\eta}^2\,\delta^{ij}$. Relacije (6.2.11) znače da $\hat{x}^\mu = (\hat{\eta}, \hat{x}^i)$ treba da se posmatra kao kvantizacija Poenkareovih koordinata $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}^i)$. U svim ovim izrazima, elemente univerzalno natkrivajuće algebre $U(\mathfrak{g})$ treba posmatrati kao operatore koji deluju u nekoj ireducibilnoj reprezentaciji od $\mathfrak{g}$. Izbor reprezentacije je deo procedure kvantovanja, ali za trenutnu diskusiju nije potrebno znanje reprezentacije.

Frame formalizam obezbeđuje sistematičan način za definisanje diferencijalne geometrije. Baziran je na (6.2.11) i algebri koju zadovoljavaju impulsi. U slučaju koji razmatramo Lijeva algebra je podalgebra $so(1,4)$ algebre,

$$[\hat{p}_0, \hat{p}_i] = \hat{p}_i, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0\ . \tag{6.2.12}$$

Zbog toga kažemo da su fazi dS prostori tipa Lijeve algebre. Iz (6.2.12) sledi da su nenulte strukturne konstante (2.1.5)

$$C^i{}_{0j} = -C^i{}_{j0} = \delta^i_j, \qquad P^{ab}{}_{cd} = \frac{1}{2}\left(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c\right). \tag{6.2.13}$$

Ove strukturne konstante nisu ni ciklične ni potpuno antisimetrične. Struktura Lijeve algebre (6.2.12) implicira da *frame* 1-forme antikomutiraju, $\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a$. Diferencijal 1-formi dobijamo iz (2.1.10),

$$d\theta^0 = 0, \qquad d\theta^i = -\theta^0\theta^i. \tag{6.2.14}$$

[3] U radovim [50, 22], gde prethodno razmatran fazi dS_4 prostor, kod izbora impulsa stajale su konstante npr. za $ip_0 = \sqrt{\zeta\Lambda}\,R = \sqrt{\zeta\Lambda}\,M_{04}$. Kvadratni koren kosmološke konstante je dodat da bi impulsi bili dimenzino dobri, a izbor konstante $\zeta = \frac{1}{3}$ vodi do toga da je skalarna krivina $R = 4\Lambda$. U ovom odeljku sledimo notaciju iz [17] jer su glavni rezultati ove disertacije objavljeni u tom radu.

Za koneksiju se dobija

$$\omega^0{}_0 = 0, \qquad \omega^0{}_i = -\eta_{ij}\,\theta^j\,, \qquad \omega^i{}_0 = -\theta^i\,, \qquad \omega^i{}_j = 0\,. \tag{6.2.15}$$

Ova koneksija je metrički kompatibilna sa nultom torzijom. Dalje nalazimo komponente 2-forme krivine

$$\Omega^0{}_0 = 0, \qquad \Omega^0{}_i = \eta_{ij}\,\theta^0\theta^j\,, \qquad \Omega^i{}_0 = \theta^0\theta^i\,, \qquad \Omega^i{}_j = \eta_{jk}\theta^i\theta^k\,, \tag{6.2.16}$$

iz kojih se lako nalaze nenulte komponente Rimanovog tenzora,

$$R^0{}_{i0j} = \eta_{ij}, \qquad R^i{}_{00j} = \delta^i_j, \qquad R^i{}_{jlm} = \eta_{jm}\delta^i_l - \eta_{jl}\delta^i_m. \tag{6.2.17}$$

Za dobijanje komponenti $R^i{}_{jlm}$ desnu stranu izraza $\Omega^i{}_j = \eta_{jk}\theta^i\theta^k$ smo antisimetrizovali po indeksima l i m pošto *co-frame* 1-forme antikomutiraju,

$$\Omega^i{}_j = \eta_{jk}\,\delta^i_l\,\delta^k_m\,\theta^l\theta^m = \frac{1}{2}\eta_{jk}\,(\delta^i_l\,\delta^k_m - \delta^i_m\,\delta^k_l)\,\theta^l\theta^m = \frac{1}{2}(\eta_{jm}\delta^i_l - \eta_{jl}\delta^i_m)\,\theta^l\theta^m. \tag{6.2.18}$$

Ričijev tenzor i skalar krivine su

$$R_{00} = 3\,\eta_{00}\,, \qquad R_{ij} = 3\,\eta_{ij}\,, \qquad R = 6, \tag{6.2.19}$$

odakle vidimo da Ričijev tenzor zadovoljava relaciju $R_{\alpha\beta} = 3\,\eta_{\alpha\beta}$. Slično kao i u dve dimenzije, četvorodimenzioni fazi dS prostor deli neke važne osobine sa komutativnom verzijom tog prostora: ima konstantnu krivinu i zadovoljava Ajnštajnove jednačine sa pozitivnom kosmološkom konstantom. Na bazisne 1-forme, 4-formu i 0-formu, Hodžova dualnost deluje na sledeći način:

$$\begin{aligned} &*\,\theta^0 = -\theta^1\theta^2\theta^3, \qquad &&*\,\theta^1 = -\theta^0\theta^2\theta^3, \qquad &&*\,\theta^2 = \theta^0\theta^1\theta^3, \\ &*\,\theta^3 = -\theta^0\theta^1\theta^2, \qquad &&*\,(\theta^0\theta^1\theta^2\theta^3) = -1, \qquad &&*\,1 = \theta^0\theta^1\theta^2\theta^3. \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Da bismo našli izraz za lapalsijan koji deluje na skalarne funkcije nekomutativnih koordinata, ostalo je još da uvedemo kodiferencijal. On deluje na p-forme u n dimenzionom prostoru izrazom $\delta = (-1)^{np+n+1} * d*$. Konkretno, interesuje nas slučaj $n = 4$ i $p = 0, 1$, gde kodiferencijal deluje kao $\delta = -* d*$. Pošto on spušta broj forme, onda je $\delta f = 0$. Ovde je zgodno da se diferencijal funkcije napiše preko komutatora, $df = [p_\alpha, f]\theta^\alpha$. Navodimo detalje računa kojim dolazimo do lapalsijana

$$\Delta f = (d\delta + \delta d) f = \delta\left([p_\alpha, f]\,\theta^\alpha\right) \tag{6.2.21}$$

$$\begin{aligned} &= -*\,d*\Big([p_0, f]\,\theta^0 + [p_i, f]\,\theta^i\Big) = -*\,d\Big([p_0, f]*\theta^0 + [p_i, f]*\theta^i\Big) \\ &= -*\,d\Big(-[p_0, f]\,\theta^1\theta^2\theta^3 - [p_1, f]\,\theta^0\theta^2\theta^3 + [p_2, f]\,\theta^0\theta^1\theta^3 - [p_3, f]\,\theta^0\theta^1\theta^2\Big) \\ &= *\Big([p_0, [p_0, f]]\,\theta^0\theta^1\theta^2\theta^3 + [p_0, f]\,d(\theta^1\theta^2\theta^3) + [p_1, [p_1, f]]\,\theta^1\theta^0\theta^2\theta^3 + [p_1, f]\,d(\theta^0\theta^2\theta^3) \\ &\quad -[p_2, [p_2, f]]\,\theta^2\theta^0\theta^1\theta^3 - [p_2, f]\,d(\theta^0\theta^1\theta^3) + [p_3, [p_3, f]]\,\theta^3\theta^0\theta^1\theta^2 + [p_3, f]\,d(\theta^0\theta^1\theta^2)\Big)\,. \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

Primećujemo da je diferencijal 3-formi koje u sebi sadrže bazisnu formu θ^0 jednak nuli, što sledi iz (6.2.14) i činjenice da bazisne 1-forme antikomutiraju. Takođe smo iskoristili takozvano gradirano Lajbnicovo pravilo koje zadovoljava spoljašnji izvod kada deluje na p-forme. Ostalo je još da primenimo Hodž star,

$$\begin{aligned} \Delta f = *\Big(&\big([p_0, [p_0, f]] - [p_1, [p_1, f]] - [p_2, [p_2, f]] - [p_3, [p_3, f]]\big)\,\theta^0\theta^1\theta^2\theta^3 \\ &+[p_0, f]\,(-\theta^0\theta^1\theta^2\theta^3 + \theta^1\theta^0\theta^2\theta^3 - \theta^1\theta^2\theta^0\theta^3)\Big)\,, \end{aligned} \tag{6.2.23}$$

i dobijamo kako laplasijan deluje na skalarna polja, tj. skalarne funkcije nekomutativnih koordinata,

$$\Delta\Phi = -[\hat{p}_0, [\hat{p}_0, \Phi]] + 3[\hat{p}_0, \Phi] + [\hat{p}_i, [\hat{p}_i, \Phi]] \ . \tag{6.2.24}$$

Ovaj laplasijan je invarijantan na 3-rotacije:

$$[L_{ij}, \Delta] = [L_{ij}, -D^2 + 3D + (P_j)^2] = 0. \tag{6.2.25}$$

Kada laplasijan deluje na talasne funkcije, elemente prostora reprezentacije $SO(1,4)$, dobija se izraz koji nazivamo „kvantnomehanički laplasijan”,

$$\triangle\Psi = \Big(\hat{p}_0\hat{p}^0 + \hat{p}_i\hat{p}^i - 3\sqrt{\zeta\Lambda}\,\hat{p}_0\Big)\Psi \, . \tag{6.2.26}$$

Njega smo analizirali u radu [50] i detaljno je razmotren u glavi 7. Ovaj izraz, kao i sve rezultate iz tog rada smo dobili u signaturi koja se koristi u kvantnoj teoriji polja $(+,-,-,-)$. Međutim, taj izbor ne utiče na talasne funkcije koje smo dobili. Promena signature donosi i promenu znaka ispred m^2 u Klajn-Gordonovoj jednačini.

Moguće je da se svojstvene funkcije (6.2.24) napišu preko svojstvenih funkcija kvantnomehaničkog laplasijana i veličina iz teorije reprezentacije kao što su $6j$-simboli $SO(1,4)$ grupe. Mi ćemo da sledimo jednostavniji i direktniji pristup koji koristi poseban skup koordinata na fazi dS_d. To je tema poglavlja 8.1. Naglasićemo jednu nestandardnu i verovatno nepoželjnu osobinu ovih lapalsijana: oni nisu hermitski. U komutativnom slučaju hermitskost laplasijana je garantovana jedinstvenošću de Ramovog računa i invarijantnošću mere kod integrala. U nekomutativnom slučaju diferencijalni račun nije jedinstven i integral (trag) je definisan jedino u konkretnoj reprezentaciji. Nehermitski lapalsijan sličan (6.2.24) dobijen je za $h-$deformisanu ravan Lobačevskog, [53, 52]. Problem je rešen tako što je promenjeno uređenje operatora u [53] i promenom definicije u [52]. U glavi 7 smo razmišljali slično: uveli smo simetrično uređenje laplasijana na sledeći način

$$\Delta\Psi = \frac{1}{2}\left(\triangle + \triangle^\dagger\right)\Psi = (\hat{p}_0\hat{p}^0 + \hat{p}_i\hat{p}^i)\Psi \, . \tag{6.2.27}$$

Za kraj ćemo da dodamo jednu napomenu. Komutativni analogon *frame* elemenata koji su prethodno uvedeni čini skup vektorskih polja

$$e_0 = \eta\partial_\eta, \quad e_i = \eta\partial_{\mathtt{x}^i} \ . \tag{6.2.28}$$

Videli smo da su *frame* izvodi generisani elementima algebre $\mathfrak{so}(1,d)$, što nije slučaj u komutativnoj varijanti. Klasični *frame* izvodi nisu dati preko Kilingovih vektora. Međutim, postoji difeomorfizam koji omogućava prelaz između vektora $\{e_0, e_i\}$ i generatora $\{D, P_i\}$ grupe $SO(1,d)$ koji deluju na de Siterovom prostoru preko izometrija (5.2.3)-(5.2.4). Zaista, ako je Φ involucija

$$\Phi : \mathrm{dS}_d \to \mathrm{dS}_d, \qquad (\eta, \mathtt{x}^i) \mapsto \left(\frac{1}{\eta}, \frac{\mathtt{x}^i}{\eta}\right) , \tag{6.2.29}$$

onda Φ prebacuje $\{e_0, e_i\}$ u $\{\hat{p}_0, \hat{p}_i\}$,

$$\Phi^* e_0 = D = \hat{p}_0, \quad \Phi^* e_i = -P_i = \hat{p}_i \ . \tag{6.2.30}$$

U slučaju h-deformisane hiperboličke ravni, slična struktura je pokazana u [11]. Ovo implicira da, pošto algebra nekomutativnih koordinata nosi reprezentaciju de Siterove grupe, onda je dejstvo na koordinate „tvistovano” pomoću Φ. Pošto Φ komutira sa rotacijama L_{ij}, one ostaju simetrija fazi laplasijana.

6.3 Fazi dS u četiri dimenzije - II varijanta

Identifikacija koordinata koju smo naveli u I verziji važi i ovde. Drugačiji izbor impulsa uzrokuje i drugačiji diferencijalni račun. U tome je razlika između ove dve verzije fazi dS_4. Ako želimo da sačuvamo celu de Siterovu simetriju, za impulse biramo sve generatore $M_{\alpha\beta}$[4],

$$ip_A = \sqrt{\Lambda}\, M_{\alpha\beta}, \tag{6.3.1}$$

gde indeks $A = 1, \dots 10$, označava antisimetrične parove $[\alpha\beta]$. Kada impulsi formiraju Lijevu grupu $[p_A, p_B] = C^D{}_{AB}\, p_D$, skalar krivine je kvadratan po strukturnim konstantama, $R = \frac{1}{4} C^{ABD} C_{DAB}$. Da bi se za skalarnu krivinu dobilo $R = 4\Lambda$, u izraz (6.3.1) dodajemo i $\zeta = 4/15$,

$$ip_A = \sqrt{\zeta\Lambda}\, M_{\alpha\beta}. \tag{6.3.2}$$

Međutim, radi jednostavnosti zadržaćemo se na (6.3.1). Konstanta nekomutativnosti $\hbar$ javlja se kod komutatora među koordinatama,

$$[x_0, x_i] = \hbar\,(\epsilon_{ijk}\, x_j p_{k+3} + p_i x_4), \qquad [x_4, x_i] = \hbar\,(\epsilon_{ijk}\, p_{j+6}\, x_k + p_i x_0), \tag{6.3.3}$$

$$[x_0, x_4] = \hbar\, p_i x_i, \qquad [x_i, x_j] = \hbar\, \epsilon_{ijk}\,(p_{10} x_k - p_{k+3} x_0 - p_{k+6} x_4). \tag{6.3.4}$$

Odavde vidimo da je klasični limes definisan kao $\hbar \to 0$. Ovakav izbor impulsa, a samim tim i diferencijalne strukture, je nestandardan pošto imamo $5 - 1 = 4$ prostorne dimenzije sa tangentnim prostorom od 10 dimenzija. Ova osobina formalno dolazi od nekomutativnosti koordinata. Dalje želimo da dođemo do metrike i laplasijana pomoću diferencijalnog računa definisanog na ovaj način. Na sledeći način povezujemo impulse sa generatorima,

$$ip_i = \sqrt{\Lambda}\, L_i, \quad ip_{i+3} = \sqrt{\Lambda}\, P_i, \quad ip_{i+6} = \sqrt{\Lambda}\, Q_i, \quad ip_{10} = \sqrt{\Lambda}\, R, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.3.5}$$

i uvodimo lokalno ravnu metriku $g^{AB} = \eta^{AB}$ sa signaturom $(++++++----)$, gde su sada $A, B = 1, \dots 10$. Nalazimo da su nenulte strukturne konstante C_{ABC}

$$C_{ijk} = \sqrt{\Lambda}\, \epsilon_{ijk}, \quad C_{i,j+3,k+3} = \sqrt{\Lambda}\, \epsilon_{ijk}, \quad C_{i,j+6,k+6} = -\sqrt{\Lambda}\, \epsilon_{ijk}, \quad C_{i+3,j+6,10} = -\sqrt{\Lambda}\, \delta_{ij} \tag{6.3.6}$$

Nenulte su takođe sve permutacije strukturnih konstanti sa datim indeksima i C_{ABC} su potpuno antisimetrični. To smo imali u vidu prilikom računanja diferencijala 1-formi iz (2.1.10). Dobili smo

$$d\theta^i = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\, \epsilon_{ijk} \left(-\theta^j\theta^k - \theta^{j+3}\theta^{k+3} + \theta^{j+6}\theta^{k+6}\right), \qquad d\theta^{i+3} = \sqrt{\Lambda}\,(-\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^{k+3} + \theta^{i+6}\theta^{10}),$$

$$d\theta^{i+6} = \sqrt{\Lambda}\,(-\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^{k+6} + \theta^{i+3}\theta^{10}), \qquad d\theta^{10} = -\sqrt{\Lambda}\,\theta^{i+3}\theta^{i+6} \tag{6.3.7}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \sqrt{\Lambda}\,(-\theta^2\theta^3 - \theta^5\theta^6 + \theta^8\theta^9), & d\theta^2 &= \sqrt{\Lambda}\,(\theta^1\theta^3 + \theta^4\theta^6 - \theta^7\theta^9),\\
d\theta^3 &= \sqrt{\Lambda}\,(-\theta^1\theta^2 - \theta^4\theta^5 + \theta^7\theta^8), & d\theta^4 &= \sqrt{\Lambda}(\theta^3\theta^5 - \theta^2\theta^6 + \theta^7\theta^{10}),\\
d\theta^5 &= \sqrt{\Lambda}\,(-\theta^3\theta^4 + \theta^1\theta^6 + \theta^8\theta^{10}), & d\theta^6 &= \sqrt{\Lambda}\,(\theta^2\theta^4 - \theta^1\theta^5 + \theta^9\theta^{10}),\\
d\theta^7 &= \sqrt{\Lambda}\,(\theta^3\theta^8 - \theta^2\theta^9 + \theta^4\theta^{10}), & d\theta^8 &= \sqrt{\Lambda}\,(\theta^1\theta^9 - \theta^3\theta^7 + \theta^5\theta^{10}),\\
d\theta^9 &= \sqrt{\Lambda}\,(\theta^2\theta^7 - \theta^1\theta^8 + \theta^6\theta^{10}), & d\theta^{10} &= \sqrt{\Lambda}(-\theta^4\theta^7 - \theta^5\theta^8 - \theta^6\theta^9).
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

[4] Ovde pratimo notaciju iz rada [22] pa smo kao i tamo dodali $\sqrt{\Lambda}$ da bi izraz bio dimenziono dobar.

Za *frame* komponente $e^\alpha_A = [p_A, x^\alpha]$ se dobija

$$e^0_j = 0, \qquad e^0_{j+3} = 0, \qquad e^0_{j+6} = \sqrt{\Lambda}\, x^j, \qquad e^0_{10} = \sqrt{\Lambda}\, x^4, \tag{6.3.9}$$

$$e^i_j = -\epsilon^i{}_{jk}\sqrt{\Lambda}\, x^k, \qquad e^i_{j+3} = \delta^i_j\sqrt{\Lambda}\, x^4, \qquad e^i_{j+6} = \delta^i_j\sqrt{\Lambda}\, x^0, \qquad e^i_{10} = 0, \tag{6.3.10}$$

$$e^4_j = 0, \qquad e^4_{j+3} = -\sqrt{\Lambda}\, x^j, \qquad e^4_{j+6} = 0, \qquad e^4_{10} = \sqrt{\Lambda}\, x^0. \tag{6.3.11}$$

Odavde može da se izračuna diferencijal koordinata $dx^\alpha = e^\alpha_A\, \theta^A$,

$$dx^0 = \sqrt{\Lambda}\, x^i\theta^{i+6} + \sqrt{\Lambda}\, x^4\theta^{10}, \tag{6.3.12}$$

$$dx^i = -\epsilon^i{}_{jk}\sqrt{\Lambda}\, x^k\theta^j + \sqrt{\Lambda}\, x^4\theta^{j+3} + \sqrt{\Lambda}\, x^0\theta^{j+6}, \tag{6.3.13}$$

$$dx^4 = -\sqrt{\Lambda}\, x^i\theta^{i+3} + \sqrt{\Lambda}\, x^0\theta^{10}. \tag{6.3.14}$$

Prostornovremenske komponente inverzne metrike, $g^{\alpha\beta} = e^\alpha_A e^\beta_B \eta^{AB}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$g^{\alpha\beta} = \Lambda \begin{pmatrix} -(x^i)^2 - (x^4)^2 & -x^i x^0 & -x^4 x^0 \\ -x^0 x^j & \Big(- (x^0)^2 + (x^i)^2 + (x^4)^2\Big)\, \delta^{ij} - x^j x^i & -x^4 x^j \\ -x^0 x^4 & -x^i x^4 & -(x^0)^2 + (x^i)^2 \end{pmatrix},$$

mogu da se uproste,

$$g^{\alpha\beta} = 3\eta^{\alpha\beta} - \Lambda x^\beta x^\alpha. \tag{6.3.15}$$

U komutativnom limesu metrika $g^{\alpha\beta}$ je singularna i redukuje se na projektor na četvorodimenzioni dS prostor projektujući radijus vektor x_α. Da bismo našli komponente 1-forme koneksije $\omega^A{}_B = \omega^A{}_{CB}\, \theta^C$ potrebne su komponente $\omega_{ABC} = \frac{1}{2}\left(C_{ABC} + C_{CAB} - C_{BCA}\right)$, koje dobijamo iz strukturnih konstanti (6.3.6),

$$\omega_{ijk} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}, \quad \omega_{i,j+3,k+3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}, \quad \omega_{i,j+6,k+6} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}, \quad \omega_{i+3,j+6,10} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\delta_{ij}. \tag{6.3.16}$$

Na njih se prenosi osobina da su potpuno antisimetrični. Nenulte komponente 1-forme koneksije su

$$\omega^i{}_k = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}\theta^j, \qquad \omega^i{}_{k+3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}\theta^{j+3}, \quad \omega^i{}_{k+6} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}\theta^{j+6}, \quad \omega^{i+3}{}_{k+3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}\theta^j,$$

$$\omega^{i+3}{}_{k+6} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\delta_{ik}\theta^{10}, \qquad \omega^{i+3}{}_{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\theta^{i+6}, \quad \omega^{i+6}{}_{k+6} = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\epsilon_{ijk}\theta^j, \qquad \omega^{i+6}{}_{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\,\theta^{i+3}. \tag{6.3.17}$$

Iz njih smo našli nenulte komponente 2-forme krivine

$$\Omega^i{}_k = \Omega^{i+3}_{k+3} = \Omega^{i+6}_{k+6} = \frac{1}{4}\Lambda\left(\theta^i\theta^k + \theta^{i+3}\theta^{k+3} - \theta^{i+6}\theta^{k+6}\right), \qquad \Omega^i{}_{k+3} = \frac{1}{4}\Lambda\left(\theta^i\theta^{k+3} - \theta^k\theta^{i+3}\right),$$

$$\Omega^i{}_{k+6} = \frac{1}{4}\Lambda\left(-\theta^i\theta^{k+6} + \theta^k\theta^{i+6}\right), \qquad \Omega^{i+3}_{k+6} = -\frac{1}{4}\Lambda\,\delta^i_k\theta^{j+3}\theta^{j+6},$$

$$\Omega^{i+3}_{10} = \frac{1}{4}\Lambda\left(\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^{k+6} - \theta^{i+3}\theta^{10}\right), \qquad \Omega^{i+6}_{10} = \frac{1}{4}\Lambda\left(\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^{k+3} - \theta^{i+6}\theta^{10}\right). \tag{6.3.18}$$

Odavde računamo komponente Rimanovog tenzora

$$R^i{}_{klm} = R^i{}_{k\,l+3\,m+3} = -R^i{}_{k\,l+6\,m+6} = R^i{}_{k+3\,l\,m+3} = -R^i{}_{k+6\,l\,m+6} = R^{i+3}{}_{k+3\,l+3\,m+3} =$$

$$-R^{i+3}{}_{k+3\,l+6\,m+6} = -R^{i+6}{}_{k+6\,l+6\,m+6} = \frac{1}{4}\Lambda\left(\delta^i_l\,\eta_{km} - \delta^i_m\,\eta_{kl}\right), \qquad R^{i+3}{}_{k+6\,l+3\,m+6} = -\frac{1}{4}\Lambda\,\delta^i_k\,\eta_{lm},$$

$$R^{i+3}{}_{10\,l\,m+6} = R^{i+6}{}_{10\,l\,m+3} = \frac{1}{4}\Lambda\,\epsilon_{ilm}, \qquad R^{i+3}{}_{10\,k+3\,10} = R^{i+6}{}_{10\,k+6\,10} = -\frac{1}{4}\Lambda\,\delta^i_k, \tag{6.3.19}$$

a zatim komponente Ričijevog tenzora

$$R_{ik} = \frac{3}{2}\Lambda\,\eta_{ik}, \qquad R_{i+3\,k+3} = \frac{3}{2}\Lambda\,\eta_{ik}, \qquad R_{i+6\,k+6} = -\frac{3}{2}\Lambda\,\eta_{ik}, \qquad R_{10\,10} = -\frac{3}{2}\Lambda\,. \tag{6.3.20}$$

Dobili smo da je $R_{AB} = \frac{3}{2}\Lambda\,\eta_{AB}$. Kao što smo već rekli na početku, koristeći dati *frame* za skalarnu krivinu se dobija $R = 15\Lambda$, odnosno nakon skaliranja (6.3.2),

$$R = 15\,\zeta\Lambda. \tag{6.3.21}$$

Hodž dual deluje na bazisne 1- i 10-forme na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&*\theta^1 = \theta^2\dots\theta^{10}, && *\theta^2 = -\theta^1\theta^3\dots\theta^{10}, && *\theta^3 = \theta^1\theta^2\theta^4\dots\theta^{10},\\
&*\theta^4 = -\theta^1\dots\theta^3\theta^5\dots\theta^{10}, && *\theta^5 = \theta^1\dots\theta^4\theta^6\dots\theta^{10}, && *\theta^6 = -\theta^1\dots\theta^5\theta^7\dots\theta^{10},\\
&*\theta^7 = -\theta^1\dots\theta^6\theta^8\dots\theta^{10}, && *\theta^8 = \theta^1\dots\theta^7\theta^9\theta^{10}, && *\theta^9 = -\theta^1\dots\theta^8\theta^{10},\\
&*\theta^{10} = \theta^1\dots\theta^9, && *\theta^1\dots\theta^{10} = 1,
\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

gde smo uzeli da je $\epsilon_{12\dots,10} = 1$. Da bismo našli laplasijan koji deluje na skalarne funkcije, tj. 0-forme, ostalo je još da prokomentarišemo kodiferencijal. U tangentnom prostoru dimenzije $n = 10$, na $p = 0, 1$ forme on deluje sa $\delta = -*d*$. Krećemo od izraza

$$\Delta\Phi = (\delta d + d\delta)\Phi = \delta d\Phi = -*d*\left([p_A,\Phi]\,\theta^A\right) = -*d\left([p_A,\Phi]\,*\theta^A\right) \tag{6.3.23}$$

u kom se podrazumeva sumiranje po indeksu $A = 1,\dots 10$. Dalje primenjujemo Hodž dual 1-formi navedenih u (6.3.22), a zatim delujemo spoljašnjim izvodom,

$$\Delta\Phi = -*\left(d([p_A,\Phi])\,*\theta^A + [p_A,\Phi]\,d*\theta^A\right). \tag{6.3.24}$$

Proanaliziraćemo diferencijal 9-formi na primeru $d*\theta^1 = d(\theta^2\dots\theta^{10})$. Nakon što primenimo gradirano Lajbnicovo pravilo,

$$d*\theta^1 = (d\theta^2)\theta^3\dots\theta^{10} - \theta^2(d\theta^3)\theta^4\dots d\theta^{10} + \theta^2\dots\theta^9(d\theta^{10}), \tag{6.3.25}$$

i uzmemo u obzir izraze (6.3.8) zaključujemo da se u svakom članu javlja kvadrat neke 1-forme. To znači da je $d*\theta^1 = 0$, a isto važi i za sve ostale diferencijale 9-formi, $d*\theta^A = 0$. Ostaje

$$\Delta\Phi = -*\left([p_1,[p_1,\Phi]]\,\theta^1*\theta^1 + \dots [p_{10},[p_{10},\Phi]]\,\theta^{10}*\theta^{10}\right) = -\eta^{AB}[p_A,[p_B,\Phi]]*(\theta^1\dots\theta^{10}), \tag{6.3.26}$$

gde smo iskoristili da su 10-forme $\theta^1*\theta^1 = \dots = \theta^6*\theta^6 = -\theta^7*\theta^7 = \dots = -\theta^{10}*\theta^{10} = \theta^1\dots\theta^{10}$. Došli smo do laplasijana (a time i Klajn-Gordonove jednačine) za skalarno polje

$$\Delta\Phi = -\eta^{AB}[p_A,[p_B,\Phi]] = -\eta^{AB}e_Ae_B\Phi = M^2\Phi. \tag{6.3.27}$$

U ovom slučaju se laplasijan redukuje na Kazimirov operator $C_2 = \mathcal{Q}$. To znači da, kada deluje na talasne funkcije Ψ, laplasijan je konstanta. Pored toga, time smo potvrdili i početnu pretpostvaku da smo zadržali celu de Siterovu simetriju jer Kazimirov operator komutira sa svim generatorima. Kvadratni Kazimirov operator $\mathcal{Q}$ je često povezan sa masom [72, 73].

7 Energija i laplasijan

U prethodnom poglavlju su određene diferencijalno-geometrijske osobine fazi dS prostora. Videli smo da je opisana homogena i izotropna metrika FLRW tipa i da je krivina konstantna. Ove osobine slede iz algebre impulsa i ne zavise od konkretne reprezentacije. Da bi se prostor dalje ispitao, npr. da bi se video spektar koordinata, potrebna je konkretna reprezentacija. Ovde ćemo koristiti Mojlanovu reprezentaciju preko operatora u Hilbertovom prostoru stanja koju smo uveli u poglavlju 4.3. U reprezentacijama $(\rho, s = 0)$ Kazimirov operator je $\mathcal{W} = 0$, pa su sve komponente vektora Pauli-Lubanskog $\mathcal{W}^\alpha = 0$, što bi značilo da je kosmološka konstanta $\Lambda = \frac{3}{\ell^2 \mathcal{W}^2} = \infty$ i da u ovom slučaju ne postoji direktna fizička interpretacija koordinata. Zbog toga su informacije o spektru koordinata dobijene koristeći reprezentacije $(\rho, s = \frac{1}{2})$. Dobijeno je da je spektar prostornih koordinata X^i, X^4 kontinualan, dok je spektar vremenske koordinate X^0 diskretan. Sprektri konformnog i kosmološkog vremena η i $\tau = -\log{(W^0 + W^4)}$ su kontinualni, [66]. U okviru ovog poglavlja želimo da prikažemo rezultate rada [50]: spektar i svojstvene funkcije energije i kvantnomehaničkog laplasijana na fazi dS prostoru, koje smo dobili koristeći Mojlanovu reprezentaciju.

7.1 Spektar energije fazi de Siterovog prostora

U konformnoj teoriji polja energija $\mathcal{E}$ se često identifikuje sa generatorom dilatacije $\mathcal{M}_{04}$. Ovde imamo

$$[i\mathcal{M}_{04}, \mathcal{W}_0 - \mathcal{W}_4] = \mathcal{W}_0 - \mathcal{W}_4 \,, \tag{7.1.1}$$

gde je, $\mathcal{M}_{04}$ kanonski konjugovano kosmološkom vremenu τ. Stoga definišemo energiju kao

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{\ell}\, \mathcal{M}_{04} = \frac{i\hbar}{l\sqrt{\zeta\Lambda}}\, \hat{p}_0 \,. \tag{7.1.2}$$

Rešavamo svojstveni problem energije u reprezentaciji $(\rho, s = 0)$. U potprostoru $\mathcal{H}_\uparrow$, $\mathcal{M}_{04}$ se svodi na

$$M_{04,\uparrow} = M_{04} = p_0 \left(\rho - \frac{3i}{2} - ip\, \frac{\partial}{\partial p}\right). \tag{7.1.3}$$

Ovde je p radijalna komponenta vektora $\vec{p}$, $p^2 = \vec{p}^2 = -p_i p^i$, a p_0 je pozitivni kvadratni koren, $p_0 = \sqrt{p^2+1}$. Pošto M_{04} komutira sa angularnim momentom M_{ij}, znači da će ugaoni deo rešenja svojstvene jednačine

$$M_{04,\uparrow}\, \psi_\uparrow = \lambda\, \psi_\uparrow \tag{7.1.4}$$

biti sferni harmonici $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Zato koristimo sledeći anzac

$$\psi_{\lambda lm,\uparrow}(\vec{p}) = \psi_{\lambda,\uparrow}(p)\, Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{f_{\lambda,\uparrow}(p)}{p}\, Y_l^m(\theta,\varphi)\,, \tag{7.1.5}$$

i dobijamo radijalnu jednačinu

$$i\Big(p_0^2 - 1\Big)\, \frac{d\psi_{\lambda,\uparrow}}{dp_0} + \left(\frac{3i}{2} - \rho\right) p_0\, \psi_{\lambda,\uparrow} = -\lambda\, \psi_{\lambda,\uparrow}\,. \tag{7.1.6}$$

Njena rešenja su

$$\psi_{\lambda,\uparrow} = c_\lambda \, p^{-\frac{3}{2}-i\rho} \left(\frac{p_0 - 1}{p_0 + 1}\right)^{\frac{i\lambda}{2}} . \tag{7.1.7}$$

Uvešćemo novu promenljivu z definisanu kao

$$z = \sqrt{\frac{p_0 - 1}{p_0 + 1}} \in (0, 1) \, , \tag{7.1.8}$$

preko koje su rešenja

$$f_{\lambda,\uparrow} = C_\lambda \, (1 - z^2)^{\frac{1}{2}+i\rho} \, z^{-\frac{1}{2}-i\rho+i\lambda} \, . \tag{7.1.9}$$

U potprostoru $\mathcal{H}_\downarrow$, radijalna jednačina je ista, uz zamenu $p_0 \to -p_0$ ili $\lambda \to -\lambda$; zato njeno rešenje možemo da napišemo preko rešenja u $\mathcal{H}_\uparrow$:

$$f_{\lambda,\downarrow}(p) = f_{-\lambda,\uparrow}(p) \, . \tag{7.1.10}$$

Radijalna rešenja se ponašaju kao ravni talasi po $\log z$. Svojstvena vrednost λ nema ograničenja: $\lambda \in \mathbb{R}$, i energija $\mathcal{E}$ ima kontinualni spektar. Hteli bismo da vidimo normu rešenja (7.1.7) koristeći skalarni proizvod (4.3.16)[74]

$$(\psi_{\lambda,\uparrow}, \psi_{\lambda',\uparrow}) = \delta_{ll'} \, \delta_{mm'} \, C^*_\lambda C_{\lambda'} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z} \, z^{i\,(\lambda'-\lambda)} = \delta_{ll'} \, \delta_{mm'} \, C^*_\lambda C_{\lambda'} \begin{cases} \pi \, \delta(\lambda' - \lambda), & \lambda' = \lambda \\ \frac{1}{i(\lambda'-\lambda)} \, , & \lambda' \neq \lambda \end{cases} . \tag{7.1.11}$$

Vidimo da su zapravo rešenja adekvatno normirana jedino na celom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow$:

$$(\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}) = (\psi_{\lambda,\uparrow}, \psi_{\lambda',\uparrow}) + (\psi_{\lambda,\downarrow}, \psi_{\lambda',\downarrow}) = (\psi_{\lambda,\uparrow}, \psi_{\lambda',\uparrow}) + (\psi_{-\lambda,\downarrow}, \psi_{-\lambda',\downarrow}) = \delta_{ll'} \, \delta_{mm'} \, \delta(\lambda' - \lambda)$$

za $C_\lambda = \sqrt{1/2\pi}$.

U unitarnim ireducibilnim reprezentacijama $(\rho, s = 1/2)$ radijalne svojstvene funkcije imaju malo drugačiji oblik zbog različite mere u skalarnom proizvodu, ali su spektar energije i normalizaciona konstanta isti kao u slučaju $s = 0$.

7.2 Kvantnomehanički laplasijan

U zakrivljenom komutativnom prostorvremenu jednačina kretanja za skalarno polje f je

$$(\Delta + \mu^2 + \xi R) \, f = 0, \tag{7.2.1}$$

gde je μ masa polja, a ξ konstanta interakcije sa krivinom. Pošto je u de Siterovom prostoru krivina R konstantna, jednačina kretanja ima oblik svojstvene jednačine za laplasijan,

$$(\Delta + M^2) f = 0, \qquad M^2 = \mu^2 + \xi R \, . \tag{7.2.2}$$

Partikularna rešenja jednačine (7.2.1) formiraju bazis u Hilbertovom prostoru rešenja $\mathcal{H}$ pogodan za kvantizaciju. Pozitivno energetska rešenja definišu jednočestični Hilbertov prostor stanja $\mathcal{H}_+$ što daje kvantnomehanički opis skalarnih čestica. Podela na pozitivno i negativno energetska stanja može se uraditi u statičkom prostorvremenu. Međutim, podela na $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ nije jedinstvena i zavisi od izbora koordinata, a može se uraditi generalno, [75]. Ponovo ćemo da naglasimo da se u nekomutativnom kontekstu klasična jednačina kretanja za skalarno polje $f \in \mathcal{A}$,

$$[\hat{p}_0, [\hat{p}^0, f]] + [\hat{p}_i, [\hat{p}^i, f]] + M^2 f = 0 \, , \tag{7.2.3}$$

razlikuje od kvantnomehaničke jednačine za skalarnu česticu opisanu talasnom funkcijom $\Psi \in \mathcal{H}$,

$$(\hat{p}_0\hat{p}^0 + \hat{p}_i\hat{p}^i)\Psi + M^2\Psi = 0\,. \tag{7.2.4}$$

U jednostavnim slučajevima rešenja ove dve jednačine su povezana. Izrazi za laplasijan u (7.2.3) i (7.2.4) su računati koristeći tzv. “poljašku“ signaturu. Međutim, rešenje je svakako isto kao da je računato u obrnutoj signaturi jer se razlikuje i znak ispred M^2 u Klajn-Gordonovoj jednačini. Važno je da napomenemo da u fazi dS prostoru svojstvena stanja laplasijana (6.2.27) nemaju određenu vrednost energije jer te dve opservable ne komutiraju, $[\mathcal{E}, \Delta] \neq 0$. To sprečava direktnu interpretaciju pozitivno energetskog potprostora $\mathcal{H}_+$ kao prostora jednočestičnih ekscitacija kvantnog polja. Prelazimo na rešavanje (7.2.3). Da bismo primenili relacije iz knjige [76] prelazimo na trodimenzionu euklidsku notaciju po sledećim pravilima:

$$\begin{aligned}
&\vec{r} = (x^i) = i\vec{\nabla}, \qquad x^i = i\nabla^i = i\frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \vec{p} = (p_i), \qquad \vec{L} = (L_i) = \vec{r} \times \vec{p}, \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_i), \\
&\sigma_i\sigma_j = -\eta_{ij} - i\epsilon_{ijk}\sigma^k, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = -(\delta^m_j\delta^n_k - \delta^n_j\delta^m_k), \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijn} = -2\delta^n_k.
\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Fazi dS laplasijan, preslikan na prostor $\mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow$, je blok-dijagonalan

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_\uparrow & 0 \\ 0 & \Delta_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{7.2.6}$$

Da bismo malo pojednostavili izraze, u nastavku ćemo ih reskalirati $\Delta \to \zeta\Lambda\,\Delta$ i $\zeta\Lambda\, M^2 \to M^2$.

7.2.1 Laplasijan u $(\rho, s = \frac{1}{2})$ reprezentacijama

Rešavamo (7.2.1) u $(\rho, s = \frac{1}{2})$ reprezentacijama. Talasne funkcije su oblika (4.3.14), gde su $\psi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{p})$ bispinori, rešenja Dirakove jednačine u impulsnom prostoru. U skladu sa [77] i preslikavanjem (4.3.10), dati su izrazima

$$\psi_\uparrow(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(\vec{p}) \\ \dfrac{p_k\sigma^k}{1+p_0}\,\varphi_\uparrow(\vec{p}) \end{pmatrix}, \qquad \psi_\downarrow(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_\downarrow(-\vec{p}) \\ -\dfrac{p_k\sigma^k}{1-p_0}\,\varphi_\downarrow(-\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{7.2.7}$$

gde su $\varphi_{\uparrow,\downarrow}$ spinori. Skalarni proizvod je za spin $s = \frac{1}{2}$ je dat izrazom (4.3.17), pa u skladu sa tim ćemo da ga izračunamo u delu prostora označenim sa $\uparrow$,

$$(\psi_\uparrow, \psi'_\uparrow) = \int \frac{d^3p}{p_0}\psi^\dagger_\uparrow\gamma^0\psi'_\uparrow = \int \frac{d^3p}{p_0}\begin{pmatrix}\varphi^\dagger_\uparrow & -\varphi^\dagger_\uparrow\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{1+p_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi'_\uparrow \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{1+p_0}\varphi'_\uparrow\end{pmatrix} = \tag{7.2.8}$$

$$\int \frac{d^3p}{p_0}\varphi^\dagger_\uparrow\varphi'_\uparrow\left(1 - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{(1+p_0)^2}\right) = \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{2}{1+p_0}\varphi^\dagger_\uparrow\varphi'_\uparrow, \tag{7.2.9}$$

gde je iskorišćeno da je $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = p_i\sigma_i\, p_j\sigma_j = -p_ip^i$. Na isti način se računa skalarni proizvod u delu potprostora označenim sa $\downarrow$,

$$(\psi_\downarrow, \psi'_\downarrow) = \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{2}{1-p_0}\varphi^\dagger_\downarrow\varphi'_\downarrow, \tag{7.2.10}$$

pa se onda skalarni proizvod (4.3.14) svodi na

$$(\Psi, \Psi') = (\psi_\uparrow, \psi'_\uparrow) - (\psi_\downarrow, \psi'_\downarrow) = \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{2}{p_0+1}\;\varphi^\dagger_\uparrow\varphi_\uparrow + \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{2}{p_0-1}\;\varphi^\dagger_\downarrow\varphi_\downarrow\,. \tag{7.2.11}$$

Operatori impulsa su

$$
i\hat{p}_0 = \begin{pmatrix} i\hat{p}_{0,\uparrow} & 0 \\ 0 & i\hat{p}_{0,\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\zeta\Lambda}\begin{pmatrix} M_{04} & 0 \\ 0 & -M_{04} \end{pmatrix} \tag{7.2.12}
$$

$$
i\hat{p}_i = \begin{pmatrix} i\hat{p}_{i,\uparrow} & 0 \\ 0 & i\hat{p}_{i,\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\zeta\Lambda}\begin{pmatrix} M_{0i}+M_{i4} & 0 \\ 0 & M_{0i}-M_{i4} \end{pmatrix}, \tag{7.2.13}
$$

sa

$$
M_{04} = \begin{pmatrix} (\rho - \frac{3i}{2})\, p_0 - ip_0 p_i \frac{\partial}{\partial p_i} & \frac{i}{2}\sigma_i p^i \\ \frac{i}{2}\sigma_i p^i & (\rho - \frac{3i}{2})\, p_0 - ip_0 p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix},
$$

$$
M_{0i} + M_{i4} =
$$

$$
\begin{pmatrix} (\rho - \frac{3i}{2})\, p_i + i(p_0+1)\frac{\partial}{\partial p^i} - ip_i p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} p^j \sigma^k & -\frac{i}{2}(p_0+1)\sigma_i \\ -\frac{i}{2}(p_0+1)\sigma_i & (\rho - \frac{3i}{2})\, p_i + i(p_0+1)\frac{\partial}{\partial p^i} - ip_i p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} p^j \sigma^k \end{pmatrix}.
$$

Prvo ćemo da rešimo jednačinu (7.2.2) u gornjem potprostoru $\mathcal{H}_\uparrow$, gde je skalarni proizvod dat sa (4.3.17), (7.2.11) i u kom laplasijan ima oblik

$$
\Delta_\uparrow = \begin{pmatrix} A_\uparrow & B_\uparrow \\ B_\uparrow & A_\uparrow \end{pmatrix}, \quad \text{sa} \tag{7.2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\uparrow = {} & \frac{15}{4} + \rho^2 + 3i(\rho - 2i)p_0 - i(p_0+1)\,\epsilon_{ijk}\, p^i \frac{\partial}{\partial p_j}\sigma^k + \frac{p_0+1}{p_0-1}\, L_i L^i + \frac{2p_0^2}{p_0-1}\left(p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)^2 \\
& + \left(2i\rho p_0 + 2\,\frac{3p_0^2 - p_0 - 1}{p_0 - 1}\right) p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,
\end{aligned} \tag{7.2.15}
$$

$$
B_\uparrow = -i(\rho - 2i)\sigma_i p^i + (p_0+1)^2 \sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} - p_i \sigma^i\, p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\ . \tag{7.2.16}
$$

L_i je orbitalni deo angularnog momenta,

$$
L_i = \epsilon_{ijk}\, i \frac{\partial}{\partial p_j} p_k = i\,\epsilon_{ijk}\left(p_k \frac{\partial}{\partial p_j} + \delta_k^j\right) = i\,\epsilon_{ijk}\, p_k \frac{\partial}{\partial p_j}. \tag{7.2.17}
$$

Ovde smo iskoristili da je $[\frac{\partial}{\partial p_j}, p_k] = \delta_k^j$. U skladu sa notacijom (7.2.5) nalazimo da je $\vec{L}^2 = -L_i L^i = -p^i \frac{\partial}{\partial p^i} + p^i p_i \frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p^j} - \left(p^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right)^2$. Račun za $A_\uparrow$ i $B_\uparrow$ je malo duži, ali pravolinijski. Zbog toga ćemo da navedemo samo transformcije koje smo koristili da bi izrazi bili lakše upotrebljivi kasnije,

$$\frac{\partial}{\partial p^i}p^i = \left[\frac{\partial}{\partial p^i}, p^i\right] + p^i\frac{\partial}{\partial p^i} = 3 + p^i\frac{\partial}{\partial p^i}, \tag{7.2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(p_0 p_j) = \left[\frac{\partial}{\partial p_i}, p_0 p_j\right] + p_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_i} = p_0\delta^i_j - \frac{p^i p_j}{p_0} + p_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{7.2.19}$$

$$p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_j} = p_i\left(\left[p_j, \frac{\partial}{\partial p_i}\right] + \frac{\partial}{\partial p_i}p_j\right)\frac{\partial}{\partial p_j} = \left(p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^2 - p_i\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{7.2.20}$$

$$p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j}p^i = p_i p_j\left(\left[\frac{\partial}{\partial p_j}, p^i\right] + p^i\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = p_i p^i\left(1 + p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right), \tag{7.2.21}$$

$$p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j}p^i p_k\frac{\partial}{\partial p_k} = p_i p_j\left(\left[\frac{\partial}{\partial p_j}, p^i p_k\right] + p^i p_k\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\frac{\partial}{\partial p_k} = p_i p^i\left(p_j\frac{\partial}{\partial p_j} + \left(p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)^2\right), \tag{7.2.22}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial p^i}, p_0\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial p^i}, p_0\right] + 2p_0\frac{\partial}{\partial p^i} = -\frac{p_i}{p_0} + 2p_0\frac{\partial}{\partial p^i}, \tag{7.2.23}$$

$$\left\{p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j}, p_0\right\} = \left[p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j}, p_0\right] + 2p_0 p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j} = p_i p_j\left(-\frac{p^j}{p_0} + 2p_0\frac{\partial}{\partial p_j}\right), \tag{7.2.24}$$

$$\left\{p_0\frac{\partial}{\partial p_i}, p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right\} = 2p_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j} + 2p_0\left(p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^2 - \frac{1}{p_0}p_j p^j p_i\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{7.2.25}$$

Delujemo sa $\Delta_\uparrow$ na bispinore (7.2.7) u svojstvenoj jednačini $\Delta_\uparrow\psi_\uparrow = -M^2\psi_\uparrow$ i dobijamo dve jednačine koje zadovoljavaju spinori

$$A_\uparrow\varphi_\uparrow + B_\uparrow\frac{p_k\sigma^k}{1+p_0}\varphi_\uparrow = -M^2\varphi_\uparrow, \tag{7.2.26}$$

$$B_\uparrow\varphi_\uparrow + A_\uparrow\frac{p_k\sigma^k}{1+p_0}\varphi_\uparrow = -M^2\frac{p_k\sigma^k}{1+p_0}\varphi_\uparrow\ . \tag{7.2.27}$$

Od prve jednačine oduzmemo drugu pomnoženu sa $\frac{p_k\sigma^k}{1+p_0}$. Uvođenjem efektivnog lapalasijana

$$\Delta_{\uparrow,eff} \equiv \frac{1+p_0}{2}\left(A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{1+p_0}A_\uparrow\frac{p_l\sigma^l}{1+p_0} + \left[B_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{1+p_0}\right]\right) \tag{7.2.28}$$

te dve jednačine smo redukovali na jednu

$$\Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi_\uparrow = -M^2\varphi_\uparrow. \tag{7.2.29}$$

Dalje ćemo da transformišemo deo efektivnog laplasijana koji sadrži $A_\uparrow$,

$$\begin{aligned}\frac{p_0+1}{2}\left(A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{p_0+1}A_\uparrow\frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right) &= \frac{p_0+1}{2}\left(A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{p_0+1}A_\uparrow\frac{p_l\sigma^l}{p_0+1} + \frac{(p_k\sigma^k)^2}{(p_0+1)^2}A_\uparrow - \frac{(p_k\sigma^k)^2}{(p_0+1)^2}A_\uparrow\right)\\ &= \left(\frac{p_0+1}{2} - \frac{(p_k\sigma^k)^2}{(p_0+1)^2}\right)A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{2}\left[A_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{2}\left[A_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right],\end{aligned} \tag{7.2.30}$$

tako da je efektivni laplasijan sada dat sledećim izrazom,

$$\Delta_{\uparrow,eff} \equiv A_\uparrow - \frac{p_k\sigma^k}{2}\left[A_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] + \frac{p_0+1}{2}\left[B_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right]. \tag{7.2.31}$$

Da bismo izračunali $\left[B_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right]$, potrebni su nam sledeći komutatori

$$\left[p^i\sigma_i, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = p^ip^l\frac{1}{p_0+1}[\sigma_i,\sigma_l] = -2i\frac{p^ip^l}{p_0+1}\epsilon_{ilk}\sigma^k = 0, \tag{7.2.32}$$

$$\left[p_i\frac{\partial}{\partial p_i}, f(p_0)\right] = \frac{p_0^2-1}{p_0}f'(p_0), \tag{7.2.33}$$

$$\left[\sigma_i\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = -\frac{3}{p_0+1} - \frac{p_ip^i}{p_0(p_0+1)^2} - 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k\frac{p^j}{p_0+1}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{7.2.34}$$

$$\left[p_i\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = \frac{p_i\sigma^i}{p_0(p_0+1)}, \tag{7.2.35}$$

$$\left[p^i\sigma_ip_j\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = \frac{p_0-1}{p_0}, \tag{7.2.36}$$

pa se na kraju dobija

$$\left[B_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = -2(p_0+2) + 2i\epsilon_{ijk}(p_0+1)p^i\frac{\partial}{\partial p_j}\sigma^k. \tag{7.2.37}$$

Za računanje $\left[A_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right]$, pored komutatora (7.2.32)-(7.2.36) potrebni su i sledeći međukoraci

$$\left[-i(p_0+1)\,\epsilon_{ijk}\,p^i\frac{\partial}{\partial p_j}\sigma^k, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = 2\left(-p_i\sigma^i + p_ip^i\sigma_j\frac{\partial}{\partial p_j} - p_i\sigma^ip_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right), \tag{7.2.38}$$

$$\left[L_iL^i, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = \frac{2}{p_0+1}\left(p_i\sigma^i - p_ip^i\sigma_j\frac{\partial}{\partial p_j} + p_i\sigma^ip_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right), \tag{7.2.39}$$

$$\left[\left(p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)^2, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = \frac{p_i\sigma^i}{p_0(p_0+1)}\left(\frac{-p_0^2+p_0+1}{p_0^2} + 2\,p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right). \tag{7.2.40}$$

Dobili smo

$$\left[A_\uparrow, \frac{p_l\sigma^l}{p_0+1}\right] = \frac{2}{p_0+1}(i\rho - p_0)p_i\sigma^i - 2\,p_0(p_0+1)\sigma_i\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{2\,p_0}{(p_0+1)}p_i\sigma^ip_j\frac{\partial}{\partial p_j}. \tag{7.2.41}$$

Uzimajući navedene izraze u obzir, dolazimo do efektivnog laplasijana

$$\begin{aligned}\Delta_{\uparrow,eff} =& \left(\rho+\frac{i}{2}\right)^2 + 2(i\rho+1)\,p_0\left(1+p_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\right) + 2\left(1+p_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\right) + \frac{1+p_0}{1-p_0}\,\vec{L}^2 \\ &- \frac{2p_0^2}{1-p_0}\,p_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\left(1+p_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\right).\end{aligned}$$

Prelaskom na sferni koordinatni sitem,

$$p^2 = -p_ip^i, \qquad p_i\frac{\partial}{\partial p_i} = p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial p}, p\right] = 1, \tag{7.2.42}$$

u gornjem potprostoru dobijamo da on ima sledeći oblik

$$\Delta_{\uparrow,eff} = \left(\rho+\frac{i}{2}\right)^2 + 2(i\rho+1)\,p_0\,\frac{\partial}{\partial p}\,p + 2\,\frac{\partial}{\partial p}\,p + \frac{1+p_0}{1-p_0}\,\vec{L}^2 - \frac{2p_0^2}{1-p_0}\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\,. \tag{7.2.43}$$

Analogno, u donjem potprostoru $\mathcal{H}_\downarrow$, smo došli do izraza

$$\begin{aligned}\Delta_{\downarrow,eff} \equiv& \frac{1-p_0}{2}\left(A_\downarrow - \frac{p_k\sigma^k}{1-p_0}\,A_\downarrow\,\frac{p_i\sigma^i}{1-p_0} - \left[B_\downarrow, \frac{p_i\sigma^i}{1-p_0}\right]\right) \\ =& \left(\rho+\frac{i}{2}\right)^2 - 2(i\rho+1)\,p_0\,\frac{\partial}{\partial p}\,p + 2\,\frac{\partial}{\partial p}\,p + \frac{1-p_0}{1+p_0}\,\vec{L}^2 - \frac{2p_0^2}{1+p_0}\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\,.\end{aligned} \tag{7.2.44}$$

Primećujemo da se ova dva efektivna operatora razlikuju po znaku isped p_0, tj. imamo da je $\Delta_{\downarrow,eff}(p_0) = \Delta_{\uparrow,eff}(-p_0)$. Efektivni laplasijan $\Delta_{\uparrow,eff}$ je sferno-simetričan i nema članove koji uključuju spin, što znači da komutira sa $\vec{J}^2$, J_3 i $\vec{L}^2$ i da svojstvena stanja možemo da označimo odgovarajućim kvantnim brojevima j, m i l. Linearno nezavisna rešenja (7.2.29), označena sa $\varphi_\uparrow$ i $\chi_\uparrow$, možemo da napišemo kao

$$\varphi_\uparrow(\vec{p}) = \frac{f_\uparrow(p)}{p}\,\varphi_{jm}(\theta,\varphi)\,, \quad j = l + \frac{1}{2}\,, \qquad \chi_\uparrow(\vec{p}) = \frac{h_\uparrow(p)}{p}\,\chi_{jm}(\theta,\varphi)\,, \quad j = l - \frac{1}{2}\,, \tag{7.2.45}$$

gde su φ_{jm} i χ_{jm} sferni spinski harmonici, [76], koji su svojstvene funkcije operatora $\vec{L}^2$ za svojstvenu vrednost $l(l+1)$. Funkcije f i h zadovoljavaju istu diferencijalnu jednačinu,

$$2\,p_0^2\,(p_0+1)\frac{d^2 f_\uparrow}{dp^2} + 2(i\,\rho\,p_0 + p_0 + 1)\,p\frac{df_\uparrow}{dp} + \left(\left(\rho + \frac{i}{2}\right)^2 + M^2 - l(l+1)\frac{p_0+1}{p_0-1}\right) f_\uparrow = 0, \tag{7.2.46}$$

koja, nakon smene promenljive $p_0 = \sqrt{1+p^2} \in (1,\infty)$, postaje

$$\begin{aligned} 2\,(p_0+1)(p_0^2-1)\frac{d^2 f_\uparrow}{dp_0^2} &+ 2\left(i\,\rho + \frac{p_0}{p_0-1}\right)(p_0^2-1)\frac{df_\uparrow}{dp_0} \\ &+ \left(\left(\rho + \frac{i}{2}\right)^2 + M^2 - l(l+1)\frac{p_0+1}{p_0-1}\right) f_\uparrow = 0. \end{aligned} \tag{7.2.47}$$

Uvođenjem nove promenljive z (7.1.8), dolazimo do radijalne jednačine za $f_\uparrow$,

$$(1-z^2)\,\frac{d^2 f_\uparrow}{dz^2} + 2(i\rho - 1)z\,\frac{df_\uparrow}{dz} + \left(\left(\rho + \frac{i}{2}\right)^2 - M^2 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right) f_\uparrow = 0\,. \tag{7.2.48}$$

Jednačina za $h_\uparrow$ je identična (sa različitim l, (7.2.45)), tako da ćemo u nastavku diskutovati samo $f_\uparrow$. Rešenja (7.2.48) diferencijalne jednačine su

$$f_{\uparrow,1} = z^{-l}\,F\Big(\frac{1}{4} - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac{1}{4} - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac{1}{2} - l\,; z^2\Big)\,, \tag{7.2.49}$$

$$f_{\uparrow,2} = z^{l+1}\,F\Big(\frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac{3}{2} + l\,; z^2\Big)\,, \tag{7.2.50}$$

gde je $F(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1(a,b;c;z)$ hipergeometrijska funkcija. U tački $z=0$ prvo rešenje je divergentno i nefizičko, a drugo $f_{\uparrow,2}$ konačno i fizičko.

Ostalo je da rešimo jednačinu $\Delta_{\downarrow,eff}\,\varphi_\downarrow = -M^2\varphi_\downarrow$ u potprostoru $\mathcal{H}_\downarrow$. Na isti način kao u $\mathcal{H}_\uparrow$ razdvajamo promenljive,

$$\varphi_\downarrow(\vec{p}) = \frac{f_\downarrow(p)}{p}\,\varphi_{jm}(\theta,\varphi)\,, \quad j = l + \frac{1}{2}\,, \qquad \chi_\downarrow(\vec{p}) = \frac{h_\downarrow(p)}{p}\,\chi_{jm}(\theta,\varphi)\,, \quad j = l - \frac{1}{2}\,. \tag{7.2.51}$$

Kao što smo već rekli, dobija se efektivni laplasijan koji se od $\Delta_{\uparrow,eff}$ razlikuje samo po znaku ispred p_0. Zbog toga ćemo da koristimo i drugačiju smenu u diferencijalnoj jednačini po p_0,

$$\begin{aligned} 2\,(1-p_0)(p_0^2-1)\frac{d^2 f_\downarrow}{dp_0^2} &- 2\left(i\,\rho + \frac{p_0}{p_0+1}\right)(p_0^2-1)\frac{df_\downarrow}{dp_0} \\ &+ \left(\left(\rho + \frac{i}{2}\right)^2 + M^2 - l(l+1)\frac{p_0-1}{p_0+1}\right) f_\downarrow = 0. \end{aligned} \tag{7.2.52}$$

Ova jednačina se pojednostavljuje smenom

$$w = \sqrt{\frac{p_0+1}{p_0-1}} = \frac{1}{z} \in (1,\infty), \tag{7.2.53}$$

nakon koje se dobija jednačina po w,

$$(1-w^2)\,\frac{d^2 f_\downarrow}{dw^2} + 2(i\rho-1)w\,\frac{df_\downarrow}{dw} + \left(\Big(\rho+\frac{i}{2}\Big)^2 - M^2 - \frac{l(l+1)}{w^2}\right) f_\downarrow = 0\,, \tag{7.2.54}$$

koja je, zapravo, identična sa (7.2.48) jedino što je zapisana po promenljivoj w. Za njena rešenja dobijamo

$$f_{\downarrow,1} = w^{-l}\, F\Big(\frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac12 - l\,; w^2\Big)\,, \tag{7.2.55}$$

$$f_{\downarrow,2} = w^{l+1}\, F\Big(\frac34 + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac34 + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac32 + l\,; w^2\Big)\,. \tag{7.2.56}$$

Da bismo proanalizirali njihovu asimptotiku kad $w\to\infty$, hipergeometrijske funkcije ćemo transformisati koristeći

$$F(a,b;c,z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\,(-z)^{-a}\, F(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}) + a \leftrightarrow b, \tag{7.2.57}$$

pa se za hipergeometrijsku funkciju iz rešenja $f_{\downarrow,1}$ dobija

$$\begin{aligned} F\Big(\frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac12 - l\,; w^2\Big) &= \\ &\frac{\Gamma(\frac12 - l)\,\Gamma(iM)}{\Gamma(\frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2})\Gamma(\frac14 - \frac{l}{2} + \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2})} (-w)^{-\frac12 + l + i\rho + iM} \times \\ &F(\frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}, \frac34 + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}; 1 - iM; \frac{1}{w^2}) + M \to -M \\ &\sim C\, w^{-\frac12 + l + i\rho + iM} + C^*\, w^{-\frac12 + l + i\rho - iM}, \end{aligned} \tag{7.2.58}$$

gde smo uveli oznaku $C = \frac{\Gamma(\frac12 - l)\,\Gamma(iM)}{\Gamma(\frac14 - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2})\Gamma(\frac14 - \frac{l}{2} + \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2})}$ i iskoristili da je $F(a,b;c;0) = 1$. Primećujemo da rešenje $f_{\downarrow,2}(w)$ može da se dobije iz $f_{\downarrow,1}(w)$ zamenom $l \to -l-1$, tako da nalazimo da se oba rešenja ponašaju na isti način,

$$f_{\downarrow,1}(w),\ f_{\downarrow,2}(w)\Big|_{w\to\infty} \sim w^{i\rho - \frac12}\left(C w^{iM} + C^* w^{-iM}\right). \tag{7.2.59}$$

Za realno M, oba rešenja su asimptotski kombinacija ravnih talasa po $\log w$ (do na multiplikativne funkcije), dok za $M^2 < 0$ rešenja divergiraju. Ova asimptotika sugeriše da su rešenja normirana na δ-funkciju. Da bismo to i pokazali, potrebno je da malo detaljnije razmotrimo skalarni proizvod. Za skalarni proizvod dve funkcije oblika (7.2.45) dobili smo

$$(\psi_\uparrow, \psi'_\uparrow) = \int \frac{d^3p}{2p_0(1+p_0)}\,\varphi_\uparrow^\dagger \varphi'_\uparrow = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \int_0^1 dz\,(f_\uparrow^* f'_\uparrow + h_\uparrow^* h'_\uparrow)\ , \tag{7.2.60}$$

$$(\psi_\downarrow, \psi'_\downarrow) = \int \frac{d^3p}{2p_0(1-p_0)}\,\varphi_\downarrow^\dagger \varphi'_\downarrow = -\delta_{jj'}\delta_{mm'} \int_1^\infty dw\,(f_\downarrow^* f'_\downarrow + h_\downarrow^* h'_\downarrow)\ . \tag{7.2.61}$$

Dalje, uzimajući u obzir skalarni proizvod (4.3.15) dobijamo

$$(\Psi,\Psi') = \delta_{jj'}\delta_{mm'}\int\limits_0^1 dz\,\left(f_\uparrow^* f_\uparrow' + h_\uparrow^* h_\uparrow'\right) + \delta_{jj'}\delta_{mm'}\int\limits_1^\infty dw\,\left(f_\downarrow^* f_\downarrow' + h_\downarrow^* h_\downarrow'\right) \tag{7.2.62}$$

$$= \delta_{jj'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty dz\,(f^* f' + h^* h')\,. \tag{7.2.63}$$

U poslednjem redu smo proširili radijalne funkcije $f_{\uparrow,\downarrow}(z)$, $h_{\uparrow,\downarrow}(z)$ na celu poluosu $z > 0$ spajajući ih glatko u $z = 1$:

$$f(z) = \begin{cases} f_\uparrow(z), & z\in(0,1) \\ f_\downarrow(z), & z\in(1,\infty)\end{cases}, \qquad h(z) = \begin{cases} h_\uparrow(z), & z\in(0,1) \\ h_\downarrow(z), & z\in(1,\infty)\end{cases}. \tag{7.2.64}$$

Stoga, fizičko rešenje diferencijalne jednačine (7.2.54) koje može glatko da se spoji sa (7.2.50) u $z = 1$ je $f_{2,\downarrow}$ (7.2.56). Uzimajući sve navedeno u obzir, svojstvene funkcije laplasijana Δ su date izrazima

$$\begin{aligned}
&\varphi_{Mjm}(z,\theta,\varphi) = \\
&\quad C(1-z^2)\,z^l\,F\Big(\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}-\frac{iM}{2},\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}+\frac{iM}{2};\frac{3}{2}+l\,;z^2\Big)\,\varphi_{jm}(\theta,\varphi) = \\
&\quad C\,(1-z^2)\,z^{j-\frac{1}{2}}\,F\Big(\frac{j+1-i\rho-iM}{2},\frac{j+1-i\rho+iM}{2};j+1,z^2\Big)\,\varphi_{jm}(\theta,\varphi),
\end{aligned} \tag{7.2.65}$$

$$\begin{aligned}
&\chi_{Mjm}(z,\theta,\varphi) = \\
&\quad C'(1-z^2)\,z^l\,F\Big(\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}-\frac{iM}{2},\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}+\frac{iM}{2};\frac{3}{2}+l\,;z^2\Big)\,\chi_{jm}(\theta,\varphi) = \\
&\quad C'\,(1-z^2)\,z^{j+\frac{1}{2}}\,F\Big(\frac{j+2-i\rho-iM}{2},\frac{j+2-i\rho+iM}{2};j+2,z^2\Big)\,\chi_{jm}(\theta,\varphi),
\end{aligned} \tag{7.2.66}$$

gde je $z\in(0,\infty)$. Spektar laplasijana je kontinualan: $M^2\in(0,\infty)$. Masa M se može uzeti da je pozitivna, $M\geq 0$, jer iz osobine hipergeometrijske funkcije $F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$ sledi da je $\Psi_{M\,jm} = \Psi_{-M\,jm}$. Svaka vrednost M je beskonačno degenerisana, sa degeneracijom $2\times\sum_j(2j+1)$, $j = \frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots$. Ovde je uzeto u obzir da svojstvene vrednosti ne zavise od kvantnih brojeva l (ili j) i m, a za fiksno l postoji $2l+1$ (ili $2j+1$) mogućih vrednosti m. Faktor 2 ispred potiče od toga što rešenjima $\Psi_{M\,jm}$ i $\Psi_{-M\,jm}$ odgovara ista svojstvena vrednost. Normalizaciju svojstvenih funkcija možemo da pokažemo asimptotski u $z\to\infty$. Deo rešenja φ_{Mjm} koji je opisan hipergeometrijskom funkcijom se u ovom limesu ponaša kao

$$\begin{aligned}
&F\Big(\frac{j+1-i\rho-iM}{2},\frac{j+1-i\rho+iM}{2};j+1,z^2\Big) = \\
&\quad (1-z^2)^{-\frac{j+1-i\rho-iM}{2}}F\Big(\frac{j+1+i\rho+iM}{2},\frac{j+1+i\rho-iM}{2};j+1,\frac{z^2}{z^2-1}\Big)\sim \\
&\quad z^{-j-1+i\rho+iM}F\Big(\frac{j+1+i\rho+iM}{2},\frac{j+1+i\rho-iM}{2};j+1,1\Big)\sim z^{-j-1+i\rho+iM}.
\end{aligned} \tag{7.2.67}$$

Iskoristili smo osobine hipergeometrijske funkcije

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \tag{7.2.68}$$

i

$$F(a,b,c,1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{7.2.69}$$

Funkcija $f(z)$ se ponaša kao

$$f(z) \sim z^{i\rho+iM-\frac{1}{2}}. \tag{7.2.70}$$

Asimptika drugog rešenja χ_{Mjm}, tj. dela rešenja opisanog funkcijom $h(z)$ se dobija zamenom $j \to j+1$ u prethodni izraz, a kako on ne zavisi od j, oba rešenja se ponašaju na isti način kad $z \to \infty$, tako da je i

$$h(z) \sim z^{i\rho+iM-\frac{1}{2}}. \tag{7.2.71}$$

Sada izračunamo skalarni proizvod (7.2.63) sa asimptotskim funkcijama,

$$(\Psi_{Mjm}, \Psi_{M'j'm'}) \sim \delta_{jj'}\, \delta_{mm'} \int_0^\infty dz\, z^{-i(M-M')-1} \sim \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}\, \delta(M-M')\,, \tag{7.2.72}$$

čime smo pokazali da su rešenja normirana. Kompletnost i ortogonalnost rešenja može da se pokaže i eksplicitno tako što se funkcija f (kao i h) prepiše preko Jakobijeve funkcije,

$$f(t) = (i \sinh t)^{l+1}\, \phi_M^{(l+\frac{1}{2},-i\rho)}, \tag{7.2.73}$$

definisane kao (A.2.33)[1] sa

$$\alpha = l + \frac{1}{2}, \qquad \beta = -i\rho, \qquad \lambda = M \qquad \text{i} \qquad z = i \sinh t. \tag{7.2.74}$$

Za f^* je potrebno da se, nakon kompleksne konjugacije, hipergeometrijska funkcija transformiše tako da parametri α i β kod Jakobijeve funkcije budu isti kao kod $f(t)$. Za to je u ovom slučaju pogodna transformacija

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \tag{7.2.75}$$

pa se dobija da je

$$f^*(t) = (i\ \sinh t)^{l+1} (1+\sinh^2 t)^{-i\rho}\, \phi_M^{(l+\frac{1}{2},-i\rho)}. \tag{7.2.76}$$

Skalarni proizvod svojstvenih funkcija laplasijana je

$$\begin{aligned}(\Psi_{Mlm}, \Psi_{M'l'm'}) &= \delta_{ll'}\delta_{mm'} 2^{-2l-3+2i\rho} i^{2l+3} \int_0^\infty dt\, (2\sinh t)^{2l+2} (2\cosh t)^{-2i\rho+1} \phi_M^{(l+\frac{1}{2},-i\rho)} \phi_{M'}^{(l+\frac{1}{2},-i\rho)} \\ &= 2^{-2l-2+2i\rho}\, \pi\, i^{2l+3}\, |c_{l+\frac{1}{2},-i\rho}(M)|^2 \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}\, \delta(M-M'),\end{aligned} \tag{7.2.77}$$

gde je za rešenje integrala iskorišćna ortogonalnost Jakobijevih funkcija (A.2.40), a konstanta $c_{l+\frac{1}{2},-i\rho}(M)$ može da se izračuna iz (A.2.39) i data je sledećim izrazom

$$c_{l+\frac{1}{2},-i\rho}(M) = \frac{2^{l+\frac{3}{2}-i\rho-iM}\, \Gamma(\frac{3}{2}+l)\, \Gamma(M)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+l-i\rho+iM\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+l+i\rho+iM\right)\right)}. \tag{7.2.78}$$

Ovu konstantu možemo da povežemo sa normom rešenja, $|C| = \frac{2^{l+1}}{\sqrt{\pi}} |c_{l+\frac{1}{2},-i\rho}(M)|^{-1}$, tako da je jedan od mogućih izbora normalizacione konstante

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+l-i\rho+iM\right)\right)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+l+i\rho+iM\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma(\frac{3}{2}+l)\, \Gamma(M)}. \tag{7.2.79}$$

[1] Definicije Jakobijeve funkcije i osobine koje smo koristili su radu su navedene u Dodatku A.2.3.

Prethodno korišćen metod za pisanje zbira dva skalarna proizvoda u različitim potprostorima kao jedan integral zapravo nam pruža dokaz da su sferno-simetrični operatori na $\mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow$ hermitski. Sada ćemo to da pokažemo na primeru Laplasovog operatora, a obrazloženje je veoma slično i u drugim slučajevima. Pretpostavimo da imamo radijalne funkcije tipa (7.2.45),

$$\varphi(p) = \frac{f(p)}{p}, \qquad \varphi'(p) = \frac{g(p)}{p} . \tag{7.2.80}$$

Matrični elementi laplasijana su definisani izrazima (7.2.60-7.2.62). U radijalnom delu potprostora računamo

$$(\varphi, \Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi') - (\Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi, \varphi') = \int_0^1 dz\ (f^*(\Delta_{\uparrow,eff}\, g) - (\Delta_{\uparrow,eff}\, f)^* g) = \tag{7.2.81}$$

$$\int_0^1 dz\ \bigg((1-z^2) f^* \frac{d^2 g}{dz^2} - 2(i\rho - 1) z f^* \frac{dg}{dz} + \Big(\rho + \frac{i}{2}\Big)^2 f^* g +$$
$$(1-z^2)\frac{d^2 f^*}{dz^2} g + 2(i\rho+1) z \frac{df^*}{dz} g - \Big(\rho - \frac{i}{2}\Big)^2 f^* g\bigg). \tag{7.2.82}$$

Nakon primene parcijalne integracije, dobija se

$$(\varphi, \Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi') - (\Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi, \varphi') = 2i\rho z f^* g\Big|_0^1 + (1-z^2)\Big(f^*\frac{dg}{dz} - \frac{df^*}{dz} g\Big)\Big|_0^1 . \tag{7.2.83}$$

Sad ćemo da vidimo čemu je jednak ovaj izraz za svojstvene funkcije (7.2.65-7.2.66). Oblik zavisnosti funkcija f i g od radijalne promenljive z ćemo da pokažemo na primeru prve od njih,

$$f(z) = p\,\varphi(z) = \frac{2z}{1-z^2}\,\varphi(z) = C\, z^{l+1}\, F\Big(\frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac{3}{2} + l\,; z^2\Big) \tag{7.2.84}$$

Vraćajući se na (7.2.83) primećujemo da je doprinos na granici $z = 1$ različit od nule. Ovo znači da je $\Delta_{\uparrow,eff}$ samo formalno auto-adjungovan pošto razlika $\big(\varphi, (\Delta_{\uparrow,eff} - \Delta^\dagger_{\uparrow,eff})\varphi'\big)$ nije jednaka nuli. Da bismo postigli auto-adjungovanost moramo da nametnemo dodatne granične uslove u $z = 1$ tako da (7.2.81) nestaje u svim stanjima, [78, 79]. Detaljnija analiza pokazuje da odgovarajući granični uslovi u stvari impliciraju diskretnost spektra operatora $\Delta_{\uparrow,eff}$.

Međutim, matrični elementi laplasijana $\Delta_{\uparrow,eff} + \Delta_{\downarrow,eff}$ definisanog na celom prostoru $\mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow$ su dati istim izrazom (7.2.81) samo što se granični članovi računaju u 0 and ∞. To je zbog toga što je $\Delta_{\downarrow,eff}$ dobijen iz $\Delta_{\uparrow,eff}$ zamenom $p_\mu \to -p_\mu$, odnosno za sferno-simetrične operatore zamenom $z \to w$; oblik operatora je potpuno isti. Stoga, kada se izračuna (7.2.81) u granicama $\Big|_0^\infty$ ne postoji potreba za dodatnim uslovima u $z = 1$. Da budemo precizniji, granični članovi za operator $\Delta_{\uparrow,eff}$ u $z = 1 - \epsilon$ se poništavaju sa graničnim članovima od $\Delta_{\downarrow,eff}$ u $z = 1 + \epsilon$ kada se računaju za neprekidne funkcije sa neprekidnim prvim izvodom u $z = 1$.

Da vidimo čemu je jednak izraz (7.2.83) kada matrične elemente računamo na prostoru $\mathcal{H}_\uparrow \oplus \mathcal{H}_\downarrow$, tj. u granicama $\Big|_0^\infty$. Već smo prokomentarisali da ovaj izraz u $z = 0$ teži nuli, tako da je ostalo da vidimo ponašanje u $z = \infty$. Ako iskoristimo osobine hipergeometrijske funkcije (7.2.68) i (7.2.69), vidimo da se za $z \to \infty$ funkcije f i g ponašaju kao

$$f(z) \propto z^{-\frac{1}{2} + i\rho - iM}, \qquad g(z) \propto z^{-\frac{1}{2} + i\rho - iM'} . \tag{7.2.85}$$

Zamenom ovih asimptotskih rešenja u (7.2.83), dobija se

$$(\varphi, \Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi') - (\Delta_{\uparrow,eff}\,\varphi, \varphi') \propto z^{-i(M-M')} . \tag{7.2.86}$$

Ovim smo pokazali da uslovi u $z = \infty$ ne nameću dodatna ograničenja u poređenju sa onima koji dolaze iz normalizacije.

7.2.2 Laplasijan u $(\rho, s=0)$ reprezentacijama

Takođe smo rešili svojstveni problem laplasijana u slučaju $(\rho, s=0)$. Impulsi (7.2.12) i (7.2.13) se dobijaju kada se generatori reprezentuju kao

$$M_{04} = \begin{pmatrix} (\rho - \frac{3i}{2})\, p_0 - i p_0 p_i \frac{\partial}{\partial p_i} & \\ & (\rho - \frac{3i}{2})\, p_0 - i p_0 p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix},$$

$$M_{0i} + M_{i4} = \begin{pmatrix} (\rho - \frac{3i}{2})\, p_i + i(p_0+1) \frac{\partial}{\partial p^i} - i p_i p_k \frac{\partial}{\partial p_k} & \\ & (\rho - \frac{3i}{2})\, p_i + i(p_0+1) \frac{\partial}{\partial p^i} - i p_i p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \end{pmatrix}.$$

Laplasijan u potprostorima $\mathcal{H}_\uparrow$ i $\mathcal{H}_\downarrow$ računamo kao

$$\begin{aligned} \Delta_\uparrow &= (\hat{p}_{0,\uparrow})^2 - (\hat{p}_{i,\uparrow})^2 = (M_{04})^2 - (M_{0i} + M_{04})^2, \\ \Delta_\downarrow &= (\hat{p}_{0,\downarrow})^2 - (\hat{p}_{i,\downarrow})^2 = (M_{04})^2 - (M_{0i} - M_{04})^2. \end{aligned}$$

U potprostoru $\mathcal{H}_\uparrow$ smo došli do izraza

$$\Delta_\uparrow = \rho^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(1 + 2i\rho\Big) p_0 + \Big(2i\rho p_0 + 4p_0 + 2\Big) \frac{\partial}{\partial p}\, p + \frac{1+p_0}{1-p_0}\, \vec{L}^2 - \frac{2p_0^2}{1-p_0}\, p \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p}\, p\,. \quad (7.2.87)$$

Svojstvene funkcije tražimo u obliku

$$\psi_{Mlm,\uparrow}(\vec{p}) = \frac{f_\uparrow(p)}{p}\, Y_l^m(\theta, \varphi)\,. \quad (7.2.88)$$

Zamenom prethodnog anzaca u $\Delta_\uparrow\, \psi_{Mlm,\uparrow}(\vec{p}) = M^2\, \psi_{Mlm,\uparrow}(\vec{p})$ dobili smo radijalnu jednačinu po p,

$$2\, p_0^2\, (p_0+1) \frac{d^2 f_\uparrow}{dp^2} + 2(i\rho p_0 + 2p_0 + 1)\, p \frac{df_\uparrow}{dp} + \left(\rho^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + i\rho\right) p_0 - \frac{p_0+1}{p_0-1} l(l+1) - M^2\right) f_\uparrow = 0, \quad (7.2.89)$$

u kojoj prvo napravimo smenu $p_0 = \sqrt{1+p^2} \in (1, \infty)$,

$$2\,(p_0-1)\,(p_0+1)^2 \frac{d^2 f_\uparrow}{dp_0^2} + 2(p_0+1)(2p_0 - 1 + i\rho(p_0-1)) \frac{df_\uparrow}{dp_0} + \quad (7.2.90)$$

$$\left(\rho^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + i\rho\right) p_0 - l(l+1) \frac{p_0+1}{p_0-1} - M^2\right) f_\uparrow = 0, \quad (7.2.91)$$

a zatim $z = \sqrt{\frac{p_0-1}{p_0+1}} \in (0,1)$, pa postaje jednačina po z,

$$(1-z^2) \frac{d^2 f_\uparrow}{dz^2} + 2i\rho z \frac{df_\uparrow}{dz} + \left(\left(\rho - \frac{i}{2}\right)^2 - M^2 - \frac{l(l+1)}{z^2} + \frac{1+2i\rho}{1-z^2}\right) f_\uparrow = 0\,. \quad (7.2.92)$$

Njena rešenja su skoro identična onima za $s = \frac{1}{2}$, (7.2.49-7.2.50),

$$f_{\uparrow,1} = z^{-l}\, (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\; F\Big(\frac{1}{4} - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac{1}{4} - \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac{1}{2} - l\,; z^2\Big) \quad (7.2.93)$$

$$f_{\uparrow,2} = z^{l+1}\, (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\; F\Big(\frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} - \frac{iM}{2}\,, \frac{3}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\rho}{2} + \frac{iM}{2}\,; \frac{3}{2} + l\,; z^2\Big)\,. \quad (7.2.94)$$

Prvo je divergentno u $z = 0$, tako da je samo drugo fizičko. Analogno sa slučajem $s = \frac{1}{2}$, u potprostoru $\mathcal{H}_\downarrow$ svojstveni problem lapalsijana $\Delta_\downarrow$ se svodi na jednačinu po $w = \frac{1}{z}$,

$$(1-w^2)\,\frac{d^2 f_\downarrow}{dw^2} + 2i\rho w\,\frac{df_\downarrow}{dw} + \left(\Big(\rho - \frac{i}{2}\Big)^2 - M^2 - \frac{l(l+1)}{w^2} + \frac{1+2i\rho}{1-w^2}\right) f_\downarrow = 0\,, \tag{7.2.95}$$

čija su rešenja ista kao (7.2.93)-(7.2.94) samo po promenljivoj w. Biramo rešenje koje se glatko spaja sa $f_{\uparrow,2}$ u $z = 1$, tako da je kompletno rešenje zapravo $f_{\uparrow,2}$ prošireno na interval $z \in (0,\infty)$. I u slučaju $s = 0$ dobijamo da je spektar laplasijana kontinualan $M^2 \in (0,\infty)$ i svaka vrednost M je beskonačno degenerisana, sa degeneracijom $2 \times \sum_l (2l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$

Norma svojstvenih funkcija iz (7.2.4) za spin $s = 0$,

$$\Psi_{Mlm} = C\frac{f(p)}{p}Y_l^{\,m}(\theta,\varphi) = \frac{C}{2}\,z^l\,(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\;F\Big(\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}-\frac{iM}{2}\,,\,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}+\frac{iM}{2}\,;\,\frac{3}{2}+l\,;\,z^2\Big), \tag{7.2.96}$$

računa se pomoću izraza (4.3.16,4.3.14),

$$(\Psi,\Psi) = (\psi_\uparrow,\psi_\uparrow') + (\psi_\downarrow,\psi_\downarrow') = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}|C|^2\int_0^\infty \frac{dz}{|1-z^2|}f^* f'. \tag{7.2.97}$$

Zapisivanjem funkcija f i f^* preko Jakobijevih funkcija (A.2.33) sa parametrima $\alpha = \frac{1}{2} + l$ i $\beta = -i\rho$ i radijalnom promenljivom $z = i\sinh t$ kao

$$f = (i\sinh t)^{l+1}\cosh t\,\phi_M^{(\frac{1}{2}+l,-i\rho)}(t), \qquad f^* = (i\sinh t)^{l+1}(\cosh t)^{1-2i\rho}\,\phi_M^{(\frac{1}{2}+l,-i\rho)}(t), \tag{7.2.98}$$

vidimo da su rešenja normirana $(\Psi,\Psi) = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}\,\delta(M-M')$ i za vrednost normalizacione konstante dobijamo isti rezultat kao (7.2.79). Spektar laplasijana Δ u slučaju kada je spin $s = 0$ je isti kao za $s = \frac{1}{2}$ osim što nema degeneracije spektra koja potiče od spina.

Da napomenemo da može da se reši i svojstveni problem nehermitskog laplasijana (6.2.27). Za spin $s = 0$, operator $\triangle$ u prostoru $\mathcal{H}_\uparrow$ ima oblik

$$\triangle_\uparrow = \rho^2 + \frac{1}{4} - \Big(1+2i\rho\Big)p_0 + \Big(2i\rho p_0 + p_0 + 2\Big)\frac{\partial}{\partial p}\,p + \frac{1+p_0}{1-p_0}\,\vec{L}^2 - \frac{2p_0^2}{1-p_0}\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\,\frac{\partial}{\partial p}\,p\,. \tag{7.2.99}$$

Prelaskom na promenljivu z, radijalna jednačina je

$$(1-z^2)\,\frac{d^2 f_\uparrow}{dz^2} + (2i\rho-3)z\,\frac{df_\uparrow}{dz} + \left(\Big(\rho+i\Big)^2 + \frac{9}{4} - M^2 - \frac{l(l+1)}{z^2} - \frac{2(1+2i\rho)}{1-z^2}\right) f_\uparrow = 0 \tag{7.2.100}$$

i njena rešenja

$$f_{\downarrow,2} = \frac{z^{-l}}{1-z^2}\;F\Big(\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{M^2-\frac{9}{4}}\,,\,\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{M^2-\frac{9}{4}}\,;\,\frac{3}{2}+l\,;\,z^2\Big) \tag{7.2.101}$$

$$f_{\uparrow,2} = \frac{z^{l+1}}{1-z^2}\;F\Big(\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{M^2-\frac{9}{4}}\,,\,\frac{l}{2}-\frac{i\rho}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{M^2-\frac{9}{4}}\,;\,\frac{3}{2}+l\,;\,z^2\Big) \tag{7.2.102}$$

nisu normalizabilna: oba divergiraju u $z = 1$.

7.3 Diskusija rezultata

Ovde ćemo da napravmo kratak rezime ove glave i komentarima koje smo naveli u tekstu dodaćemo sledeće. Glavna ideja ove glave je bila da se nađe laplasijan na fazi dS prostoru kao i da se prouče njegove osobine. Neposredna motivacija je moguća primena na kosmologiju i inflaciju, a zapravo sveukupna ideja je opštija: da se razume da li ponašanje materije na nekomutativnim prostorima daje neka objašnjenja kvantnih ili semiklasičnih efekata u gravitaciji. U komutativnom slučaju laplasijan je jedan od glavnih geometrijskih karakteristika mnogostukosti. Slično tome, u okviru nekomutativnog *frame* formalizma definisan je na sistematičan način. Konkretan izraz za laplasijan zavisi od stepena diferencijalne forme na koju deluje. Ovde razmatramo dejstvo laplasijana na talasne funkcije koje definišu prostor $\mathcal{H}$, tako da možemo da kažemo da je to „kvantnomehanički" laplasijan. Zapravo, glavni rezultati glave tiču se kvantne mehanike na fazi dS prostoru.

Dobili da je fazi dS laplasijan, koji je definisan pravolinijski u okviru *frame* formalizma, nehermitski operator, bilo da deluje na talasne funkcije Ψ, (6.2.26) ili na skalarna polja f (tj. ϕ), (6.2.24). Značenje ovog rezultata nije potpuno jasno. Moguće da je posledica (nepotrebne) opštosti *frame* formalizma, koji između ostalih pretpostavki postulira da *frame* izvodi e_a zadovoljavaju tzv. uslov realnosti, odnosno da su impulsi $\hat{p}_a$ definisani kao antihermitski operatori. Sa druge strane, čini se da je ova pretpostavka sasvim logična i da veoma dobro funkcioniše u nizu primera. Pošto je komutativan laplasijan uvek hermitski, onda smo simetrizovali (6.2.26) i dobili hermitski izraz. Rešili smo odgovarajuću kvantnomehaničku jednačinu i našli da je spektar laplasijana kontinualan, sa svojstvenim vrednostima $M \in (0, \infty)$ i svojstvenim funkcijama koje se ponašaju kao sferni talasi. Svojstvene funkcije Ψ_{Mjm} su date izrazima (7.2.65-7.2.66) i (7.2.96) redom u Mojlanovim reprezentacijama $(\rho, s = \frac{1}{2})$ i $(\rho, s = 0)$; svaka svojstvena vrednost ima degeneraciju koja potiče od angularnog momenta. Prilikom poređenja sa analognim rezultatima u komutativnom dS prostoru vidimo očekivanu redukciju broja stepeni slobode: odgovarajuća komutativna rešenja, pored M, j i m imaju svojstvenu vrednost energije ω kao kvantni broj, [61]. Interesantno je da primetimo da se radijalne funkcije, koje se pojavljuju u komutativnim i nekomutativnim rešenjima, mogu izraziti preko Jakobijevih funkcija, sa različitim vrednostima α i β, [80].

Sa druge strane, interesantno je i možda važno to što laplasijan na fazi dS prostoru dobijen po definiciji nije hermitski. To daje model neunitarne evolucije u gravitacionom polju što je Hoking smatrao mogućim rešenjem informacionog paradoksa. Zaista, antihermitski deo laplasijana, $V = -3\sqrt{\zeta\Lambda}\,\Pi_0$, implicira neočuvanje verovatnoće. Nehermitski članovi su korišćeni ranije u nuklearnoj fizici da objasne α-raspad. Bilo bi interesantno da se vidi da li amplitude prelaza $\langle\Psi_{Mjm}|V|\Psi_{M'jm}\rangle$, izračunate u teoriji perturbacije, mogu na neki način da se povežu sa Hokingovim fluksom.

Ako se držimo konzervativne interpretacije i simetričnog uređenja laplasijana, postoji još jedan interesantan problem koji može da se razmatra: da se reši kvantnomehanička jednačina za skalarne čestice u potencijalu inflatornog tipa pa da se rezultati uporede sa onim koji su dobijeni u standardnoj dS kosmologiji.

Jedan važan dalji zadatak bi bio da se reši jednačina kretanja (7.2.3) i da se onda nađe propagator nekomutativnog skalarnog polja f. Na osnovu dosadašnjih rezultata, čini se da ovaj problem nije lako svesti na čistu teoriju reprezentacija. Skalarno polje može da se razvije kao

$$f = \sum_{M,j,m,M',j',m'} c_{jm,j'm'} |\Psi_{Mjm}\rangle\langle\Psi_{Mj'm'}| \tag{7.3.1}$$

i (7.2.3) postaje jednačina za koeficijente $c_{Mjm,M'j'm'}$. Kako je

$$[\Pi_\mu, [\Pi^\mu, f]] = \Pi_\mu\Pi^\mu f + f\,\Pi_\mu\Pi^\mu - 2\Pi_\mu f\Pi^\mu\,, \tag{7.3.2}$$

označavajući masu skalarnog polja sa M, imamo

$$\sum(\mathrm{M}^2 + M^2 + M'^2)\, c_{Mjm,M'j'm'} |\Psi_{Mjm}\rangle\langle\Psi_{Mj'm'}| = 2\sum c_{jm,j'm'}\, \Pi_\mu\, |\Psi_{Mjm}\rangle\langle\Psi_{Mj'm'}|\, \Pi^\mu\,. \tag{7.3.3}$$

Pošto dejstvo laplasijana nije dijagonalno, ova jednačina je u principu komplikovana. Zbog toga koristimo druge metode koji su tema narednih poglavlja.

8 Fazi harmonici: rešenja u nekomutativnim koordinatama

Namena ove glave je da pokaže kako rešenja Klajn-Gordonove jednačine u (η, y^i) koordinatama, (5.6.6), mogu da se uključe u svojstvene funkcije laplasijana na fazi de Siterovom prostoru. Prvo ćemo, koristeći definicije fazi dS prostora u dve i četiri dimenzije (mada su neki delovi formulisani i generalno, u d dimenzija) iz poglavlja 6.1 i 6.2, da nađemo svojstvene funkcije fazi laplasijana operatorski. Zatim ćemo, u delu 8.2, da pokažemo kako je nađen kompletan skup moda nekomutativnog skalarnog polja. Svojstvene funkcije laplasijana na fazi dS prostoru ćemo da napišemo kao integralne kernele koji zavise od $2(d-1)$ komutativnih realnih promenljivih. Kerneli koje ćemo da koristimo su matrični elementi napisani u svojstvenom bazisu konformnog vremena. Rešenja koja su prethodno dobijena operatorski su analizirana u ovom bazisu. Nakon toga ćemo da nađemo opšte rešenje Klajn-Gordonove jednačine na fazi dS prostoru koristeći integralne kernele. Ovde ćemo takođe da proanaliziramo mode diferencijalnog operatora koji se dobija izuzimanjem linearnog člana iz laplasijana kog onda nazivamo dalamberijan.

8.1 Rešenja Klajn-Gordonove jednačine u dve i četiri dimenzije

Da bismo diskutovali dinamiku polja na fazi de Siterovom prostoru, prvo moramo da rešimo jednačinu kretanja za slobodno polje, $\Phi(\hat{x}^\mu)$. Jednačina u $d=4$ je

$$-[\hat{p}_0,[\hat{p}_0,\Phi]]+3[\hat{p}_0,\Phi]+[\hat{p}_i,[\hat{p}_i,\Phi]]-M^2\Phi=0\,, \qquad (8.1.1)$$

gde je M masa polja. Opšte rešenje neke operatorske jednačine, poput (8.1.1) je, po pravilu, teško naći čak i u prostorvremenu sa visokim stepenom simetrije konstruisanom na Lijevoj algebri. Izuzetak su jednačine koje se redukuju na Kazimirovu relaciju, što je npr. slučaj kod svojstvenog problema laplasijana na fazi sferi, [14]. Na četvorodimenzionom fazi de Siterovom prostoru koji mi razmatramo, komutatori između koordinata $\hat{\eta}$, $\hat{x}^i$ su prilično komplikovani (što se vidi iz (6.2.4)-(6.2.7)), tako da je teško da se izračuna leva strana jednačine (8.1.1), osim za najjednostavnije funkcije $\Phi(\hat{x}^\mu)$. Rešavanju problema pristupamo na sledeći način: radimo sa specifičnim izborom i uređenjem koordinata (slično normalnom uređenju u kvantnoj teoriji polja) i pokušavamo da rešimo jednačinu unutar skupa uređenih funkcija. Rezultat koji dobijamo je interesantan: skup rešenja je istog oblika kao skup moda (5.6.6) nađenih na komutativnom de Siterovom prostoru.

Da bismo objasnili ideju, prvo ćemo da razmotrimo Klajn-Gordonovu jednačinu na fazi dS_2. Njena rešenja (do na Vikovu rotaciju) u koordinatama $(\hat{\eta},\hat{x})$ su diskutovana u radu [53], što je detaljno navedeno u glavi 3. Autori su uspeli da reše Laplasovu jednačinu korišćenjem posebnog oblika algebre koja dozvoljava „preuređivanje” koordinata za određene funkcije, npr. $\hat{\eta}\, f(\hat{x}) = f(\hat{x}+i\bar{k})\,\hat{\eta}$, ili $g(\hat{\eta})\,\exp(ik\hat{x}) = \exp(ik\hat{x})\, g(e^{-\bar{k}k}\hat{\eta})$. Mi pristupamo malo drugačije, uvodimo koordinatu $\hat{y}$ na sledeći način:

$$\hat{y} = \frac{1}{2}\left(\hat{\eta}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\,\hat{\eta}^{-1}\right). \tag{8.1.2}$$

Ona je analogon koordinati $\mathtt{y}$ koju smo razmatrali u komutativnom slučaju. Simetrizacija nam osigurava da je novouvedena koordinata $\hat{y}$ hermitska. Komutator između koordinata $\hat{\eta}$ i $\hat{y}$ se lako dobija,

$$[\hat{\eta}, \hat{y}] = \frac{1}{2}\left(\hat{\eta}^{-1}[\hat{\eta}, \hat{x}] + [\hat{\eta}, \hat{x}]\,\hat{\eta}^{-1}\right) = i\hbar. \tag{8.1.3}$$

Potrebno je da nađemo *frame* relacije sa novim koordinatama. Za početak, treba da izračunamo komutator impulsa sa funkcijom $g(\hat{\eta})$. Ovu funkciju možemo da razvijemo u Tejlorov red i dobijamo

$$[\hat{p}_0, g(\hat{\eta})] = \Big[\hat{p}_0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\hat{\eta}^n\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}[\hat{p}_0, \hat{\eta}^n] = \hat{\eta}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m+1)}(0)}{m!}\hat{\eta}^m = \hat{\eta}\,\dot{g}(\hat{\eta}), \tag{8.1.4}$$

gde se oznaka $\dot{g}(\hat{\eta})$ odnosi na prvi izvod funkcije $g(\hat{\eta})$ po $\hat{\eta}$. Ovde je matematičkom indukcijom pokazano da je komutator $[\hat{p}_0, \hat{\eta}^n] = n\,\hat{\eta}^n$. Iz izraza (8.1.4) sledi da je

$$[\hat{p}_0, \hat{\eta}^{-1}] = -\hat{\eta}^{-1} \qquad \text{i} \qquad [\hat{p}_0, \hat{y}] = \frac{1}{2}\left([\hat{p}_0, \hat{\eta}^{-1}]\hat{x} + \hat{x}[\hat{p}_0, \hat{\eta}^{-1}]\right) = -\hat{y}. \tag{8.1.5}$$

Preostalo je da se nađe komutator

$$[\hat{p}_1, \hat{y}] = \frac{1}{2}\left(\hat{\eta}^{-1}[\hat{p}_1, \hat{x}] + [\hat{p}_1, \hat{x}]\hat{\eta}^{-1}\right) = 1. \tag{8.1.6}$$

Dobili smo *frame* elemente,

$$\begin{aligned} &[\hat{p}_0, \hat{\eta}] = \hat{\eta}\,, \qquad [\hat{p}_1, \hat{\eta}] = 0\,, \\ &[\hat{p}_0, \hat{y}] = -\hat{y}\,, \quad [\hat{p}_1, \hat{y}] = 1\ . \end{aligned} \tag{8.1.7}$$

Odavde vidimo da komutator impulsa sa određenom koordinatom daje konstantu ili je proporcionalan toj koordinati, što znači da oni ne menjaju uređenje koordinata $\hat{\eta}$ i $\hat{y}$. Stoga, ako fiksiramo uređenje operatora $\hat{\eta}$ i $\hat{y}$, možemo da rešimo Klajn-Gordonovu jednačinu egzaktno, kao u komutativnom slučaju. Pretpostavljamo da možemo da razdvojimo promenljive i tražimo rešenje u obliku

$$\Phi(\hat{\eta}, \hat{y}) = g(\hat{\eta})f(\hat{y}). \tag{8.1.8}$$

Iz *frame* formalizma smo dobili da laplasijan deluje na funkcije elemenata algebre preko komutatora, (6.1.18). Zato je još potrebno da izračunamo komutator impulsa $\hat{p}_0$ i $\hat{p}_1$ sa nekom funkcijom koordinate $\hat{y}$. Slično kao i iznad, razvijamo funkciju u Tejlorov red

$$[\hat{p}_0, f(\hat{y})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}[\hat{p}_0, \hat{y}] = -\hat{y}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(0)}{m!}\hat{y}^m = -yf'(\hat{y}), \tag{8.1.9}$$

$$[\hat{p}_1, f(\hat{y})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}[\hat{p}_1, \hat{y}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(0)}{m!}\hat{y}^m = f'(\hat{y}), \tag{8.1.10}$$

gde smo iskoristili da je $[\hat{p}_0, \hat{y}^n] = -n\,\hat{y}^n$ i $[\hat{p}_1, \hat{y}^n] = n\,\hat{y}^{n-1}$. Ovde je $f'(\hat{y})$ izvod funkcije f po njenom argumentu $\hat{y}$. Dobija se da su komutatori

$$\begin{aligned} &[\hat{p}_0, \Phi] = -g(\hat{\eta})\hat{y}f'(\hat{y}) + \hat{\eta}g'(\hat{\eta})f(\hat{y}), \\ &[\hat{p}_0, [\hat{p}_0, \Phi]] = g(\hat{\eta})\hat{y}^2 f''(\hat{y}) + g(\hat{\eta})\hat{y}f'(\hat{y}) - 2\hat{\eta}\dot{g}(\hat{\eta})\hat{y}f'(\hat{y}) + \hat{\eta}\dot{g}(\hat{\eta})f(\hat{y}) + \hat{\eta}^2\ddot{g}(\hat{\eta})f(\hat{y}), \\ &[\hat{p}_1, \Phi] = g(\hat{\eta})f'(\hat{y}), \\ &[\hat{p}_1, [\hat{p}_1, \Phi]] = g(\hat{\eta})f''(\hat{y}), \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

tako da je laplasijan

$$\Delta\Phi = g(\hat\eta)(1-\hat y^2)f''(\hat y) - 2g(\hat\eta)\hat y f'(\hat y) + 2\hat\eta\dot g(\hat\eta)\hat y f'(\hat y) - \hat\eta^2\ddot g(\hat\eta)f(\hat y) = M^2\Phi. \tag{8.1.12}$$

Na osnovu oblika zavisnosti od $\hat\eta$ prethodnog izraza, zaključujemo da je rešenje po $\hat\eta$ stepena funkcija. Kada Φ napišemo u obliku $\Phi(\hat\eta,\hat y) = (-\hat\eta)^{-i\omega}f(\hat y)$, nalazimo da se Klajn-Gordonova jednačina svodi na

$$\begin{aligned} &g(\hat\eta)(1-\hat y^2)\, f''(\hat y) - \hat\eta^2\,\ddot g(\hat\eta)\, f(\hat y) + 2\hat\eta\,\dot g(\hat\eta)\,\hat y f'(\hat y) - 2g(\hat\eta)\,\hat y\, f'(\hat y) + M^2 g(\hat\eta)f(\hat y) \\ &= (-\hat\eta)^{-i\omega}\Big((1-\hat y^2)f''(\hat y) - (2+2i\omega)\hat y f'(\hat y) - \Big(i\omega(i\omega+1) - M^2\Big)f(\hat y)\Big) = 0\,, \end{aligned} \tag{8.1.13}$$

odnosno na jednačinu koja je istog oblika kao (5.6.2) koju smo dobili u komutativnom slučaju. Stoga, rešenje diferencijalne jednačine po $\hat y$ je $(\hat y^2-1)^{-i\omega/2}\, Q^{i\omega}_{-1/2+i\kappa}(\hat y)$. Mode nekomutativnog skalarnog polja su ekvivalentne modama komutativnog skalarnog polja (5.6.18),

$$\hat v_{\omega,\kappa}(\hat\eta,\hat y) = c_{\omega,\kappa}\,(-\hat\eta)^{-i\omega}(\hat y^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}\, Q^{i\omega}_{-\frac12+i\kappa}(\hat y)\;. \tag{8.1.14}$$

U četiri dimenzije postupamo slično, uvodimo koordinate

$$\hat y^i = \frac12(\hat\eta^{-1}\hat x^i + \hat x^i\hat\eta^{-1})\;. \tag{8.1.15}$$

Prednost koordinata $(\hat\eta,\hat y^i)$ u odnosu na $(\hat\eta,\hat x^i)$ ponovo leži u njihovim komutacionim relacijama sa impulsima,

$$\begin{aligned} &[\hat p_0,\hat\eta] = \hat\eta\,, && [\hat p_i,\hat\eta] = 0\,, \\ &[\hat p_0,\hat y^j] = -\hat y^j\,, && [\hat p_i,\hat y^j] = \delta_i^j\,, \\ &[\hat p_0,(\hat y^j)^n] = -n(\hat y^j)^n\,, && [\hat p_i,(\hat y^j)^n] = n(\hat y^j)^{n-1}\,\delta_i^j\;. \end{aligned} \tag{8.1.16}$$

Ove relacije impliciraju da *frame* izvodi funkcije neke koordinate zavise samo od te koordinate, $[\hat p_\alpha, f(\hat y^\mu)] = g(\hat y^\mu)$. To znači da, ako nametnemo određeno uređenje, dejstvo *frame* izvoda, a samim tim i laplasijana, ga neće promeniti. Na taj način možemo da rešimo Klajn-Gordonovu jednačinu razdvajanjem promenljivih.

Da pojasnimo malo. Rešenje u komutativnom slučaju (5.6.6) smo dobili razdvajanjem promenljivih u sfernim koordinatama $(\eta,\rho,\theta,\varphi)$. Pošto ne postoji jednostavan način da kvantujemo ugaone koordinate θ i φ, onda ćemo komutativna rešenja da izrazimo koristeći „Dekartove" koordinate (η, y^i). Ispostavlja se da ovo nije previše teško. Analizirajmo prostorni deo rešenja (5.6.3) koje je konačno u $\rho = 0$ [1]. Ono sadrži dva faktora: $\rho^l\, Y_l^m(\theta,\varphi)$ i ${}_2F_1(a,b;\,3/2+l;\rho^2)$. Prvi član je homogeni polinom po y^i stepena l, dok se drugi može da se razvije u Tejlorov red po $\rho^2 = y^i y_i$. Prema tome, prostorni deo rešenja se razvija u red po y^i.

Neka je nametnuto operatorsko uređenje kao

$$\Phi(\hat\eta,\hat y^i) = \phi(\hat\eta)\, f(\hat y^1)\, g(\hat y^2)\, h(\hat y^3)\,, \tag{8.1.17}$$

i neka su uređeni monomi prostornih koordinata označeni sa $\hat f_{n_1,n_2,n_3}$,

$$\hat f_{n_1,n_2,n_3} = (\hat y^1)^{n_1}(\hat y^2)^{n_2}(\hat y^3)^{n_3}\;. \tag{8.1.18}$$

Iz izraza (5.2.9) nalazimo da se komutativni laplasijan Δ_{dS_4}, kada deluje na funkcije oblika

$$v(\eta, y^i) = (-\eta)^{-i\omega}F(y^i)\,, \tag{8.1.19}$$

[1] Ista analiza može da se sprovede za bazisne funkcije (5.6.6) koje zapravo koristimo. Umesto ρ bismo koristili ρ^{-1} i rešenje bismo razvili oko $\rho^{-1} = 0$. Alternativno, možemo da iskoristimo relaciju između hipergeometrijskih funkcija (A.2.31) pa da izrazimo (5.6.6) preko (5.6.3), i da nakon toga primenimo Tejlorov razvoj po ρ.

redukuje na operator

$$\Delta_{dS_4}^{-i\omega} = \partial_{\mathrm{y}^i}\partial_{\mathrm{y}_i} - \mathrm{y}^i\mathrm{y}^j\partial_{\mathrm{y}^i}\partial_{\mathrm{y}^j} - (2i\omega+4)\,\mathrm{y}^i\partial_{\mathrm{y}^i} - 3i\omega + \omega^2 \ . \tag{8.1.20}$$

Dalje imamo

$$\mathrm{y}^i\partial_{\mathrm{y}^i}\, f_{n_1,n_2,n_3} = (n_1+n_2+n_3)\, f_{n_1,n_2,n_3}\,, \tag{8.1.21}$$

$$\partial_{\mathrm{y}^i}\partial_{\mathrm{y}_i}\, f_{n_1,n_2,n_3} = n_1(n_1-1)f_{n_1-2,n_2,n_3} + n_2(n_2-1)f_{n_1,n_2-2,n_3} + n_3(n_3-1)f_{n_1,n_2,n_3-2}\ . \tag{8.1.22}$$

Paralelno iz komutacionih relacija (8.1.16) dobijamo

$$[\hat{p}_0, \hat{f}_{n_1,n_2,n_3}] = -\,(n_1+n_2+n_3)\,\hat{f}_{n_1,n_2,n_3}\,, \tag{8.1.23}$$

$$[\hat{p}^i, [\hat{p}_i, \hat{f}_{n_1,n_2,n_3}]] = n_1(n_1-1)\hat{f}_{n_1-2,n_2,n_3} + n_2(n_2-1)\hat{f}_{n_1,n_2-2,n_3} + n_3(n_3-1)\hat{f}_{n_1,n_2,n_3-2}\ . \tag{8.1.24}$$

Odavde je jasno da na funkcije prostornih koordinata komutatori $[\hat{p}_i,\ ]$ deluju kao ∂_{y^i} , i komutator $[\hat{p}_0,\ ]$ kao $-\mathrm{y}^i\partial_{\mathrm{y}^i}$, što smo zaključili primenom komutatora na funkcije koje su razvijene u Tejlorov red. Štaviše, ove zamene „prebacuju” fazi laplasijan u komutativan. Razmotrimo sada diferencijalni operator u komutativnom slučaju (8.1.20) i njegov nekomutativni analogon. Ako rešenja Klajn-Gordonove sa pomenutim operatorima napišemo u sledećim oblicima

$$\hat{F}(\hat{y}^i) = \sum \hat{c}_{n_1,n_2,n_3}\,\hat{f}_{n_1,n_2,n_3}\,, \qquad F(\mathrm{y}^i) = \sum c_{n_1,n_2,n_3}\, f_{n_1,n_2,n_3}\ , \tag{8.1.25}$$

dobijamo da su jednačine koje zadovoljavaju koeficijenti $\hat{c}_{n_1,n_2,n_3}$ i c_{n_1,n_2,n_3} identične,

$$\begin{aligned}(n_1+2)(n_1+1)\,\hat{c}_{n_1+2,n_2,n_3} + (n_2+2)(n_2+1)\,\hat{c}_{n_1,n_2+2,n_3} + (n_3+2)(n_3+1)\,\hat{c}_{n_1,n_2,n_3+2}\\ = \Big((n_1+n_2+n_3)^2 + (2i\omega+3)(n_1+n_2+n_3) + (-\omega^2+3i\omega+M^2)\Big)\,\hat{c}_{n_1,n_2,n_3}\ .\end{aligned} \tag{8.1.26}$$

Iako poslednja jednačina izgleda komplikovano za rešavanje, mi smo je zapravo već rešili: koeficijenti $\hat{c}_{n_1,n_2,n_3}$ su dati Tejlorovim razvojem rešenja (5.6.3). Stoga sledi da su nekomutativne mode

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\omega,l,\vec{m},\kappa}(\hat{\eta},\hat{\rho},\hat{\theta}_a) =\ & c\,(-\hat{\eta})^{-i\omega}\,\hat{\rho}^{-\frac{d-1}{2}-i(\omega+\kappa)}\\ \times\ & {}_2F_1\Big(\frac{2l+d-1+2i(\omega+\kappa)}{4}, \frac{-2l+5-d+2i(\omega+\kappa)}{4}, 1+i\kappa, \hat{\rho}^{-2}\Big)\Psi_l^{\vec{m}}(\hat{\theta}_a),\end{aligned} \tag{8.1.27}$$

gde ponovo možemo za ugaoni deo rešenja da uzmemo $\Psi_l^{\vec{m}}$ što su linearne kombinacije $Y_l^{\vec{m}}$ sa fiksnim l.

Da napomenemo da bismo istu relaciju za koeficijente (8.1.26) dobili da smo koristili drugi redosled koordinata, npr. 0321 umesto 0123. Svako od uređenja daje skup rešenja Klajn-Gordonove jednačine, a pošto su komutatori između koordinata $\hat{y}^i$ komplikovani, nije jasno kako su ova rešenja međusobno povezana. Međutim, svaka varijanta ima isti komutativni limes, jer su u ovom limesu svi komutatori nula. Ovaj rezultat obezbeđuje da se na makroskopskoj skali polja na de Siterovom prostoru ponašaju klasično.

Takođe napominjemo da odavde nije očigledno da smo dobili sva rešenja, tj. da imamo kompletan skup svojstvenih funkcija nekomutativnog laplasijana. Da bismo razrešili ovu dilemu, potrebno je da Klajn-Gordonovu jednačinu prepišemo kao matričnu ili diferencijalnu jednačinu. Ovo se realizuje tako što se koordinate i impulsi napišu u konkretnoj unitarnoj ireducibilnoj reprezentaciji $SO(1,d)$ grupe. Na taj način su fazi harmonici zapisani kao matrice. Zbog nekompaktnosti grupe $SO(1,d)$ ove matrice su beskonačnodimenzione pa preferiramo da ih pišemo kao integralne kernele. Ovo je tema kojom se bavimo u narednom poglavlju.

8.2 Svi fazi harmonici: integralni kerneli

Ovde ćemo da nađemo (sve) fazi harmonike. Za početak ćemo ih da ih odredimo kao matrične elemente kernela u svojstvenom bazisu konformnog vremena. Zatim ćemo preko eksplicitne realizacije Hilbertovog prostora stanja da odredimo opšte rešenje Klajn-Gordonove jednačine. Prodiskutovaćemo i komutativan limes $\bar{k} \to 0$.

Korisno je da na početku najavimo oznake za promenljive koje koristimo. Varijablu u koordinatnom prostoru označavamo sa z_i, a njen par u Furijeovom prostoru je q^i. Uvedene su nove promenljive u koordinatnom prostoru y i ξ kao linearne kombinacije koordinata $z_{L/R} = y \pm \xi$. Furije-transformisane varijable od y i ξ smo označavali sa χ i ζ. I na kraju smo linearne kombinacije Furije-transformisanih varijabli uveli kao $-\eta_{L/R} = \chi \pm \zeta$.

8.2.1 Harmonici u svojstvenom bazisu konformnog vremena

Kao što smo već rekli, koordinate i impulsi na fazi dS_d su definisani kao operatori koji deluju u određenoj reprezentaciji $SO(1,d)$ grupe. Sada nam je potrebno malo više informacija o ovoj reprezentaciji pošto je očekivano da spektar koordinata, broj stepeni slobode itd. netrivijalno zavise od izbora. Naša konstrukcija fazi dS_2 i fazi dS_4 je zasnovana na glavnoj neprekidnoj seriji reprezentacije $\mathfrak{so}(1,d)$. Ovaj izbor je sugerisan izborom da kosmološka konstanta bude pozitivna, što se vidi pri kraju glave 4.1, [13]. Ovde ćemo da koristimo reprezentaciju koja se realizuje na prostorima konformnih polja u $(d-1)$ dimenzija. Uveli smo je u poglavlju 4.2. Kao što smo tamo i napomenuli, kod fazi dS_2 izrazima za generatore (4.2.9)-(4.2.10) izuzimamo matrice Σ_{ij} jer su nula. Fazi dS_4 je definisan koristeći glavnu neprekidnu seriju reprezentacije spina $\frac{1}{2}$, što znači da su u izrazima za generatore matrice Σ_{ij} date izrazom (4.2.12).

Ovaj izbor smo napravili jer za $s=0$ imamo da je Kazimirov operator $C_4 = 0$, što odgovara beskonačnoj kosmološkoj konstanti, [13]. Iz $C_4 = 0$ sledi da su komponente vektora Pauli-Lubanskog $W^\alpha = 0$, a kod nas su koordinate proporcionalne njima.

Kod fazi geometrije stanja su reprezentovana talasnim funkcijama $\psi_a(z_i)$, a koordinate diferencijalnim ili integralnim operatorima koji deluju na njih. U slučaju fazi dS_2 koordinate su

$$\hat{\eta} = i\bar{k}\partial_z \,, \qquad \hat{x} = i\bar{k}(z\partial_z + \Delta) \ . \tag{8.2.1}$$

Ova formulacija preko talasnih funkcija omogućava da prilikom razmatranja spektra koordinata, preklapanja između svojstvenih stanja, očekivanih vrednosti itd. koristimo standardne metode kvantne mehanike. Pomenute opservable otkrivaju fizičke osobine našeg modela. U ostatku ovog poglavlja ćemo se posvetiti matričnim elementima fazi harmonika u svojstvenom bazisu vremenske koordinate.

Pošto naša definicija koordinate $\hat{y}$ u sebi sadrži $\hat{\eta}^{-1}$, a $\hat{\eta}$ je diferencijalni operator, onda je zgodno da pređemo u Furijeov prostor gde su $\hat{\eta}$ i $\hat{\eta}^{-1}$ reprezentovani multiplikativnim operatorima. Neka je Furijeova transformacija definisana na sledeći način,

$$\hat{F}(q) = \int dz \, e^{-iqz} \, F(z), \tag{8.2.2}$$

gde je q^i varijabla u dualnom prostoru. Na primeru generatora dilatacije $D = -z^i\partial_i - \Delta$ možemo da vidimo kako izgleda prelazak u Furijeov prostor,

$$\begin{aligned}
&\int dz\, e^{-iqz}(-\mathbb{\Delta} - z^i\partial_i)f(z) = -\mathbb{\Delta}\int dz\, e^{-iqz}\, f(z) + \int dz\,\partial_i\left(e^{-iqz}\, z^i\right) f(z)\\
&= -\mathbb{\Delta}\,\hat{f}(q) + \int dz\,\left(-iq_i\, e^{-iqz}\, z^i + e^{-iqz}\,\partial_i z^i\right) f(z)\\
&= -\mathbb{\Delta}\,\hat{f}(q) - iq_i\int dz\, i\partial_{q_i}\, e^{-iqz} f(z) + \delta^i_i\int dz\, e^{-iqz}\, f(z) = (q_i\partial_{q_i} - \mathbb{\Delta} + \delta^i_i)\hat{f}(q).
\end{aligned} \tag{8.2.3}$$

U prvom redu smo primenili parcijalnu integraciju, u drugom smo našli odgovarajuće izvode i u trećem smo napisali da je $e^{-iqz}\, z^i = i\,\partial_{q_i}\, e^{-iqz}$, nakon čega smo izvod ∂_{q_i} izvukli ispred integrala. Na sličan način nalazimo i ostale generatore u Furijeovom prostoru. U dve dimenzije to su

$$P = -iq, \qquad D = q\,\partial_q + 1 - \mathbb{\Delta}, \qquad K = iq\,\partial_q^2 - 2iD\partial_q\ . \tag{8.2.4}$$

Dalje radimo u bazisu svojstvenih stanja vremenske koordinate $\hat{\eta}$. U ovom bazisu, druga koordinata $\hat{\rho} = \hat{y}$ je reprezentovana diferencijalnim operatorom,

$$\hat{\eta} = -\lambda\!\!\!^{-} q, \qquad \hat{\rho} = \hat{y} = \frac{1}{2}\left(\hat{\eta}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{\eta}^{-1}\right) = i\partial_q - i\,\frac{\mathbb{\Delta} - \frac{1}{2}}{q}\ . \tag{8.2.5}$$

Koordinata $\hat{\rho}$ ima kontinualni spektar $(-\infty, \infty)$. Njena svojstvena stanja, $\hat{\rho}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, dobijamo rešavanjem diferencijalne jednačine,

$$\psi'_\lambda(q) + \left(i\lambda - \frac{\mathbb{\Delta} + \frac{1}{2}}{q}\right)\psi_\lambda(q) = 0, \qquad \psi_\lambda(q) = Cq^{-\frac{1}{2}+\mathbb{\Delta}}e^{-i\lambda q}. \tag{8.2.6}$$

Iz uslova ortonormiranosti svojstvenih funkcija,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\,\psi^*_\lambda(q)\,\psi_{\lambda'}(q) = |C|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{i(\lambda-\lambda')q} = 2\pi|C|^2\delta(\lambda - \lambda'), \tag{8.2.7}$$

uz $\mathbb{\Delta} + \mathbb{\Delta}^* = 1$, dobijamo normalizacionu konstantu $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Radi kompletnosti da naglasimo da ova svojstvena stanja

$$\psi_\lambda(q) = \langle q|\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, q^{-\frac{1}{2}+\mathbb{\Delta}}\, e^{-i\lambda q}\ , \tag{8.2.8}$$

zadovoljavaju relacije ortogonalnosti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\,\langle\lambda|q\rangle\langle q|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\,\langle q|\lambda\rangle\langle\lambda|q'\rangle = \delta(q - q')\ . \tag{8.2.9}$$

Svojstvena stanja $|\lambda\rangle$ su dovoljna da bismo našli matrične elemente fazi harmonika. Sa $v_{\omega,\kappa}(\eta, \mathrm{y})$ smo označili rešenje Klajn-Gordonove jednačine na komutativnom dS_2, a odgovarajuće rešenje na nekomutativnom (fazi) dS_2 sa $\hat{v}_{\omega,\kappa}(\hat{\eta}, \hat{y})$. Matrične elemente računamo na sledeći način

$$\hat{v}_{\omega,\kappa}(\eta_L, \eta_R) = \langle\eta_L|\hat{v}_{\omega,\kappa}| - \eta_R\rangle.$$

Pre nego što krenemo sa računom, da pojasnimo znak minus kod $|-\eta_R\rangle$. Da naglasimo da smo kod slučaja $G = SO(1, 2)$. Svaki element $\hat{f}$ algebre $\mathcal{A}$ reprezentovan je funkcijom $\hat{f}(q_L, q_R)$. Činjenica da laplasijan pišemo kao

$$\Delta = -\left(D_L + D_R\right)^2 + D_L + D_R + \left(P_L + P_R\right)^2, \tag{8.2.10}$$

znači da je odgovarajući vektor u $\mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}} \otimes \mathcal{H}_{1-\mathbb{\Delta}}$ prostoru zapisan kao

$$\int dq_L dq_R\ \hat{f}(q_L, q_R)|q_L\rangle \otimes |q_R\rangle\ \in \mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}} \otimes \mathcal{H}_{1-\mathbb{\Delta}}\ . \tag{8.2.11}$$

Ovde su $|q_L\rangle$ i $|q_R\rangle$ vektori u prostorima $\mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}}$ i $\mathcal{H}_{1-\mathbb{\Delta}}$, respektivno. Sa druge strane, gledajući na $\hat{f}$ kao operator $\mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}}$, možemo takođe da ga razvijemo preko njegovih matričnih elemenata kao

$$\hat{f} = \int dq_L dq_R\ F(q_L, q_R)|q_L\rangle \otimes \langle q_R|\,, \qquad F(q_L, q_R) = \langle q_L|\hat{f}|q_R\rangle\,, \tag{8.2.12}$$

gde su sada $|q_L\rangle, |q_R\rangle \in \mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}}$. Želimo da povežemo $\hat{f}(q_L, q_R)$ i $F(q_L, q_R)$ u skladu sa dejstvom grupe SO(1,2). Neka je $\varphi(q) \in \mathcal{H}_{\mathbb{\Delta}}$, tj. dejstvo generatora P, D i K je dato izrazima (8.2.4). Tada je dejstvo generatora grupe $SO(1,2)$ na $\psi(q)$, koje je definisano kao

$$\psi(q) = \varphi(-q)^*\,, \tag{8.2.13}$$

dato izrazima (8.2.4) uz zamenu $\mathbb{\Delta} = \frac{1}{2} + i\tau$ sa $1 - \mathbb{\Delta} = \frac{1}{2} - i\tau$. Drugim rečima, $\psi(q)$ pripada prostoru $\mathcal{H}_{1-\mathbb{\Delta}}$. Tako smo zaključili da je $\hat{f}(q_L, q_R) = F(q_L, -q_R)$ [2].

Sada računamo matrične elemente,

$$\hat{v}_{\omega,\kappa}(\eta_L, \eta_R) = c_{\omega,\kappa} \int d\lambda\ \langle \eta_L|(-\hat{\eta})^{-i\omega}(\hat{y}^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\hat{y})|\lambda\rangle\langle\lambda| - \eta_R\rangle \tag{8.2.15}$$

$$= \frac{c_{\omega,\kappa}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\eta_R}{\hbar}\right)^{-i\tau} \int d\lambda\ (\lambda^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\lambda)\langle\eta_L|(-\hat{\eta})^{-i\omega}|\lambda\rangle e^{\frac{i\lambda\eta_R}{\hbar}} \tag{8.2.16}$$

$$= \frac{c_{\omega,\kappa}}{2\pi\hbar} \left(\frac{\eta_R}{\hbar}\right)^{-i\tau} (-\eta_L)^{-i\omega} \left(\frac{-\eta_L}{\hbar}\right)^{i\tau} \int d\lambda\ e^{\frac{i\lambda(\eta_L+\eta_R)}{\hbar}}(\lambda^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\lambda) \tag{8.2.17}$$

$$= C\,\frac{c_{\omega,\kappa}}{2\pi\hbar^{i\omega+1/2}}\,(-\eta_L)^{i\tau-i\omega}\eta_R^{-i\tau}\,(\eta_L + \eta_R)^{i\omega-\frac{1}{2}}\,J_{i\kappa}\left(\frac{\eta_L + \eta_R}{\hbar}\right)\ . \tag{8.2.18}$$

U prvom redu smo dodali jedinicu napisanu preko svojstvenih stanja koordinate $\hat{\rho}$, $\mathbb{1} = \int d\lambda\,|\lambda\rangle\langle\lambda|$, a zatim smo između drugog i trećeg reda iskoristili da je $\langle\eta_L|(-\hat{\eta})^{-i\omega} = (-\eta_L)^{-i\omega}\langle\eta_L|$ i da su svojstvena stanja $|\lambda\rangle$ u svojstvenom stanju vremenske koordinate zapisana preko varijable η kao

$$\langle\eta|\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{-\eta}{\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}+\mathbb{\Delta}} e^{-\frac{i\lambda\,\eta}{\hbar}}. \tag{8.2.19}$$

U četvrtom redu smo samo napisali rezultat integrala po λ, a detalje oko njegove regularizacije i računanja smo naveli u dodatku A.3. Na ovaj način smo dobili integralnu reprezentaciju matričnog elementa. Mode koje smo ovde dobili (8.2.18) nam pokazuju kako eksplicitno izgleda kvantizacija, $f(\upeta, \mathrm{y}) \longleftrightarrow \hat{f}(\eta_L, \eta_R)\,.$

Sada ćemo da pokažemo da krajnji rezultat (8.2.18) zadovoljava Klajn-Gordonovu jednačinu u Furijeovom prostoru. Izraz za laplasijan u dve dimenzije (8.2.10) se uz $\mathbb{\Delta}_R = \frac{1}{2} + i\tau$ i $\mathbb{\Delta}_L = \mathbb{\Delta}_R^* = \frac{1}{2} - i\tau$ svodi na

$$\Delta = -(q_L\partial_{q_L} + q_R\partial_{q_R} + 1)(q_L\partial_{q_L} + q_R\partial_{q_R}) - (q_L + q_R)^2. \tag{8.2.20}$$

[2] U četiri dimenzije treba da se uključe i spinski stepeni slobode. Neka ja $\mathcal{H}_{\mathbb{\Delta},(1/2)}$ prostor reprezentacije (8.2.25)-(8.2.26) sa Σ matricama (4.2.12) i neka je element ovog prostora $\varphi = \varphi^a(q^i)$. Tada funkcija

$$\psi^a(q^i) = (\sigma_2)^a{}_b\,\varphi^b(-q^i)^*\,, \tag{8.2.14}$$

pripada prostoru $\mathcal{H}_{3-\mathbb{\Delta},(1/2)}$.

Bez gubitka opštosti, radi jednostavnosti, matrične elemente možemo da napišemo kao

$$\hat{v}_{\omega,\kappa} = (q_L)^{i\tau - i\omega}(q_R)^{-i\tau}(q_L+q_R)^{i\omega-\frac{1}{2}}J_{i\kappa}(-q_L-q_R), \tag{8.2.21}$$

gde su gde su varijable η i q povezane sa $\eta = -\bar{k}q$. Nalazimo da je

$$(q_L\partial_{q_L} + q_R\partial_{q_R})\hat{v}_{\omega,\kappa} = -\left(\frac{1}{2}+i\kappa\right)\hat{v}_{\omega,\kappa} - (q_L)^{i\tau-i\omega}(q_R)^{-i\tau}(q_L+q_R)^{i\omega+\frac{1}{2}}J_{i\kappa-1}(-q_L-q_R), \tag{8.2.22}$$

$$\begin{aligned}(q_L\partial_{q_L} + q_R\partial_{q_R})&\left((q_L)^{i\tau-i\omega}(q_R)^{-i\tau}(q_L+q_R)^{i\omega+\frac{1}{2}}J_{i\kappa-1}(-q_L-q_R)\right)\\ &= \left(i\kappa-\frac{1}{2}\right)(q_L)^{i\tau-i\omega}(q_R)^{-i\tau}(q_L+q_R)^{i\omega+\frac{1}{2}}J_{i\kappa-1}(-q_L-q_R) + (q_L+q_R)^2\hat{v}_{\omega,\kappa},\end{aligned} \tag{8.2.23}$$

gde smo za izvod Beselove funkcije prvo iskoristili (A.2.17), a zatim (A.2.18). Dobijamo da je

$$\Delta\hat{v}_{\omega,\kappa} = \left(\kappa^2+\frac{1}{4}\right)\hat{v}_{\omega,\kappa}, \tag{8.2.24}$$

čime smo pokazali da je zadovoljena Klajn-Gordonova jednačina za $M^2 = \kappa^2 + \frac{1}{4}$.

U četiri dimenzije sledimo istu ideju kao u dve, samo što je račun nešto složeniji. Generatori glavne neprekidne serije (4.2.9)-(4.2.10) u Furijeovom prostoru su dobijeni sličnim postupkom kao u (8.2.3),

$$P_i = -iq_i, \qquad L_{ij} = q_i\partial_{q^j} - q_j\partial_{q^i} - \Sigma_{ij}, \tag{8.2.25}$$

$$D = q^i\partial_{q^i} + 3 - \mathbb{\Delta}, \qquad K_i = iq_i\partial^2 - 2iD\partial_{q^i} - 2i\Sigma_{ij}\partial_{q_j}, \tag{8.2.26}$$

gde je $\mathbb{\Delta} = \frac{3}{2}+i\tau$ i $\tau\in\mathbb{R}$. Sa q^i smo označili varijablu z_i u dualnom prostoru. U ovoj realizaciji, Poenkareove koordinate na fazi dS_4 su reprezentovane operatorima

$$\hat{\eta} = -\frac{1}{2}\sigma^i q_i = -\frac{q}{2}\Pi, \qquad \hat{x}_j = -\frac{i}{2}\sigma^k q_k\partial_{q^j} + i\,\frac{\mathbb{\Delta}-2}{2}\sigma_j\ . \tag{8.2.27}$$

Uveli smo oznaku $\Pi = \sigma^i q_i/q$, koja će nam biti korisna u ovom odeljku. Furijeov prostor je ponovo blisko povezan sa svojstvenim bazisom vremenske koordinate pošto je ona multiplikativna u toj realizaciji. Pošto je $\hat{\eta}$ skalarni operator, njegova svojstvena stanja moraju da se izaberu tako da rotacioni kvantni brojevi budu dobro definisani. Takva stanja su

$$\langle q,\vartheta,\phi|\,\eta,j,m_j,\mathrm{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\eta}\,\delta\Big(q-(-1)^{\mathrm{a}}2\eta\Big)\,\varphi^{\mathrm{a}}_{j,m_j}(\vartheta,\phi)\,, \qquad (-1)^{\mathrm{a}} \equiv \begin{cases} -1, & \mathrm{a}=\uparrow \\ 1, & \mathrm{a}=\downarrow\end{cases}, \tag{8.2.28}$$

gde su (q,ϑ,ϕ) sferne koordinate konstruisane od q^i, $q^2 = q_iq^i$. Ovde su $\varphi^{\mathrm{a}}_{j,m_j}$ spinski harmonici: j je poluceo broj, $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots$ i $m_j = -j,-j+1,\ldots,j$. Za dati fiksan par (j,m_j), postoji dva linearno nezavisna harmonika, koja indeksiramo pomoću a. Izborom bazisa kao u [76], indeks a uzima vrednosti $\{+,-\}$. Eksplicitni izrazi za spinske harmonike su navedeni u dodatku A.2.5. Ovde uglavnom radimo sa bazisom koji dijagonalizuje operator Π,

$$\varphi^{\uparrow,\downarrow}_{j,m_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^+_{j,m_j}\pm\varphi^-_{j,m_j})\,, \qquad \Pi\varphi^{\uparrow}_{j,m_j} = \varphi^{\uparrow}_{j,m_j}, \quad \Pi\varphi^{\downarrow}_{j,m_j} = -\varphi^{\downarrow}_{j,m_j}\ . \tag{8.2.29}$$

Moguće je da nađemo svojstvena stanja radijalne koordinate $\hat{\rho}^2$ u svojstvenom bazisu $\hat{\eta}$ koordinate. Da bismo ovo uradili, krećemo od izraza za $\hat{y}^i$ i $\hat{\rho}^2$ u Furijeovom prostoru,

$$\hat{y}_i = i\partial_{q^i} - i\left(\mathbb{\Delta}-\frac{3}{2}\right)\frac{q_i}{q^2} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{q^j}{q^2}\sigma^k\,, \tag{8.2.30}$$

$$\hat{\rho}^2 = \hat{y}_i\hat{y}^i = -\partial_{q_j}\partial_{q^j} + \frac{2\mathbb{\Delta}-3}{q^2}q^i\partial_{q^i} + \frac{i}{q^2}\epsilon^{ijk}q_j\partial_{q^k}\sigma^i - \left((\mathbb{\Delta}-2)^2-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{q^2}\ .$$

Svojstvena stanja od $\hat{\rho}$ dobijamo rešavanjem svojstvene jednačine

$$\hat{\rho}^2\,\psi_{\lambda,j,m_j,\mathrm{a}}(q,\theta,\phi)=\lambda^2\psi_{\lambda,j,m_j,\mathrm{a}}(q,\theta,\phi),\qquad \psi_{\lambda,j,m_j,\mathrm{a}}(q,\theta,\phi)=f_{\lambda,j}(q)\,\varphi^{\mathrm{a}}_{j,m_j}(\theta,\phi). \tag{8.2.31}$$

Koristimo izraz za laplasijan u sfernim koordinatama $\partial_{q_j}\partial_{q^j}=\frac{1}{q^2}\partial_q\left(q^2\partial_q\right)-\frac{L^2}{q^2}$, a zatim da je $q^i\,\partial_{q^i}=q\,\partial_q$ i $i\epsilon^{ijk}q_j\,\partial_{q^k}\sigma^i=\vec{L}\cdot\vec{\sigma}$. Iz delovanja L^2 i $\vec{L}\cdot\vec{\sigma}$ na spinske sferne harmonike $\varphi^{\pm}_{j,m_j}$,

$$L^2\varphi^{+}_{j,m_j}=\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)\varphi^{+}_{j,m_j},\qquad \vec{L}\cdot\vec{\sigma}\,\varphi^{+}_{j,m_j}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\varphi^{+}_{j,m_j}, \tag{8.2.32}$$

$$L^2\varphi^{-}_{j,m_j}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)\varphi^{-}_{j,m_j},\qquad \vec{L}\cdot\vec{\sigma}\,\varphi^{-}_{j,m_j}=\left(j+\frac{3}{2}\right)\varphi^{-}_{j,m_j}, \tag{8.2.33}$$

zaključujemo da je

$$(L^2+\vec{L}\cdot\vec{\sigma})\,\varphi^{\uparrow,\downarrow}_{j,m_j}=\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)\varphi^{\uparrow,\downarrow}_{j,m_j}. \tag{8.2.34}$$

Uzimajući u obzir sve prethodno navedeno, svojstveni problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine po radijalnoj koordinati q,

$$q^2f''(q)+(5-2\Delta)\,q\,f'(q)-\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)-(\Delta-2)^2+\frac{3}{4}+\lambda^2q^2\right)f(q)=0, \tag{8.2.35}$$

čija su rešenja

$$f_{\lambda,j}(q)=C\,q^{\Delta-2}J_{\sqrt{j(j+1)}}(\lambda q). \tag{8.2.36}$$

Iz uslova da su svojstvena stanja normirana,

$$\int\psi^*_{\lambda,j,m_j,\mathrm{a}}(q,\theta,\phi)\,\psi_{\lambda',j',m_j',\mathrm{a}'}(q,\theta,\phi)\,q^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{|C|^2}{\lambda}\delta_{jj'}\delta_{m_jm_j'}\delta(\lambda-\lambda'), \tag{8.2.37}$$

dobijamo konstantu $C=\sqrt{\lambda}$. Iskoristili smo ortogonalnost Beselovih funkcija (A.2.16),

$$\int\limits_0^\infty dq\,q\,J_{\sqrt{j(j+1)}}(\lambda q)J_{\sqrt{j(j+1)}}(\lambda' q)=\frac{1}{\lambda}\delta(\lambda-\lambda'),$$

i spinskih harmonika. Tako smo našli svojstvena stanja radijalne koordinate $\hat{\rho}$ u svojstvenom bazisu $\hat{\eta}$ koordinate:

$$\langle q,\vartheta,\phi\,|\lambda,j,m_j,\mathrm{a}\rangle=\sqrt{\lambda}\,q^{\Delta-2}\,J_{\sqrt{j(j+1)}}(\lambda q)\,\varphi^{\mathrm{a}}_{j,m_j}(\vartheta,\phi)\ ,\qquad \lambda>0\ . \tag{8.2.38}$$

Pošto su $\hat{\eta}$ i $\hat{\rho}$ skalari, njihova preklapanja su dijagonalna po rotacionim kvantnim brojevima (j,m_j,a). Nalazimo da je

$$\langle\eta,j,m_j,\mathrm{a}\,|\lambda,j',m_{j'},\mathrm{a}'\rangle=\delta_{jj'}\,\delta_{m_jm_{j'}}\,\delta_{\mathrm{aa}'}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\,\eta}\Big((-1)^{\mathrm{a}}\,2\eta\Big)^{\Delta}\,J_{\sqrt{j(j+1)}}\Big((-1)^{\mathrm{a}}\,2\eta\lambda\Big)\ . \tag{8.2.39}$$

Sledeći istu proceduru kao u dve dimenzije, dobijamo integralnu reprezentaciju matričnih elemenata fazi harmonika $\hat{v}_{\omega,l,m,\kappa}$. U prethodnom poglavlju smo videli da postoji nekoliko načina za uređenje operatora. Do kraja ovog poglavlja radimo sa skalarnim modama sa $l=m=0$, na koje uređenje ne utiče,

$$\hat{v}_{\omega,0,0,\kappa}=(-\hat{\eta})^{-i\omega}\,\hat{\rho}^{-\frac{3}{2}-i(\kappa+\omega)}\ {}_2F_1\Big(\frac{3+2i(\kappa+\omega)}{4},\frac{1+2i(\kappa+\omega)}{4};1+i\kappa;\hat{\rho}^{-2}\Big)=v_{\omega,\kappa}(\hat{\eta},\hat{\rho})\,\hat{\rho}^{-1}\ . \tag{8.2.40}$$

U poslednjem izrazu, $v_{\omega,\kappa}$ su mode iz dS_2 sa kojima smo se susreli ranije. Nalazimo matrične elemente operatora $\hat{v}_{\omega,0,0,\kappa}$ između svojstvenih stanja koordinate $\hat{\eta}$,

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{\omega,0,0,\kappa}(\eta_L, j_L, m_{jL}, \mathrm{a}_L; \eta_R, j_R, m_{jR}, \mathrm{a}_R) = \langle \eta_L, j_L, m_{jL}, \mathrm{a}_L | \hat{v}_{\omega,0,0,\kappa} | \eta_R, j_R, m_{jR}, \mathrm{a}_R \rangle \\
&= \langle \eta_L, j_L, m_{jL}, \mathrm{a}_L | \; c_{\omega,\kappa} (-\hat{\eta})^{-i\omega} \hat{\rho}^{-1} (\hat{\rho}^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} \, Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\hat{\rho}) | \eta_R, j_R, m_{jR}, \mathrm{a}_R \rangle \; . \qquad (8.2.41)
\end{aligned}$$

Ubacivanjem jedinice napisane preko svojstvenog bazisa koordinate $\hat{\rho}$,

$$I = \sum_{j, m_j, \mathrm{b}} |\lambda, j, m_j, \mathrm{b}\rangle\langle\lambda, j, m_j, \mathrm{b}|,$$

operator $\hat{\rho}$ koji figuriše u modama menjamo njegovom svojstvenom vrednošću λ,

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{\omega,0,0,\kappa}(\eta_L, \dots, \mathrm{a}_R) = \langle \eta_L, j_L, m_{jL}, \mathrm{a}_L | \; c_{\omega,\kappa} (-\hat{\eta})^{-i\omega} \hat{\rho}^{-1} (\hat{\rho}^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} \, Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\hat{\rho}) \, I \, | \eta_R, j_R, m_{jR}, \mathrm{a}_R \rangle \\
&= c_{\omega,\kappa} \sum_{j, m_j, \mathrm{b}} \int d\lambda \; \langle \eta_L, j_L, m_{jL}, \mathrm{a}_L | (-\hat{\eta})^{-i\omega} \hat{\rho}^{-1} (\hat{\rho}^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} \, Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\hat{\rho}) | \lambda, j, m_j, \mathrm{b} \rangle \times \\
&\times \langle \lambda, j, m_j, \mathrm{b} \, | \eta_R, j_R, m_{jR}, \mathrm{a}_R \rangle = 4 c_{\omega,\kappa} \, \delta_{j_L j_R} \, \delta_{m_{jL} m_{jR}} \, \delta_{\mathrm{a}_L \mathrm{a}_R} ((-1)^{\mathrm{a}_L})^{\Delta + \Delta^* + i\omega} \, \eta_L^{\Delta - 1 - i\omega} \, \eta_R^{\Delta^* - 1} \times \qquad (8.2.42) \\
&\times \int d\lambda \; (\lambda^2 - 1)^{-\frac{i\omega}{2}} \, Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\lambda) \, J_{\sqrt{j_L(j_L+1)}}\Big((-1)^{\mathrm{a}_L} 2\eta_L \lambda\Big) \, J_{\sqrt{j_R(j_R+1)}}\Big((-1)^{\mathrm{a}_R} 2\eta_R \lambda\Big) \; .
\end{aligned}$$

Iskoristili smo izraz za preklapanje svojstvenih stanja koji smo prethodno izračunali, (8.2.39). Integral u poslednjem redu, analogan onom koji smo dobili u dve dimenzije (8.2.17), je očigledno dosta komplikovaniji. Analitički nije moguće da se reši, ali ostavlja se otvorena mogućnost da se eventualno reši numerički.

8.2.2 Komutativni limes

Ovde ćemo da prokomentarišemo kako se komutativni limes $\hbar \to 0$ manifestuje kod integralnih kernela fokusirajući se na dvodimenzioni slučaj. Sličnim računom kao iznad kada smo nalazili matrične elemente $\hat{v}_{\omega,\kappa}(\eta_L, \eta_R)$, za svaki par funkcija $f(\hat{\eta})$ i $g(\hat{y})$ nalazimo matrične elemente njihovog proizvoda. Krećemo sa računanjem $\langle q_L | f(\hat{\eta}) g(\hat{y}) | -q_R \rangle$ tako što ubacujemo jedinicu napisanu preko $|\lambda\rangle$, svojstvenih stanja $\hat{y}$ koordinate,

$$\langle q_L | f(\hat{\eta}) g(\hat{y}) | -q_R \rangle = \langle q_L | f(\hat{\eta}) g(\hat{y}) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, |\lambda\rangle\langle\lambda| -q_R \rangle. \qquad (8.2.43)$$

Iz izraza (8.2.8) zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\langle \lambda | -q_R \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-q_R)^{-\frac{1}{2}+\Delta^*} \, e^{-i\lambda q_R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-q_R)^{-i\tau} \, e^{-i\lambda q_R}, \\
\langle q_L | \lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, q_L^{-\frac{1}{2}+\Delta} \, e^{-i\lambda q_L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, q_L^{i\tau} \, e^{-i\lambda q_L}.
\end{aligned}$$

Dalje, kako je $|q\rangle$ svojstveno stanje koordinate $\hat{\eta}$ za svojstvenu vrednost $-\hbar q$, onda je $f(\hat{\eta})|q_L\rangle = f(-\hbar q_L)|q_L\rangle$. Nakon ovoga, vraćamo se na (8.2.43) i primećujemo da je ostao da se reši integral po λ,

$$\langle q_L | f(\hat{\eta}) g(\hat{y}) | -q_R \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q_L}{-q_R} \right)^{i\tau} f(-\hbar q_L) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, g(\lambda) \, e^{-i(q_L+q_R)\lambda}. \qquad (8.2.44)$$

Vidimo da je on zapravo inverzna Furije transformacija $\tilde{g}(q_L + q_R)$ funkcije $g(\lambda)$. Dobili smo da je matrični element

$$\langle q_L | f(\hat{\eta}) g(\hat{y}) | -q_R \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q_L}{-q_R} \right)^{i\tau} f(-\hbar q_L)\, \tilde{g}(q_L + q_R). \tag{8.2.45}$$

Vrlo slično dolazimo do matričnog elementa proizvoda ovih funkcija u obrnutom redosledu,

$$\langle q_L | g(\hat{y}) f(\hat{\eta}) | -q_R \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q_L}{-q_R} \right)^{i\tau} \tilde{g}(q_L + q_R) f(\hbar q_R)\ . \tag{8.2.46}$$

Sada ćemo da pretpostavimo da je f analitička funkcija u okolini nule. U tom slučaju, koristeći prethodne dve jednačine i Tejlorov razvoj, za matrični element komutatora funkcija $f(\hat{\eta})$ i $g(\hat{y})$ dobijamo

$$\langle q_L | [f(\hat{\eta}), g(\hat{y})] | -q_R \rangle = -\frac{\hbar}{2\pi} \left(\frac{q_L}{-q_R} \right)^{i\tau} \tilde{g}(q_L + q_R)(q_L + q_R) f'(0) \ + O\left(\hbar^2\right)\ . \tag{8.2.47}$$

Vidimo da za odgovarajući izbor opservabli f i g, koji podrazumeva da je $f(0) \neq 0$, zatim da je f analitička funkcija u nuli i da je g moguće Furije transformisati, komutator ide u nulu kad $\hbar \to 0$. Pošto smo prodiskutovali komutativni limes, u ostatku ove glave uzimamo da je $\hbar = 1$.

8.2.3 Opšte rešenje Klajn-Gordonove jednačine

Eksplicitna realizacija Hilbertovog prostora stanja fazi geometrije nam dozovoljava da diskutujemo kompletnost skupa fazi harmonika koje smo prethodno našli. Da bismo ovo uradili koristimo algebru koordinata $\mathcal{A}$ koju čine operatori u prostoru reprezentacije glavne neprekidne serije $\pi_{\Delta,V}$. Za nalaženje elemenata f algebre $\mathcal{A}$ koristimo izomorfizam

$$\mathcal{A} = \mathrm{End}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*\,, \tag{8.2.48}$$

i posmatramo ove elemente kao vektorske funkcije dve promenljive, ${f^a}_b(z_L^i, z_R^j)$. Za glavnu neprekidnu seriju reprezentacije, $\mathcal{H}^*$ je izmorfno sa $\mathcal{H}$ i koristimo sledeće oznake $\Delta_R = (d-1)/2 + i\tau$, $\Delta_L = \Delta_R^* = (d-1)/2 - i\tau$. Kada ga na ovakav način posmatramo, očigledno je da je fazi postor $2(d-1)$-dimenzionalan, zajedno sa dodatnom diskretnom strukturom opisanom indeksima a, b koje nose funkcije ${f^a}_b(z_L^i, z_R^j)$. Cilj ovog poglavlja je da kvantifikujemo razliku u broju stepeni slobode u komutativnom i nekomutativnom slučaju koja postoji kada je dimenzija prostora $d > 2$.

Rešićemo svojstveni problem laplasijana na ovom prostoru, (8.2.48). Da pomenemo da elementi Lijeve algebre $\mathfrak{so}(1, d)$ deluju na operatore u $\mathcal{A}$ preko komutatora. Kada ga pišemo preko kernela ${f^a}_b(z_L^i, z_R^j)$, ovo dejstvo ima sledeći oblik

$$\mathrm{ad}_X \mapsto X^L + X^R\ . \tag{8.2.49}$$

Stoga fazi laplasijan (6.2.24) deluje na kernele na sledeći način,

$$\Delta = -\left(D^L + D^R\right)^2 + (d-1)\left(D^L + D^R\right) + \sum_{i=1}^{d-1} \left(P_i^L + P_i^R\right)^2\ . \tag{8.2.50}$$

Koristeći izraze za generatore grupe (4.2.9)-(4.2.10), laplasijan postaje diferencijalni operator. Da naglasimo da laplasijan ne zavisi od spina glavne neprekidne serije reprezentacije $\mathcal{H}$ pošto je dat preko generatora translacija P_i i dilatacija D. Dobija se da je izraz (8.2.64) blisko povezan sa laplasijanom na komutativnom de Siterovom prostoru što ćemo u nastavku i pokazati. Uvedimo varijable y^i i ξ^i na sledeći način

$$z_L^i = y^i + \xi^i, \quad z_R^i = y^i - \xi^i \ . \tag{8.2.51}$$

Radijalnu koordinatu konstruisanu od ξ^i označavamo sa $\xi^2 = \xi^i \xi_i$. Koristeći (4.2.9)-(4.2.10), dobijamo

$$P_i^L + P_i^R = -\partial_{y^i}, \quad D^L + D^R = -y^i \partial_{y^i} - \xi^i \partial_{\xi^i} - \mathbb{A}_L - \mathbb{A}_R \,, \tag{8.2.52}$$

pa se odavde lako računa laplasijan. Dobija se da je on invarijantan na $SO(d-1)$ rotacije po koordinati ξ^i. Stoga, može da se napiše kao diferencijalni operator preko koordinata (ξ, y^i),

$$\Delta = -y^i y^j \partial_{y^i} \partial_{y^j} + \partial_{y^i} \partial_{y_i} - \xi^2 \partial_\xi^2 - 2\xi \partial_\xi \, y^i \partial_{y^i} - (3d-2) y^i \partial_{y^i} - (3d-2)\xi \partial_\xi \ - 2(d-1)^2 \ . \tag{8.2.53}$$

Iskoristili smo da je $\mathbb{A}_L + \mathbb{A}_R = d - 1$. Operator (8.2.53) komutira sa $\xi \partial_\xi$, tako da prostor funkcija tražimo u obliku

$$g(\vartheta)(-\xi)^\delta f(y^i) \, e_a \otimes e_b \,, \tag{8.2.54}$$

gde su f, g i δ proizvoljni. Ovde koristimo ϑ da označimo sve uglove sfernog koordinatnog sistema konstruisanog od ξ^i. Za bazisne funkcije na odgovarajućoj sferi S^{d-2} možemo da uzmemo sferne harmonike.

Koristeći prethodno izvedene relacije, nalazimo izraz za laplasijan nakon njegovog delovanja na funkcije oblika $(-\xi)^{i\omega - d+1} f(y^i)$,

$$\Delta^{i\omega - d+1} = -y^i y^j \partial_{y^i} \partial_{y^j} + \partial_{y^i} \partial_{y_i} - (2i\omega + d) y^i \partial_{y^i} - i\omega(i\omega + d - 1) \ . \tag{8.2.55}$$

Sada možemo da iznesemo glavnu opservaciju ovog odeljka - da uporedimo ovaj izraz sa (5.2.9) tako što identifikujemo koordinate y^i i y^i. Označićemo sada $y_i y^i = \rho^2$, iako smo prethodno koristili ρ^2 za proizvod $\mathsf{y}_i \mathsf{y}^i$. Dobijamo zanimljiv rezultat, izraz (8.2.55) se poklapa sa dejstvom komutativnog laplasijana na dS_d. Zbog toga su rešenja odgovarajućih jednačina, nakon smene $-i\omega \to i\omega - d + 1$ identična i data izrazom (5.6.6). Pozitivno-frekventne mode skalarnog polja na fazi dS_d su

$$\begin{aligned} w^{l', \vec{m}', ab}_{\omega, l, \vec{m}, \kappa}(z_L^i, z_R^j) &= Y_{l'}^{\vec{m}'}(\vartheta) \, (-\xi)^{i\omega - d+1} \, \rho^{-\frac{d-1}{2} - i(\omega + \kappa)} \\ &\times \ {}_2F_1\Big(\frac{2l + d - 1 + 2i(\omega+\kappa)}{4}, \frac{-2l + 5 - d + 2i(\omega + \kappa)}{4}; 1 + i\kappa; \rho^{-2} \Big) \, Y_l^{\vec{m}}(\theta) \, e^a \otimes e^b. \end{aligned} \tag{8.2.56}$$

Na ovaj način se svakom komutativnom rešenju pridružuje $L^2(S^{d-2}) \times \dim(V)^2$ nekomutativnih, što odgovara proizvoljnom izboru kvantnih brojeva l', $\vec{m}'$ i vektora $e_a \otimes e_b$. Sfera S^{d-2} može da se posmatra kao "unutrašnji prostor". Zbog svoje kompaktnosti, možemo da kažemo da fazi harmonici formiraju beskonačnu diskretnu kulu moda nad komutativnim harmonicima. Jasno je da je (8.2.56) kompletan skup fazi harmonika.

Identifikacija Poenkareovih koordinata (η, y^i) komutativnog de Siterovog prostora i varijabli (ξ, y^i) služi za potrebe prebrojavanja i povezivanja moda, a izvan toga bi trebalo da se primenjuje malo opreznije. Može da se razmatra struktura prostora E parametrizovanog sa (ϑ, ξ, y^i) kao „fibre bundle" nad dS_d. Neka je Π preslikavanje

$$\Pi : E \to \mathrm{dS}_d, \qquad (\vartheta, \xi, y^i) \mapsto (\eta, \mathsf{y}^i) = (\xi, y^i) \ . \tag{8.2.57}$$

Oba prostora E i dS_d donose dejstvo Lijeve algebre $\mathfrak{so}(1,d)$. Za prostor dS_d generatori su dati izrazima (5.2.5)-(5.2.6), dok su na prostoru E generatori dobijeni X^E izuzimanjem članova koji ne sadrže izvode iz $X^L + X^R$ koje smo koristili iznad,

$$P_i^E = -\partial_{y^i}, \qquad L_{ij}^E = y_i \partial_{y^j} - y_j \partial_{y^i} + \xi_i \partial_{\xi^j} - \xi_j \partial_{\xi^i}, \qquad D^E = -y^i \partial_{y^i} - \xi^i \partial_{\xi^i}, \tag{8.2.58}$$

$$K_i^E = -(y^2 + \xi^2) \partial_{y^i} - 2y^j \xi_j \partial_{\xi^i} + 2(y_i y^j + \xi_i \xi^j) \partial_{y^j} + 2(y_i \xi^j + \xi_i y^j) \partial_{\xi^j}. \tag{8.2.59}$$

Želimo da razumemo koji generatori grupe G zadovoljavaju sledeće:

$$\Pi X^E = X^{\mathrm{dS}_d}\Pi \,. \tag{8.2.60}$$

Vidimo da jedino generatori rotacija $X = L_{ij}$ zadovoljavaju (8.2.60). Ako iskoristimo difeomorfizam Φ (6.2.29), dobijamo tvistovan ekvivarijantni (eng. *equivariance*) uslov

$$\Pi X^E = \Phi^* X^{\mathrm{dS}_d}\Pi \,, \tag{8.2.61}$$

koji zadovoljavaju rotacije i translacije, $X \in \{L_{ij}, P_i\}$. Na unitrašnje stepene slobode, tj. funkcije oblika $g(\vartheta)e_a \otimes e_b$, translacije deluju trivijalno,

$$\left(P_i^L + P_i^R\right) g(\vartheta)e_a \otimes e_b = 0 \,, \tag{8.2.62}$$

što je i očekivano. Sa druge strane, rotacije deluju i na unutrašnjem prostoru koordinata $\vartheta \in S^{d-2}$ i na matrične indekse a, b na prirodan način. Na primeru $d = 4$ pokazaćemo kako na funkcije oblika $g(\vartheta)e_a \otimes e_b$ deluju generatori rotacija

$$\begin{aligned}
L_{12}^L + L_{12}^R &= \partial_\Phi + \frac{i}{2}\left(\sigma_3^{(1)} + \sigma_3^{(2)}\right) \,, \\
L_{13}^L + L_{13}^R &= -\cos\Phi\,\partial_\Theta + \cot\Theta\sin\Phi\,\partial_\Phi - \frac{i}{2}\left(\sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}\right) \,, \\
L_{23}^L + L_{23}^R &= -\sin\Phi\,\partial_\Theta - \cot\Theta\cos\Phi\,\partial_\Phi + \frac{i}{2}\left(\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}\right) \,,
\end{aligned} \tag{8.2.63}$$

gde koristimo notaciju $\sigma_i^{(1)} = \sigma_i \otimes 1$ i slično $\sigma_i^{(2)} = 1 \otimes \sigma_i$. Diferencijalni članovi u (8.2.63) su standardna $\mathfrak{so}(3)$ vektorska polja na sferi. Ove transformacione osobine sugerišu da dodatne stepene slobode prisutne na nekomutativnom prostoru treba da posmatramo kao "higher-spin" polja. Ovo je slično strukturama koje se javljaju u drugim različitim modelima (npr. Štajnakerovim radovima [30, 31, 32]) i možemo da zaključimo da je to opšta karakteristika kovarijantnih nekomutativnih prostora čija je dimenzija veća od dva. Da bi se odgovorilo pitanje kako se dodatni stepeni slobode potiskuju pri dobijanju skoro klasičnih rešenja, pretpostavljamo da su korisne „weight-shifting" tehnike razvijene u konformnoj teoriji polja, [81, 82, 83].

8.2.4 Opšte rešenje Klajn-Gordonove jednačine i dodatni detalji u dve dimenzije

Fazi laplasijan, koji deluje na kernele ima sledeći oblik

$$\Delta = -\left(D_L + D_R\right)^2 + D_L + D_R + \left(P_L + P_R\right)^2 \,, \tag{8.2.64}$$

gde su generatori dilatacija i translacija u koordinatnoj realizaciji dati izrazima (4.2.9)-(4.2.10) sa $i = 1$. Uvodimo varijable y i ξ na sledeći način

$$z_L = y + \xi, \quad z_R = y - \xi, \qquad y, \xi \in (-\infty, \infty). \tag{8.2.65}$$

Za razliku od slučajeva $d > 2$, ovde ξ nije radijalna koordinata, već ima vrednosti u intervalu $\xi \in (-\infty, \infty)$. Preko novih promenljivih, sume generatora su

$$P^L + P^R = -\partial_y, \quad D^L + D^R = -y\partial_y - \xi\partial_\xi - \mathbb{A}_L - \mathbb{A}_R \,, \tag{8.2.66}$$

a laplasijan

$$\Delta = (1 - y^2)\,\partial_y^2 - \xi^2\partial_\xi^2 - 2\xi\partial_\xi\, y\partial_y - 4\,y\partial_y - 4\,\xi\partial_\xi \; - 2 \,. \tag{8.2.67}$$

Rešenje Klajn-Gordonove jednačine $\Delta\phi = M^2\phi$ tražimo u obliku $\phi(\xi, y) = (-\xi)^{i\omega-1}f(y)$ i dobijamo

$$w_{\omega,\kappa}(\xi, y) = \langle z_L|w_{\omega,\kappa}|z_R\rangle = (-\xi)^{i\omega-1}(y^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(y). \tag{8.2.68}$$

Naivno gledano, naša prethodna analiza u četiri dimenzije može da sugeriše da rešenja koja su istog oblika kao klasična, $\hat{v}_{\omega,l,\vec{m},\kappa}$ data izrazom (8.1.27), mogu da se identifikuju sa najnižim (skalarnim) modama $w^{0,0,ab}_{\omega,l,\vec{m},\kappa}$, za neke vrednosti indeksa a, b. Takođe, u dve dimenzije deluje da se mogu identifikovati „skoro klasične" mode (8.1.14) sa (8.2.68). Ovde ćemo da pokažemo da to nije slučaj, to već može da se vidi i u dve dimenzije. Krenućemo od moda (8.2.68), i primenićemo Furijeovu transformaciju. Furije-transformisane varijable koje odgovaraju promenljivim ξ i y su ζ i χ, pa je potrebno da se reše sledeći integrali po ξ i y,

$$w_{\omega,\kappa}(\zeta, \chi) = 2\int d\xi\, e^{-2i\zeta\xi}\,(-\xi)^{i\omega-1}\int dy\, e^{-2i\chi y}\,(y^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}\,Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(y). \tag{8.2.69}$$

Detalji oko njihovog računanja su sumirani u dodatku A.3, ovde navodimo samo rezultate,

$$\begin{aligned} w_{\omega,\kappa}(\zeta, \chi) =& 2C\,(-2\chi)^{-\frac{1}{2}+i\omega}J_{i\kappa}(-2\chi)(-2)\Gamma(i\omega)\,e^{\frac{\omega\pi}{2}}\,\sinh(\omega\pi)(2\zeta)^{-i\omega} \\ =& E\,(-2\zeta)^{-i\omega}\,(-2\chi)^{i\omega-\frac{1}{2}}\,J_{i\kappa}(-2\chi)\,. \end{aligned} \tag{8.2.70}$$

Sada ćemo promenljive ζ i χ da napišemo preko η_L i η_R kao $-\eta_{L,R} = \chi \pm \zeta$, tako da su Furije-transformisane mode preko novih promenljivih

$$w_{\omega,\kappa}(\eta_L, \eta_R) = E\,(\eta_L - \eta_R)^{-i\omega}\,(\eta_L + \eta_R)^{i\omega-\frac{1}{2}}\,J_{i\kappa}(\eta_L + \eta_R)\,, \tag{8.2.71}$$

gde je E konstanta koja je data izrazom (A.3.11) u dodatku A.3. Sa druge strane, mode $\hat{v}_{\omega,\kappa}$ koje smo našli kao matrične elemente u svojstvenom bazisu konformne koordinate (8.2.18) su

$$\hat{v}_{\omega,\kappa} = B\,\eta_L^{i\tau-i\omega}\,\eta_R^{-i\tau}(\eta_L + \eta_R)^{i\omega-\frac{1}{2}}\,J_{i\kappa}(\eta_L + \eta_R)\,, \tag{8.2.72}$$

sa konstantom $B = c_{\omega,\kappa}(-1)^{i\tau-i\omega}C/(2\pi)$. Očigledno je da se ova dva skupa rešenja ne poklapaju, ali može da se neko od njih razvije po drugom.

Drugi način za karakterizaciju ova dva skupa funkcija je preko operatora koji oni dijagonalizuju. Oba skupa su svojstvene funkcije fazi laplasijana, koji je preko promenljivih χ, ζ dat izrazom

$$\Delta = -\chi^2\partial_\chi^2 - \zeta^2\partial_\zeta^2 - 2\chi\zeta\partial_\chi\partial_\zeta - 2\,(\chi\partial_\chi + \zeta\partial_\zeta) - 4\chi^2\,, \tag{8.2.73}$$

a do njega smo došli Furijeovom transformacijom laplasijana (8.2.67). Svojstvene vrednosti $w_{\omega,\kappa}$ i $\hat{v}_{\omega,\kappa}$ su $\kappa^2 + 1/4$. Pored toga, $w_{\omega,\kappa}$ su svojstvene funkcije od $\zeta\partial_\zeta$. Sa druge strane, $\hat{v}_{\omega,\kappa}$ su svojstvene funkcije operatora

$$\hat{D} = (\chi + \zeta)\partial_\zeta - 2i\tau\frac{\chi}{\chi - \zeta} = \left(D^L - \frac{1}{2}\right) - \frac{\eta_L}{\eta_R}\left(D^R - \frac{1}{2}\right)\,. \tag{8.2.74}$$

Prisetimo se da su u komutativnom slučaju mode $v_{\omega,\kappa}$ karakterisane kao zajedničke svojstvene funkcije operatora $\{\Delta_{dS_2}, D\}$. Vidimo da se u nekomutativnom slučaju $\hat{D}$ razlikuje od sume $D^L + D^R$ što je još jedna manifestacija činjenice da kvantizacija narušava $SO(1,2)$ simetriju, što smo već diskutovali ranije u 6.2. Očekujemo da je u slučaju većeg broja dimenzija moguća karakterizacija nekomutativnih moda preko diferencijalnih jednačina sličnih sa (8.2.74) i da to može dovesti do znatnih pojednostavljenja u poređenju sa analizom preko integralnih reprezentacija.

8.3 Dalamberijan i odgovarajuća svojstvena stanja

Ovde ćemo da prodiskutujemo operator sličan laplasijanu koji može da se definiše na fazi de Siterovom prostoru. Laplasijan koji smo do sada analizirali u ovom poglavlju dobijen je jednoznačno iz *frame* formalizma. U glavi 7 (i radu [50]) smo razmatrali operator dobijen izuzimanjem lineranog člana $3\hat{p}_0$ iz laplasijana. Da bismo opravdali izostavljanje ovog člana možemo da razmotrimo (nekomutativnu) teoriju realnog skalarnog polja sa dejstvom

$$S = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left(\frac{1}{2}\,\Phi\,\Delta\Phi + V(\Phi)\right). \tag{8.3.1}$$

Ovde je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor koji nosi prostor neke unitarne reprezentacije $SO(1,d)$ grupe, a $V(\Phi)$ je proizvoljan potencijal. Variranjem ovog dejstva dobijaju se jednačine polja

$$\Box\Phi + V'(\Phi) = 0\,, \qquad \Box\Phi := -[\hat{p}_0,[\hat{p}_0,\Phi]] + [\hat{p}_i,[\hat{p}_i,\Phi]]. \tag{8.3.2}$$

Ovo je, dakle, operator bez linearnog člana koji zovemo dalamberijan. On se pojavljuje u jednačinama kretanja. Prema tome, razmatramo koji od operatora Δ ili $\Box$ je prikladniji za teoriju polja. Ispostavlja se da su za reprezentacije koje razmatramo ova dva operatora u suštini ekvivalentna i povezana kao

$$\Box = \xi^{\frac{d-1}{2}}\,\Delta\,\xi^{-\frac{d-1}{2}} - \left(\frac{d-1}{2}\right)^2, \tag{8.3.3}$$

što ćemo da pokažemo u nastavku. Varijabla ξ, pomoću koje su povezani laplasijan i dalamberijan, uvedena je prethodno u ovoj glavi kada smo realizovali glavnu neprekidnu unitarnu reprezentaciju grupe $SO(1,d)$ na određenom prostoru funkcija. Zahvaljujući vezi (8.3.3), vidimo da je opravdano što smo analizirali laplasijan. Nije očigledno kako bismo našli svojstvene funkcije dalamberijana operatorski, tj. prateći metod iz poglavlja 8.1. Međutim, može da se postupi kao u poglavlju 8.2.3. Nakon identifikacije algebre fazi funkcija $\mathcal{A}$ sa $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*$ dejstvo dalamberijana je dato izrazom

$$\Box = -\left(D^L + D^R\right)^2 + \sum_{i=1}^{d-1}\left(P_i^L + P_i^R\right)^2. \tag{8.3.4}$$

Koristeći izraze (8.2.52), nalazimo dalamberijan preko promenljivih (ξ, y_i)

$$\Box = -y^i y^j \partial_{y^i}\partial_{y^j} + \partial_{y^i}\partial_{y_i} - \xi^2\partial_\xi^2 - 2\xi\partial_\xi\, y^i\partial_{y^i} - (2d-1)y^i\partial_{y^i} - (2d-1)\xi\partial_\xi \; - (d-1)^2\,. \tag{8.3.5}$$

Ovaj operator u velikoj meri deli strukturu lapalsijana (8.2.53). Da naglasimo da ne deluje na indekse a,b vektorskih funkcija koje čine prostor reprezentacije i ne zavisi od ugaonih promenljivih (ϑ). Kao što je navedeno u (8.3.3) ova dva operatora su povezana konjugacijom. Svojstvene funkcije diferencijalnog operatora $\Box$ tražimo u obliku (8.2.54), isto kao kod Δ. Kada deluje na funkcije $(-\xi)^{i\omega-(d-1)/2}f(y^i)$, dobijamo da je redukovan fazi dalamberijan

$$\Box^{i\omega-\frac{d-1}{2}} = \Delta^{i\omega-d+1} - \left(\frac{d-1}{2}\right)^2 \tag{8.3.6}$$

povezan sa redukovanim fazi laplasijanom $\Delta^{i\omega-d+1}$ datim izrazom (8.2.55) koji je već povezan sa komutativnim lapalsijanom. Pošto se diferencijalni operatori $\Box^{i\omega-\frac{d-1}{2}}$ i $\Delta^{i\omega-d+1}$ razlikuju za konstantu, svojstvene funkcije $\Box^{i\omega-\frac{d-1}{2}}$, koje označavamo sa $\bar{w}$, su

$$\begin{aligned}\bar{w}^{l',\vec{m}',ab}_{\omega,l,\vec{m},M}(z_L^i, z_R^j) = {} & Y_{l'}^{\vec{m}'}(\vartheta)\,(-\xi)^{i\omega-\frac{d-1}{2}}\,\rho^{-\frac{d-1}{2}-i(\omega+M)} \\ & \times\, {}_2F_1\Big(\frac{2l+d-1+2i(\omega+M)}{4}, \frac{-2l+5-d+2i(\omega+M)}{4}; 1+iM; \rho^{-2}\Big)\, Y_l^{\vec{m}}(\theta)\, e^a\otimes e^b\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

i slične su svojstvenim funkcijama (8.2.56) od $\Delta^{i\omega-d+1}$ koje smo prethodno odredili. Efekat razlike $\Box$ i Δ se kod svojstvene vrednosti ogleda u zameni parametra κ masom M. Zbog proizvoljnosti izbora kvantnih brojeva $l', \vec{m}'$ i vektora $e_a \otimes e_b$, gde su e_a i e_b vektori u konačnodimenzionom prostoru V grupe $SO(d-1)$ svakom komutativnom rešenju se pridružuje $L^2(S^{d-2}) \times \dim(V)^2$ nekomutativnih. Na sferu S^{d-2} gledamo kao na unutrašnji prostor. Zbog svoje kompaktnosti fazi harmonici dati izrazom (8.3.7) (kao i (8.2.56)) formiraju beskonačnu diskretnu kulu moda nad komutativnim harmonicima. Alternativa razmatranju operatora $\Box$ je da se modifikuje dejstvo (8.3.1) uvođenjem faktora ξ^{d-1} u meru na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$.

Za kraj da dodamo da postoje operatori koji takođe mogu da budu predloženi za fazi analogone komutativnog lapalsijana. Jedan takav je kvadratni Kazimir $SO(1,4)$ grupe koji ima manifestnu $SO(1,4)$ simetriju. Odgovarajuća diferencijalna geometrija ima deset impulsa, odnosno desetodimenzioni tangentni prostor i celu de Siterovu simetriju. Ova verzija fazi dS prostora je analizirana u 6.3. Bliže povezan sa Δ (ili $\Box$) je laplasijan u radu [32]. To je četvorodimenzioni model fazi kosmološkog prostorvremana koji ima sličnosti sa prostorom koji ovde razmatramo. Ono što je značajno, ova dva prostora imaju iste koordinate mada su izračunate u različitim reprezentacijama. Međutim, impulsi se razlikuju što dovodi do laplasijana sa različitim grupama simetrije tj. centralizatorom unutar $SO(1,4)$. Naime, centralizator operatora koje ovde razmatramo (6.2.24) i (8.3.2) je $SO(3)$ generisan rotacijama L_{ij}, za razliku laplasijana [32] gde je to $SO(1,3)$.

9 Dalji pravci istraživanja

Pre nego što rezimiramo šta je sve urađeno u ovoj disertaciji i izvedemo zaključak o dobijenim rezultatima, želimo da prođemo kroz otvorena pitanja i dalje pravce istraživanja. To je tema ovog odeljka.

9.1 Koherentna stanja

Ovde ćemo da definišemo standardna i generalizovana koherentna stanja (KS) i da navedemo njihove osobine koje su izvedene koristeći metode teorije grupa, [84, 85]. Motivacija dolazi iz ideje da kasnije uvedemo koherentna stanja na fazi de Siterovom prostoru kako bismo ih povezali sa tačkama na klasičnom prostoru. To je već urađeno na anti de Siterovom prostoru u dve i tri dimenzije u radovima [71] i [86].

U kvantnoj mehanici, kod harmonijskog oscilatora, standardna KS su svojstvena stanja operatora anhilacije. U koordinatnoj reprezentaciji to su Gausovi paketi,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad \langle x|\alpha\rangle = c\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha x}, \tag{9.1.1}$$

gde je konstanta normiranja $|c|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-2\,(\mathrm{Re}\,\alpha)^2}$. Ova stanja nisu međusobno ortogonalna, štaviše skup koherentnih stanja je prekompletan (eng. *overcomplete*), tj. sadrži više stanja nego što je neophodno za razvoj proizvoljnog stanja. Ona razlažu jedinicu do na faktor ispred,

$$I = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \int dz\, dz^* |z\rangle\langle z|. \tag{9.1.2}$$

Važna osobina koherentnih stanja je da je proizvod neodređenosti koodinate i impulsa minimalan, $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$, pa se za njih kaže da su skoro klasična.

Operatori kreacije $\hat{a}^\dagger$ i anhilacije $\hat{a}$, zajedno sa jediničnim operatorom zadovoljavaju komutacione relacije Hajzenberg-Vajlove algebre W_1,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}, \qquad [\hat{a}, \hat{I}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{I}] = 0. \tag{9.1.3}$$

Elementi algebre su zapisani kao

$$\hat{x} = is\hat{I} + (\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \tag{9.1.4}$$

a Lijeva grupa koja odgovara ovoj algebri se konstruiše eksponenciranjem,

$$e^{\hat{x}} = e^{is\hat{I}}\, D(\alpha), \qquad D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \tag{9.1.5}$$

Zbog nekih relacija koje navodimo kasnije korisno je da vidimo šta se dobija kada dva puta primenimo dejstvo grupe,

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}, \qquad \hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \qquad \hat{B} = \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}. \tag{9.1.6}$$

Kako je $[\hat{A},\hat{B}]=\alpha\beta^*-\alpha^*\beta=2i\,\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*)$, onda su komutatori $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=0=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]$, pa se primenom BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) formule,

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]-\frac{1}{12}[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]+\dots}, \tag{9.1.7}$$

dobija

$$D(\alpha)D(\beta)=e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{i\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*)}D(\alpha+\beta). \tag{9.1.8}$$

Ovde ćemo da uvedemo skup generalizovanih stanja koja su prekompletna stanja vezana za Hajzenberg-Vajnlovu grupu W_1. Neka je $T(g)$ unitarna ireducibilna reprezentacija W_1 i $|\psi_0\rangle$ fiksan vektor u Hilbertovom prostoru stanja $\mathcal{H}$. Ovaj vektor je jedino invarijantan na dejstvo operatora oblika $T((s,0))$ jer se dobija vektor koji se od polaznog razlikuje samo po faznom faktoru. Podgrupa izotropija H za proizvoljno stanje $|\psi_0\rangle$ sadrži jedino elemente oblika $h=(s,0)$. Sada delujemo na $|\psi_0\rangle$ operatorom $T(g)=T((t,\alpha))=e^{it}D(\alpha)$ i dobijamo skup stanja $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|\psi_0\rangle, \tag{9.1.9}$$

gde je $\alpha\in\mathbb{C}$. Kao što smo već rekli, podgrupa H izotropija stanja $|\psi_0\rangle$ sadrži samo elemente $h=(t,0)$, onda različito α odgovara različitim stanjima. Skup $\{|\alpha\rangle\}$ je skup generalizovanih koherentnih stanja. Specijalan slučaj je izbor vakuuma $|0\rangle$ kao polaznog vektora $|\psi_0\rangle$. U tom slučaju se radi o standardnim koherentnim stanjima.

Navešćemo neke od osobina KS. Ova stanja *nisu međusobno ortogonalna*,

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\langle\psi_0|D^+(\beta)D(\alpha)|\psi_0\rangle=e^{i\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*)}\langle\psi_0|D(\alpha-\beta)|\psi_0\rangle. \tag{9.1.10}$$

Operator $D(\alpha)$ svako KS transformiše u neko drugo KS, $D(\alpha)|\beta\rangle=e^{i\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*)}|\alpha+\beta\rangle$. Ova relacija određuje dejstvo grupe W_1 na α ravni. Faktor grupa W_1/H je grupa translacija α ravni. Stoga je invarijantna metrika na α ravni $ds^2=|d\alpha|^2$ i odgovarajuća invarijantna mera

$$d\mu(\alpha)=Cd^2\alpha=C\,d\alpha_1\,d\alpha_2,\qquad \alpha=\alpha_1+i\alpha_2, \tag{9.1.11}$$

gde je C konstanta. Dalje hoćemo da dobijemo razlaganje jedinice. Razmotrimo sledeći operator

$$\hat{A}=\int d\mu(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|, \tag{9.1.12}$$

gde je $|\beta\rangle\langle\beta|$ projektor na stanje $|\beta\rangle$. Kako $\hat{A}$ komutira sa svakim $D(\alpha)$ onda, na osnovu Šurove leme, ovaj operator je jedinični operator pomnožen nekim brojem, što ćemo da zapišemo kao $\hat{A}=d^{-1}\hat{I}$. Konstantu d možemo da odredimo tako što izračunamo očekivanu vrednost operatora $\hat{A}$ u koherentnom stanju $|\alpha\rangle$,

$$d^{-1}=\langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle=\int d\mu(\beta)|\langle\alpha|\beta\rangle|^2. \tag{9.1.13}$$

Za ogrančen operator $\hat{A}$ sledi da je $d\neq 0$, pa konstanta C može da se izabere tako da je $d=1$. Uzevši sve u obzir, *razlaganje jedinice* je

$$\hat{I}=\int d\mu(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{9.1.14}$$

gde je mera (9.1.11) sa konstantom C koju sad smatramo određenom. Odavde vidimo i *linearnu zavisnost* koherentnih stanja,

$$|\beta\rangle=\int d\mu(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle, \tag{9.1.15}$$

kao i da proizvoljno stanje $|\psi\rangle$ možemo da razvijemo po koherentnim,

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha)\psi(\alpha)|\alpha\rangle, \tag{9.1.16}$$

gde (talasne) funkcije $\psi(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle$ potpuno određuju vektore $|\psi\rangle$. Takođe očigledno je da se norma računa kao

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha)|\psi(\alpha)|^2. \tag{9.1.17}$$

Dalje želimo da u KS izračunamo neodređenost koordinate i impulsa koje možemo da zapišemo preko operatora kreacije i anhilacije kao

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{9.1.18}$$

Ovde smo, radi jednostavnosti, uzeli da su masa m i frekvencija ω jednake jedinici. Za početak želimo da nađemo vezu neodređenosti u proizvoljnom i polaznom KS. Neodređenost koordinate u proizvoljnom stanju $|\alpha\rangle$ (9.1.9) je

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\, \langle\psi_0|D^\dagger(\alpha)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)D(\alpha)|\alpha\rangle\,. \tag{9.1.19}$$

Koristeći BCH formulu

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \ldots, \tag{9.1.20}$$

dobijamo sledeće dve jednakosti

$$e^{-(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}\hat{a}e^{-(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})} = \hat{a} + \alpha, \qquad e^{-(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}\hat{a}^\dagger e^{-(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})} = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \tag{9.1.21}$$

to jest

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = a + \alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*. \tag{9.1.22}$$

Dolazimo do sledeće veze očekivanih vrednosti koordinate u proizvoljnom i polaznom KS,

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle + \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\,\alpha. \tag{9.1.23}$$

Slično, višestrukom primenom (9.1.22), dobijamo i očekivanu vrednost kvadrata koordinate

$$\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle = \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle + 2\sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\,\alpha\,\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle + 2\hbar(\mathrm{Re}\,\alpha)^2, \tag{9.1.24}$$

tako da je disperzija koordinate

$$(\Delta\hat{x})^2_{|\alpha\rangle} = \langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle)^2 = \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle - (\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle)^2 = (\Delta\hat{x})^2_{|\psi_0\rangle} \tag{9.1.25}$$

ista u svakom koherentnom stanju. Isto važi i za neodređenost impulsa,

$$(\Delta\hat{p})^2_{|\alpha\rangle} = (\Delta\hat{p})^2_{|\psi_0\rangle}. \tag{9.1.26}$$

Vidimo da pojedinačne neodređenosti, $\Delta\hat{x}$ i $\Delta\hat{p}$, kao i njihov proizvod ne zavise od vrednosti kvantnog broja α. Druga posledica je da među KS uvek postoji stanje za koje je $\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$. Lako se pokazuje da ovu osobinu zadovoljava specifično stanje

$$|-\alpha_0\rangle = D(-\alpha_0)|\psi_0\rangle, \qquad \alpha_0 = \langle\psi_0|\hat{a}|\psi_0\rangle\,. \tag{9.1.27}$$

Zbog toga, bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da radimo baš sa stanjem za koje važi $\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle = 0$. Sada želimo da nađemo sva ovakva stanja koja pritom minimizuju Hajzenbergovu relaciju neodređenosti,

$$\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}. \tag{9.1.28}$$

Neka je stanje $|\psi\rangle = \hat{A}|\psi_0\rangle$ dobijeno pomoću operatora $\hat{A}$ koji predstavlja uopštenje operatora anhilacije, $\hat{A} = \frac{\lambda\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2\lambda\hbar}}$. Za normu uvek važi $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, što za posledicu ima nejednakost

$$\langle\hat{A}^\dagger\hat{A}\rangle = \frac{1}{2\lambda\hbar}(\Big(\lambda^2\langle\hat{x}^2\rangle + i\lambda\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle + \langle\hat{p}^2\rangle\Big) = \frac{1}{2\lambda\hbar}\Big(\lambda^2(\Delta\hat{x})^2 + (\Delta\hat{p})^2 - \lambda\hbar\Big) \geq 0. \tag{9.1.29}$$

Odavde se vidi da je zadovoljavanje ove nejednakosti za svako λ ekvivalentno Hajzenbergovoj relaciji neodređenosti. Minimalna vrednost (9.1.28) jedino važi za

$$\hat{A}|\psi_0\rangle = \frac{\lambda\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2\lambda\hbar}}|\psi_0\rangle = 0, \qquad \lambda > 0. \tag{9.1.30}$$

Specijalno, za $\lambda = 1$, stanje $|\psi_0\rangle$ je vakuum $|0\rangle$. To nas vraća na početak, na standardna KS $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$. Sve osobine koje su prethodno izvedene u opštem slučaju, važe i za standardna KS. Pored toga, postoje dodatne formule koje važe samo za stadardna KS. Lako se, koristeći (9.1.22), dolazi do definicije koju smo naveli na početku (9.1.1),

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}D(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)(\hat{a}+\alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{9.1.31}$$

Takođe, lako se pokazuje da operator kreacije $\hat{a}^\dagger$ nema svojstveni vektor u Hilbertovom prostoru stanja $\mathcal{H}$. Ovako dobijena α ravan je analogon klasične fazne ravni opisane koordinatama i impuslima, (x,p). Primenom (9.1.7), operator $D(\alpha)$ može da se zapiše kao

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}]}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}, \tag{9.1.32}$$

što za posledicu ima razvoj KS po svojstvenim stanjima energije,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{9.1.33}$$

Odavde jednostavno sledi neortogonalnost KS,

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta}. \tag{9.1.34}$$

Lako se dobija da je konstanta $C = \frac{1}{\pi}$ pa je mera $d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi}\,d\alpha_1\,d\alpha_2$, gde je $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Prateći ovu ideju, uvedena su koherentna stanja na fazi sferi. Pošto je fazi sfera definisana kao ireducibilna reprezentacija $SO(3)$ grupe, onda je izračunata suma neodređenosti koordinata u stanju $|l,m\rangle$. Ovaj zbir je minimalan za vektore sa maksimalnom vrednošću $|m|$. Na taj način za osnovno KS može da se izabere severni pol $|0\rangle = |l,l\rangle$, a sva ostala KS se dobijaju delovanjem rotacija, $|\vec{n}\rangle = e^{-i\theta m^a j_a}|0\rangle$, [12]. Ovde je θ ugao rotacije, a $\vec{m}$ osa rotacije.

9.1.1 Koherentna stanja na dS$_2$

Jedan od načina za povezivanje nekomutativnog prostora sa odgovarajućom klasičnom mnogostrukošću je da se identifikuje skup koherentnih stanja u Hilbertovom prostoru koja se ponašaju na sličan način kao klasične tačke i daju pojam lokalnih merenja. Ovde želimo da nađemo skup koherentnih stanja prostora dS$_2$ čija je grupa izometrija $SO(2,1) \approx SL(2,\mathbb{R})$.

Semiklasična stanja za diskretnu seriju ove grupe su uvedena u [86]. U tim stanjima su nađene očekivane vrednosti moda fazi AdS_2 prostora, a zatim je adekvatno definisan klasičan limes preko parametra reprezentacije[1].

Kao što smo više puta pomenuli, za dS prostor koristimo glavnu neprekidnu seriju. Ona je data reprezentacijom na Hilbertovom prostoru kvadratno integrabilnih funkcija jedne promenljive, x, sa kvantnim brojem $\tau = -\frac{1}{2} + i\rho$. Generatori $\{H, E_\pm\}$ Lijeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ reprezentovani kao

$$H = D = -iM_{02} = -x\partial_x + \tau, \tag{9.1.35}$$

$$E_+ = P = i(M_{01} + M_{12}) = -\partial_x, \tag{9.1.36}$$

$$E_- = K = i(M_{01} - M_{12}) = x^2\partial_x - 2\tau x, \tag{9.1.37}$$

zadovoljavaju relacije

$$[H, E_+] = E_+\,, \qquad [H, E_-] = -E_-\,, \qquad [E_+, E_-] = 2H. \tag{9.1.38}$$

Sada definišemo kompleksne kombinacije gornjih generatora koji zadovoljavaju iste komutacione relacije

$$\tilde{H} = \frac{i}{2}\,(E_+ - E_-) = \frac{i}{2}\,(-\partial_x - x^2\partial_x + 2\tau x), \tag{9.1.39}$$

$$\tilde{E}_+ = \frac{1}{2}\,(E_+ + E_- + 2iH), \tag{9.1.40}$$

$$\tilde{E}_- = \frac{1}{2}\,(E_+ + E_- - 2iH). \tag{9.1.41}$$

Skalarni proizvod je

$$(\psi, \chi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\, \chi(x)\ . \tag{9.1.42}$$

Osnovno koherentno stanje χ_0 definišemo kao[2]

$$\tilde{E}_-\, \chi_0 = 0\ , \tag{9.1.46}$$

gde je $\tilde{E}_- = \frac{1}{2}(x+i)^2\,\partial_x - \tau\,(x+i)$. Dobijamo da χ_0 zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\chi_0}{\chi_0} = 2\tau\frac{dx}{x+i} \tag{9.1.47}$$

[1]Takođe je nađen skup koherentnih (semiklasičnih) stanja na AdS_3 čija je grupa izometrija $SO(2,2)$. Lijeva algebra $\mathfrak{so}(2,2)$ je izomorfna direktnoj sumi dve kopije $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ algebre, $\mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Stoga su semiklasična stanja na AdS_3 direktan proizvod semiklasičnih stanja na AdS_2, [71],[86].

[2]Perelomov koherentna stanja za glavnu neprekidnu seriju definiše kao stanja invarijantna na generator kompaktne podgrupe,

$$M_{12}\psi_0 = -\tilde{H}\psi_0 = 0\ . \tag{9.1.43}$$

Ovaj uslov može da se reši i dobije se normalizabilna funkcija

$$\psi_0(x) = C_0\,(1+x^2)^\tau\ . \tag{9.1.44}$$

Međutim, u ovom stanju očekivane vrednosti obe koordinate su nula, $\langle\psi_0|\hat{\eta}|\psi_0\rangle = 0$, $\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle = 0$. Ova osobina nam ne odgovara, jer je ideja da se ostala koherentna stanja definišu iz osnovnog delovanjem elemenata grupe,

$$|\lambda, b\rangle = \lambda^{\hat{p}_0}\ e^{b\hat{p}_1}\,|\psi_0\rangle\ , \tag{9.1.45}$$

pa ako je u početnom stanju očekivana vrednost konformnog vremena 0, dilatacija ne može da je promeni.

i da je njeno rešenje normalizabilno,

$$\chi_0(x) = C\,(x+i)^{2\tau} = C(x+i)^{-1+2i\rho}\ . \tag{9.1.48}$$

Ova funkcija je višeznačna, što se lako vidi iz

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z} = e^{\alpha(\log|z|+i\arg z+2k\pi i)}. \tag{9.1.49}$$

Stoga na početku treba da odredimo granu funkcije koja odgovara našem rešenju (9.1.48)). Nalazimo da su moduo i argument kompleksnog broja $z = x + i$

$$|x+i| = \sqrt{1+x^2}\,, \qquad \arg(x+i) = \varphi, \quad \varphi = \mathrm{arccot}\,x \,\in (0,\pi)\ . \tag{9.1.50}$$

Sve grane ove funkcije, prebrojane različitim k, su

$$(x+i)^{-1+2i\rho} = e^{(-1+2i\rho)\,\mathrm{Log}\,(x+i)} = e^{-\log\sqrt{1+x^2}-2\rho(\varphi+2k\pi)-i(\varphi+2k\pi-2\rho\log\sqrt{1+x^2})}\ . \tag{9.1.51}$$

Za rešenje biramo granu koja odgovara vrednosti $k = 0$,

$$\chi_0 = Ce^{-\log\sqrt{1+x^2}-2\rho\,\mathrm{arccot}\,x-i(\mathrm{arccot}\,x-2\rho\log\sqrt{1+x^2})}, \tag{9.1.52}$$

Moduo na kvadrat rešenja preko promenljivih x i φ je

$$\chi_0\chi_0^* = |C|^2\,e^{\log(1+x^2)^{-1}-4\rho\,\mathrm{arccot}\,x} = |C|^2\sin^2\varphi\,e^{-4\rho\varphi}, \tag{9.1.53}$$

gde je C konstanta koju određujemo iz sledećeg integrala prelazeći sa promenljive x na integraciju po promenljivoj φ,

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\chi_0\chi_0^* = |C|^2\int\limits_0^\pi d\varphi\,e^{-4\rho\varphi} = |C|^2\,\frac{1-e^{-4\pi\rho}}{4\rho}\ . \tag{9.1.54}$$

Dobija se da je

$$C = \sqrt{\frac{4\rho}{1-e^{-4\pi\rho}}}. \tag{9.1.55}$$

U koherentnom stanju χ_0 na sledeći način računamo očekivane vrednosti vremenske koordinate $\hat\eta = i\hbar\partial_x$,

$$\begin{aligned}\langle\chi_0|\hat\eta|\chi_0\rangle &= i\hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\chi_0^*\,\partial_x\chi_0 = (-1+2i\rho)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{x-i}{1+x^2}\,|\chi_0|^2\\ &= \frac{\hbar}{2}\,(-1+2i\rho)\,|C|^2\int\limits_0^\pi d\varphi\,(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi - 1)\,e^{-4\rho\varphi} = \frac{\hbar}{2}\ ,\end{aligned} \tag{9.1.56}$$

i prostorne koordinate $\hat x = i\hbar(x\partial_x - \tau)$,

$$\begin{aligned}\langle\chi_0|\hat x|\chi_0\rangle &= i\hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\chi_0^*\,x\,\partial_x\chi_0 + i\hbar\left(\frac12 - i\rho\right)\\ &= i\hbar(-1+2i\rho)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,x\,\frac{x-i}{1+x^2}\,|\chi_0|^2 + i\hbar\left(\frac12 - i\rho\right)\\ &= i\hbar\,(-1+2i\rho)|C|^2\int\limits_0^\pi d\varphi\,\left(\cos\varphi(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right)\,e^{-4\rho\varphi} + i\hbar\left(\frac12 - i\rho\right) = -\hbar\rho.\end{aligned} \tag{9.1.57}$$

Da bismo dobili neodređenosti koordinata, potrebne su i očekivane vrednosti

$$\langle\chi_0|\hat{\eta}^2|\chi_0\rangle = -\bar{k}^2\int dx\,\chi_0^*\,\partial_x^2\chi_0 = -\bar{k}^2\int dx\,\frac{d\chi_0^*}{dx}\,\frac{d\chi_0}{dx} = \frac{\bar{k}^2}{2}, \tag{9.1.58}$$

$$\langle\chi_0|\hat{x}^2|\chi_0\rangle = \int dx\,(\hat{x}\chi_0)^*(\hat{x}\chi_0) = \Big(\rho^2+\frac{1}{4}\Big)\,\bar{k}^2\ . \tag{9.1.59}$$

Neodređenosti koordinata u ovom stanju su

$$(\Delta\hat{\eta})_{|\chi_0\rangle} = \sqrt{\langle\hat{\eta}^2\rangle_{|\chi_0\rangle}-\langle\hat{\eta}\rangle^2_{|\chi_0\rangle}} = \frac{\bar{k}}{2}, \tag{9.1.60}$$

$$(\Delta\hat{x})_{|\chi_0\rangle} = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_{|\chi_0\rangle}-\langle\hat{x}\rangle^2_{|\chi_0\rangle}} = \frac{\bar{k}}{2}. \tag{9.1.61}$$

Ostala koherentna stanja dobijaju se delovanjem operatora grupe na $|\chi_0\rangle$,

$$|\lambda, b\rangle = \lambda^{\hat{p}_0}\ e^{b\hat{p}_1}\,|\chi_0\rangle\ . \tag{9.1.62}$$

Krenućemo od prostorne translacije, gde uvodimo oznaku $\hat{B}$,

$$\hat{p}_1 = \partial_x \equiv \hat{B}. \tag{9.1.63}$$

i razvijamo u red $e^{b\hat{p}_1}$. Zato je potrebno da vidimo kako stepeni od $\hat{p}_1$ deluju na osnovno koherentno stanje,

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1\,\chi_0(x) &= \frac{2\tau}{(x+i)}\,\chi_0(x),\\
\hat{p}_1^2\,\chi_0(x) &= \frac{2\tau(2\tau-1)}{(x+i)^2}\,\chi_0(x),\\
\hat{p}_1^n\,\chi_0(x) &= \frac{2\tau(2\tau-1)\dots(2\tau-n+1)}{(x+i)^n}\,\chi_0(x),
\end{aligned}$$

iz kojih zaključujemo

$$\begin{aligned}
e^{b\hat{p}_1}\,\chi_0(x) &= \sum\frac{b^n}{n!}\,\frac{2\tau(2\tau-1)\dots(2\tau-n+1)}{(x+i)^n}\,\chi_0(x) = \sum\binom{2\tau}{n}\,\frac{b^n}{(x+i)^n}\,\chi_0(x)\\
&= \Big(1+\frac{b}{x+i}\Big)^{2\tau} C(x+i)^{2\tau} = C(x+b+i)^{-1+i\rho} = \chi_0(x+b)\ .
\end{aligned} \tag{9.1.64}$$

Da bi se dobio izraz za vremensku translaciju tj. dilataciju, osim $\hat{B}$ uvodimo i operator $\hat{A}\equiv x\partial_x$, tako da su komutatori

$$[\hat{A},\hat{B}] = -\hat{B}, \qquad [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0, \qquad [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = \hat{B}, \qquad [\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] = -\hat{B}, \qquad \dots \tag{9.1.65}$$

Primenom BCH formule dobijamo

$$e^{c\hat{B}}\hat{A}e^{-c\hat{B}} = \hat{A}+[c\hat{B},\hat{A}]+\frac{1}{2}[c\hat{B},[c\hat{B},\hat{A}]]+\dots = \hat{A}+c\hat{B}\,, \tag{9.1.66}$$

$$e^{a\hat{A}}\hat{B}e^{-a\hat{A}} = \hat{B}+[a\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{2}[a\hat{A},[a\hat{A},\hat{B}]]+\dots = \Big(1-a+\frac{1}{2}a^2+\dots\Big)\,\hat{B} = e^{-a}\hat{B}. \tag{9.1.67}$$

Zatim, za nalaženje $e^{cB}e^{aA} = e^{cB}\left(1 + a\hat{A} + \frac{1}{2}a^2\hat{A}^2 + \dots\right)$, krećemo od (9.1.66),

$$\begin{aligned}
&e^{c\hat{B}}\hat{A} = (\hat{A} + c\hat{B})e^{c\hat{B}},\\
&e^{c\hat{B}}\hat{A}^2 = (\hat{A} + c\hat{B})e^{c\hat{B}}\hat{A} = (\hat{A} + c\hat{B})^2e^{c\hat{B}},\\
&\dots\\
&e^{c\hat{B}}\hat{A}^n = (\hat{A} + c\hat{B})^n e^{c\hat{B}},
\end{aligned}\tag{9.1.68}$$

i zaključujemo da je

$$e^{cB}e^{aA} = e^{a(A+cB)}e^{cB}. \tag{9.1.69}$$

Slično, da bismo našli $e^{aA}e^{cB} = e^{aA}\left(1 + c\hat{B} + \frac{1}{2}c^2\hat{B}^2 + \dots\right)$, polazimo od (9.1.67) i primenimo je nekoliko puta,

$$\begin{aligned}
&e^{a\hat{A}}\hat{B} = e^{-a}\hat{B}e^{a\hat{A}},\\
&e^{a\hat{A}}\hat{B}^2 = e^{-a}\hat{B}e^{a\hat{A}}\hat{B} = e^{-2a}\hat{B}^2e^{a\hat{A}},\\
&\dots\\
&e^{a\hat{A}}\hat{B}^n = e^{-na}\hat{B}^n e^{a\hat{A}}.
\end{aligned}\tag{9.1.70}$$

Dolazimo do izraza

$$e^{aA}e^{cB} = e^{e^{-a}\,cB}\,e^{aA}. \tag{9.1.71}$$

Dobijamo kako dilatacije deluju na osnovno koherentno stanje

$$\lambda^{p_0}\,\chi_0(x) = C\,e^{\log\lambda\,(-A+\tau)}\,e^{iB}\,x^{2\tau} = C\,\lambda^{\tau}\,e^{\lambda\,iB}e^{-\log\lambda\,A}\,x^{2\tau} = C\,\lambda^{\tau}\,e^{\lambda\,iB}e^{-\log\lambda\,2\tau}\,e^{-iB}\,(x+i)^{2\tau}$$

$$= C\,\lambda^{-\tau}\,e^{(\lambda i - i)B}\,\chi_0(x) = C\,\lambda^{\tau}\,(x+\lambda i)^{2\tau} = C\,\lambda^{\tau}\left(\frac{x}{\lambda} + i\right)^{2\tau}\ . \tag{9.1.72}$$

Ostala koherentna stanja su

$$\chi_{\lambda b}(x) = \lambda^{p_0}\,e^{bp_1}\,\chi_0(x) = \sqrt{\frac{4\rho}{1-e^{-4\pi\rho}}}\,\lambda^{-\frac{1}{2}+i\rho}\left(\frac{x+b}{\lambda} + i\right)^{-1+2i\rho}\ . \tag{9.1.73}$$

Želimo da nađemo očekivane vrednosti kordinata u ovim stanjima. Zapisujemo ih u Dirakovoj notaciji preko prethodno uvedenih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ kao,

$$|\lambda, b\rangle = \lambda^{-\hat{A}+\tau}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle, \qquad \langle\lambda, b| = \langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}\lambda^{\hat{A}+\tau^*+1}. \tag{9.1.74}$$

Krenimo od očekivane vrednosti vremena u koherentnom stanju,

$$\langle\lambda, b|\hat{\eta}|\lambda, b\rangle = i\hbar\langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}\lambda^{\hat{A}+\tau^*+1}\hat{B}\lambda^{-\hat{A}+\tau}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle = i\hbar\langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}e^{\log\lambda\hat{A}}\hat{B}\lambda^{-\hat{A}}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle =$$

$$i\hbar\langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}e^{-\log\lambda}\hat{B}e^{\log\lambda\hat{A}}\lambda^{-\hat{A}}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle = -i\frac{\hbar}{\lambda}\langle\chi_0|\hat{B}|\chi_0\rangle = -\frac{1}{\lambda}\langle\chi_0|\hat{\eta}|\chi_0\rangle = -\frac{\hbar}{2\lambda}. \tag{9.1.75}$$

U prvom redu smo iskoristili da je $\tau + \tau^* + 1 = 0$, zatim smo $\lambda^{\hat{A}}$ zapisali u eksponencijalnom obliku i primenili prvi od izraza iz (9.1.70). Na kraju smo dobili vezu sa očekivanom vrednošću u osnovnom koherentnom stanju. Slično se nalazi i očekivana vrednost prostorne koordinate,

$$\langle\lambda, b|\hat{x}|\lambda, b\rangle = i\hbar\langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}\lambda^{\hat{A}+\tau^*+1}\hat{A}\lambda^{-\hat{A}+\tau}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle - i\hbar\tau = i\hbar\langle\chi_0|e^{-b\hat{B}}\hat{A}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle - i\hbar\tau =$$

$$i\hbar\langle\chi_0|(\hat{A} - b\hat{B})e^{-b\hat{B}}e^{b\hat{B}}|\chi_0\rangle - i\hbar\tau = \langle\chi_0|\hat{x}|\chi_0\rangle - b\langle\chi_0|\hat{\eta}|\chi_0\rangle - i\hbar\tau = -\hbar\left(\rho + \frac{b}{2}\right), \tag{9.1.76}$$

gde smo se pozvali na prethodno pokazanu prvu od jednakosti iz (9.1.68) i očekivane vrednosti koordinata u osnovnom koherentnom stanju $|\chi_0\rangle$.

9.1.2 Očekivane vrednosti moda skalarnog polja u koherentnim stanjima

Želimo da izračunamo očekivanu vrednost moda (8.2.68) u koherentnim stanjima $|\lambda, b\rangle$,

$$\langle w\rangle_{|\lambda,b\rangle} = \langle\lambda, b|w|\lambda, b\rangle = \iint dz_L dz_R\, \langle\lambda, b|z_L\rangle\langle z_L|w|z_R\rangle\langle z_R|\lambda, b\rangle. \qquad (9.1.77)$$

U prethodnom izrazu smo dodali jedinice napisane preko z_L i z_R. Kako je $\langle z_R|\lambda, b\rangle$ višeznačna funkcija, potrebno je izabrati odgovarajuću granu kao kod (9.1.48),

$$\langle z_R|\lambda, b\rangle = C\,\lambda^{-\frac{1}{2}+i\rho}\, e^{-\log\sqrt{1+\left(\frac{z_R+b}{\lambda}\right)^2} - 2\rho\,\mathrm{arccot}\,\frac{z_R+b}{\lambda} - i\,\mathrm{arccot}\,\frac{z_R+b}{\lambda} + 2i\rho\log\sqrt{1+\left(\frac{z_R+b}{\lambda}\right)^2}}. \qquad (9.1.78)$$

Odavde kompleksnom konjugacijom i zamenom $z_R \to z_L$, lako dobijamo i $\langle\lambda, b|z_L\rangle$. Vraćanjem na (9.1.77) vidimo da integrali po z_L i z_R nisu laki za rešavanje. Potrebno je da se nađe adekvatna smena koordinata u kojima integrali mogu da se reše. Druga opcija je da se mode i koherentna stanja napišu u Furijeovom prostoru. Mode smo već u (8.2.71) napisali preko Furije transformisanih varijabli χ i ζ, tako da ostaje da se semiklasična stanja prebace u dualni prostor. Motivacija za sve ovo nam je formulisanje klasičnog limesa preko parametra reprezentacije ρ i nalaženje klasičnog limesa moda (9.1.77). Zamisao je da parametre λ i b izrazimo preko očekivanih vrednosti (9.1.75) i (9.1.76) kao

$$\lambda = -\frac{\not{k}}{2\,\langle\hat{\eta}\rangle_{|\lambda,b\rangle}}, \qquad b = -2\rho - 2\frac{\langle\hat{x}\rangle_{|\lambda,b\rangle}}{\not{k}} \qquad (9.1.79)$$

i zamenimo ih u mode prethodno izračunat izraz (9.1.77). Nakon toga treba da vidimo kako da definišemo komutativni limes preko parametra reprezentacije. Pretpostavka je da će to biti limes $\rho \to \pm\infty$.

9.2 Dvotačkasta funkcija

Dosadašnji rezultati mogu da se interpretiraju kao prvi koraci u formulaciji i analizi kvantne teorije polja na fazi dS prostoru. Dalje možemo da razmatramo kako da računamo korelacione funkcije, poput simetrične dvotačkaste funkcije iz komutativnog prostora (5.3.16) za koju smo pokazali kako se definiše. Ovde radimo sa modama dalamberijana na fazi dS_2. U poglavlju 8.3 smo pokazali da ih dobijemo iz (8.2.68) tako što kod zavisnosti od ξ napravimo sledeću smenu $(-\xi)^{i\omega-1} \to (-\xi)^{i\omega-\frac{1}{2}}$, pa su mode

$$w_{\omega,\kappa}(\xi, y) = \langle z_L|w_{\omega,\kappa}|z_R\rangle = (-\xi)^{i\omega-\frac{1}{2}}(y^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(y). \qquad (9.2.1)$$

Pošto je jednostavnije da radimo sa Beselovim umesto pridruženim Ležandrovim funkcijama, mode Furije transformišemo kao što smo to uradili sa modama laplasijana u (8.2.69). Zapravo, biramo da radimo sa linearnom kombinacijom Furije transformisanih moda,

$$\bar{g}_\omega(\zeta, \chi) = \zeta^{-\frac{1}{2}+i\omega}\chi^{\frac{1}{2}-i\omega}\Big(J_{iM}(2\chi) + J_{-iM}(2\chi)\Big)\,. \qquad (9.2.2)$$

Kvantno polje razvijamo po ovim modama,

$$\Phi = \int d\omega\,\left(a_\omega\bar{g}_\omega + a_\omega^\dagger\bar{g}_\omega^*\right)\,, \qquad (9.2.3)$$

zatim, kao u običnoj (komutativnoj) kvantnoj teoriji polja, funkcije u razvoju a_ω i $a_\omega^\dagger$ proglasimo operatorima kreacije i anhilacije koji deluju na Fokovom prostoru. Na ovakav način dolazimo do standardnog izraza za dvotačkastu funkciju

$$\begin{aligned}\langle\Phi_1\Phi_2\rangle &= \langle 0|\int d\omega_1\left(a_{\omega_1}\bar{g}_{\omega_1}+a^\dagger_{\omega_1}\bar{g}^*_{\omega_1}\right)\int d\omega_2\left(a_{\omega_2}\bar{g}_{\omega_2}+a^\dagger_{\omega_2}\bar{g}^*_{\omega_2}\right)|0\rangle \\ &= \iint d\omega_1 d\omega_2\ \bar{g}_{\omega_1}\bar{g}^*_{\omega_2}\langle 0|[a_{\omega_1},a^\dagger_{\omega_2}]|0\rangle = \int d\omega\ \bar{g}_\omega\bar{g}^*_\omega\ .\end{aligned} \tag{9.2.4}$$

Slično kao za mode, ovu dvotačkastu funkciju možemo da razmatramo preko njenih matričnih elemenata. Ako radimo u bazisu konformne koordinate, uz smenu

$$-\eta_L^{(1,2)} = \chi_{1,2}+\zeta_{1,2}\,,\quad -\eta_R^{(1,2)} = \chi_{1,2}-\zeta_{1,2}, \tag{9.2.5}$$

dolazimo do integrala koji možemo da rešimo

$$\langle -\eta_L^{(1)},-\eta_L^{(2)}|\langle\Phi_1\Phi_2\rangle|-\eta_R^{(1)},-\eta_R^{(2)}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \bar{g}^*_\omega\left(\zeta_1,\chi_1\right)\bar{g}_\omega\left(\zeta_2,\chi_2\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \zeta_1^{-1/2-i\omega}\chi_1^{-1/2+i\omega}\Big(J_{-iM}(2\chi_1)+J_{iM}(2\chi_1)\Big)\,\zeta_2^{-1/2+i\omega}\chi_2^{-1/2-i\omega}\Big(J_{iM}(2\chi_2)+J_{-iM}(2\chi_2)\Big).$$

Dobijamo dvotačkastu funkciju

$$\langle\Phi_1\Phi_2\rangle = \frac{2\pi}{\sqrt{\chi_1\chi_2\zeta_1\zeta_2}}\Big(J_{iM}(2\chi_1)+J_{-iM}(2\chi_1)\Big)\Big(J_{iM}(2\chi_2)+J_{-iM}(2\chi_2)\Big)\,\delta\Big(\frac{\chi_1\zeta_2}{\chi_2\zeta_1}-1\Big). \tag{9.2.6}$$

Za neki budući rad ostaje da se razmotre i dvotačkaste funkcije sa drugačijim izborom pozitivno-frekventnih moda. Ostaje otvoreno pitanje fizičkog značaja različitih izbora.

Još jedno interesantno pitanje koje ostavljamo za budući rad tiče se toga kako je ovaj izraz povezan sa kvantovanom dvotačkasnom funkcijom koja u Banč-Dejvisovom vakuumu glasi

$$\hat{G}_2 = \hat{G}_2(\hat\eta,\hat x,\hat\eta',\hat x') = \frac{\Gamma\left(\frac12+i\kappa\right)\Gamma\left(\frac12-i\kappa\right)}{4\pi}\ {}_2F_1\Big(\frac12+i\kappa,\frac12-i\kappa;1;\frac{1+\hat Z}{2}\Big)\,. \tag{9.2.7}$$

Veličina $\hat Z$ u (9.2.7) je kvantni analogon geodezijskog rastojanja između dve tačke koje smo uveli u (5.3.2). Odgovarajući operator se najprirodnije definiše koristeći simetrično uređenje,

$$\begin{aligned}\hat Z &= \frac12\left(\hat\eta\hat\eta'^{-1}+\hat\eta^{-1}\hat\eta'+2\hat y\hat y'-\hat\eta'^{-1}\{\hat\eta^{-1},\hat x^2\}-\hat\eta^{-1}\{\hat\eta'^{-1},\hat x'^2\}\right) \\ &= \frac{q}{q'}\partial_q^2+\frac{q'}{q}\partial_{q'}^2+\left(\frac32-\mathbb{A}\right)\left(\frac{1}{q'}\partial_q+\frac1q\partial_{q'}\right)+\frac{\frac12(q^2+q'^2)+\mathbb{A}(\mathbb{A}-1)+\frac34}{qq'}\ ,\end{aligned} \tag{9.2.8}$$

gde primovane i neprimovane veličine odgovaraju različitim tačkama pa međusobno komutiraju. Važan deo buduće analize su korelacione funkcije u četiri dimenzije pošto bi nas one približile poređenju sa astrofizičarskim posmatranjima. Tu bismo verovatno neke informacije dobili od dvotačkaste funkcije na „reheating" površi $\hat\eta=0$. Zbog fizičke interpretacije mislimo takođe je korisno da se nađu očekivane vrednosti korelacionih funkcija u semiklasičnim stanjima,

$$\langle\lambda_1,b_1|\Phi_1\Phi_2|\lambda_2,b_2\rangle,\qquad \langle\lambda_1,b_1|\hat G_2|\lambda_2,b_2\rangle, \tag{9.2.9}$$

i da se dobijeni izrazi uporede sa korelacionim funkcijama na komutativnom prostoru.

10 Rezime i zaključak

U ovoj tezi je analiziran fazi de Siterov prostor. Krajnji i dugoročni cilj je da se na njemu dođe do efekata koji su opservabilni u kosmologiji. Ovde ćemo da navedemo korake koji su do sada urađeni.

Zaključili smo da se ovaj prostor konzistentno definiše u dve i četiri dimenzije pomoću klasične simetrije korišćenjem odgovarajuće Lijeve algebre i ireducubilnih reprezentacija. Pored toga, znamo da je moguća konstrukcija i u tri dimenzije. Jedan od naših zadataka je bio da ispitamo geometriju ovih prostora. Došli smo do elemenata diferencijalne geometrije koristeći nekomutativni *frame* formalizam. Kako je ovaj formalizam formulisan po analogiji sa komutativnom verzijom, važna činjenica je da se dobija metrika koja ima dobar komutativni limes, kao i da Rimanov i Ričijev tenzor imaju isti oblik kao u komutativnom slučaju. U četiri dimenzije smo izneli dve mogućnosti za izbor diferencijalne geometrije. Prednost smo dali varijanti kod koje se broj dimenzija tangentnog prostora poklapa sa brojem dimenzija samog prostora. Model u dve dimenzije nam je važan. Iako nije trivijalan, jednostavniji je nego model u četiri dimenzije i može da posluži kao tzv. probni (pojednostavljeni) model. To je u velikoj meri sugerisalo kako određeni problem može da se reši u četiri dimenzije. Kao deo analize prostora, našli smo svojstvene funkcije laplasijana dobijenog iz *frame* formalizma u reprezentacijama $(\rho, s = 1/2)$ i $(\rho, s = 0)$ koji deluje na talasne funkcije, elemente prostora reprezentacije. Dobili smo da mu je spektar kontinualan i beskonačno degenerisan. Takođe smo identifikovali operator energije, našli svojstvene funkcije i zaključili da i on ima kontinualan spektar.

Kada smo ustanovili da su modeli fazi dS prostora sa geometrijskog aspekta dobro formulisani, želeli smo da vidimo da li na tim prostorima mogu da se uvedu polja. Razmatrali smo skalarno polje.

Prateći definiciju laplasijana iz *frame* formalizma dobili smo izraz koji nije hermitski. Simetrizacijom smo došli do hermitskog operatora koji bismo mogli da zovemo dalamberijan. Rešenje Klajn-Gordonove jednačine u Mojlanovoj reprezentaciji sa nehermitskim laplasijanom (dalamberijanom) je divergentno, za razliku od onog koje se dobija sa hermitskim operatorom. Kada se koristi reprezentacija iz konformne teorije polja, rešenja Klajn-Gordonove jednačine (preko kernela) sa laplasijanom i dalamberijanom su konačna i vrlo slična. Možemo da zaključimo da u zavisnosti od reprezentacije u kojoj radimo biramo koji ćemo od operatora da koristimo. Prednost dajemo diferencijalnom operatoru kod koga su odgovarajuća rešenja Klajn-Gordonove jednačine normalizabilna.

Zbog kasnijeg poređenja, analizirali smo i laplasijan na komutativnom d-dimenzionom de Siterovom prostoru koji komutira sa izometrijama dS_d prostora pa nosi reprezentaciju $SO(1,d)$ grupe. Njega smo dobili na osnovu izraza iz klasične gravitacije. Našli smo izraze za laplasijan u dva koordinatna sistema: u Poenkareovim koordinatama (η, x^i) koje pokrivaju polovinu dS_d prostora sa $\eta \in (-\infty, 0)$ i koordinatama (η, y^i) koje su motivisane nekomutativnošću, a dobijene su smenom iz Poenkareovih. Zatim smo u ova dva koordinatna sistema rešavali Klajn-Gordonovu jednačinu kako bismo dobili mode realnog skalarnog polja. Na osnovu ponašanja skalarnog polja u kasnim vremenima, $\eta \to 0$, zaključili smo da svaka od komponenti $\Phi^{\pm}(\mathrm{x}^i)$

parametrizuje jednu od dve ireducibilne reprezentacije koje su izomorfne jedna drugoj. Ovom asimptotikom smo uspeli da pojednostavimo skalarni proizvod koji se računa kao integral po Košijevoj površi prostornog tipa $\eta = \text{const}$. Sam skalarni proizvod ne zavisi od izbora površi, tako da smo izabrali $\eta \to 0$.

U Poenkareovim koordinatama smo našli dva tipa moda koje definišu različite vakuume. Razlika je u izboru vremenskog dela rešenja, gde u zavisnosti od toga kakvo ponašanje želimo u $\eta \to \infty$ ili $\eta \to 0$ biramo Hankelove ili Beselove funkcije. Kod Banč-Dejvisovog vakuuma, koji je poznat i važan u kosmologiji, uzimaju se Hankelove funkcije $H^{(1/2)}_{\pm i\kappa}(-k\eta)$ zbog odgovarajućeg ponašanja u dalekoj prošlosti $\eta \to \infty$ i za velike vrednosti impulsa $k \to \infty$. Ove mode, sa oznakom $\{u^{BD}_{k,\lambda,\kappa}\}$, se u dalekoj prošlosti ponašaju kao da krivina ne postoji, tj. poklapaju se sa modama u prostoru Minkovskog. Kod drugog izbora u vremenskom delu rešenja figurišu Beselove funkcije $J_{\pm i\kappa}(-k\eta)$ zbog adekvatnog ponašanja u $\eta \to 0$. Tu smo dobili mode $\{u_{k,\lambda,\kappa}\}$ koje formiraju skup pozitivno-frekventnih rešenja koja pripadaju jednoj ireducibilnoj reprezentaciji, a njihovom kompleksnom konjugacijom se dobija skup negativno-frekventnih moda koje pripadaju drugoj ireducibilnoj reprezentaciji (i ortogonalne su na skup pozitivno-frekventnih moda). Na ovaj način smo dobili mode pogodne za kvantizaciju. Vakuum definisan ovim izborom je $SO(1,d)$ invarijantan. Štaviše, dobili smo da, kada jedan od ovih skupova moda razvijemo po drugom, koeficijenti u razvoju su konstante. Iz toga zaključujemo da su oba vakuuma, definisana ovim skupovima moda, $SO(1,d)$ invarijantna i da pripadaju tzv. familiji α-vakuuma.

Rešili smo i (komutativnu) Klajn-Gordonovu jednačinu u novim koordinatama $(\eta, \mathtt{y}^i)$ koje smo dobili smenom $\mathtt{y}^i = \mathtt{x}^i/\eta$. Motivaciju za korišćenje ovih koordinata smo dobili iz operatorskog rešavanja svojstvenog problema fazi laplasijana. Pored toga, u kosmologiji se $\mathtt{y}^i = a(\eta)\mathtt{x}^i$ (ovde je faktor skaliranja $a(\eta) = 1/\eta$) naziva fizičko rastojanje i koristi za računanje opservabilnih efekata. Slično kao kod izbora moda $u_{k,\lambda,\kappa}$, ovde smo izabrali rešenje koje ima odgovarajuću asimptotiku u limesu $\eta \to 0$. Dobili smo da je skup pozitivno-frekventnih moda $\{v_{\omega,\lambda,\kappa}\}$ linearna kombinacija pozitivno-frekventnih moda $\{u_{k,\lambda,\kappa}\}$, tako da ova dva skupa definišu isti vakuum, koji je različit od Banč-Dejvisovog. Takođe smo, inverznom Bogoljubovljevom transformacijom, došli do Banč-Dejvisovog vakuuma u koordinatama $(\eta, \mathtt{y}^i)$. Očigledno je da su vakuumi definisani pomenutim skupovima moda de Siter invarijantni.

Mode koje smo dobili na komutativnom de Siterovom prostoru u d dimenzija su pogodne za kvantizaciju. Pomoću njih bi mogla da se izračuna dvotačkasta funkcija, što podrazumeva da se proizvod moda integrali po svim kvantnim brojevima. U koordinatama $(\eta, \mathtt{y}^i)$ je to komplikovano (čak i u slučaju $d = 2$) jer su mode date preko hipergeometrijske funkcije. Ostaje mogućnost da se problem reši numerički.

Rešili smo i Klajn-Gordonovu jednačinu na fazi dS_2 i dS_4 operatorski, nezavisno od reprezentacije, gde je skalarno polje $\Phi(\hat{x}^\mu)$ funkcija nekomutativnih koordinata. Ova operatorska jednačina je u opštem slučaju vrlo teška za rešavanje. Zaključili smo da ako pređemo na koordinate $(\hat{\eta}, \hat{y})$, zatim pretpostavimo da možemo da rešimo problem tako što razdvojimo promenljive i ako fiksiramo uređenje tj. redosled promenljivih, onda je to uređenje očuvano. Na taj način smo došli do diferencijalne jednačine koja ima isti oblik kao u komutativnom slučaju u koordinatama $(\eta, \mathtt{y})$. Time smo odredili mode u nekomutativnom slučaju. Da naglasimo da je u četiri dimenzije rešavanje komplikovanije, pošto su komutatori između operatora $\hat{y}^i$ dosta komlikovani, ali smo uspeli da pokažemo da je rešenje ekvivalentno onom koje smo prethodno dobili u komutativnom slučaju.

Pored eksplicitne kvantizacije komutativnog rešenja koje smo iznad izneli, glavni rezultat rada je bio konstrukcija *kompletnog skupa* rešenja Klajn-Gordonove jednačine na fazi dS prostoru. Kako bismo našli sve mode fiksirali smo reprezentaciju de Siterove grupe i rešili Klajn-Gordonovu jednačinu kao diferencijalnu jednačinu preko komutativnih varijabli. Reprezentacija koju smo koristili se standardno koristi u konformnoj teoriji polja i pripada glavnoj unitarnoj seriji i označena je sa (κ, s). Kako fazi laplasijan ne zavisi od s, onda rezultati imaju degeneraciju koja potiče od spina. Prvo smo našli matrične elemente, u svojstvenom bazisu konformne koorodinate, moda u dve dimenzije $\hat{v}_{\omega,\kappa}$, do kojih smo došli operatorskim metodom rešavanja. Taj bazis je pogodan jer to znači da smo zapravo prešli u Furijeov prostor gde je konformno vreme multiplikativna koordinata. Dobijeni matrični element zadovoljava Klajn-Gordonovu jednačinu u Furijeovom prostoru. U četiri dimenzije problem može da se formuliše i u velikoj meri reši za skalarne mode $(l = m = 0)$. Preostalo je da se nađe rešenje integrala proizvoda tri specijalne funkcije. Pretpostavka je da je moguće da se reši numerički. U dvodimenzionom slučaju smo prokomentarisali komutativni limes $\bar{k} \to 0$ kod matričnog elementa komutatora dve funkcije, od kojih jedna zavisi samo od $\hat{\eta}$, a druga samo od $\hat{y}$. Videli smo pod kojim uslovima matrični element ovog komutatora teži nuli.

Na kraju smo iskoristili eksplicitnu realizaciju algebre fazi koordinata $\mathcal{A} \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ čiji su elementi vektorske funkcije dve promenljive $f^a{}_b(z_L^i, z_R^j)$. Na ovaj način smo napisali laplasijan i došli do odgovarajućih fazi harmonika. Ako izuzmemo diskretnu strukturu koju nose indeksi a, b, dobijamo rešenja koja su uz odgovarajuću smenu identična modama $v_{\omega,l,\vec{m},\kappa}$. Njih smo dobili u komutativnom slučaju radeći u koodinatama $(\eta, \rho, \theta_\mathrm{a})$, gde su sferne koordinate ρ, θ_a konstruisane od y^i. Uzimajući sve u obzir, nekomutativno rešenje u slučaju $d > 2$ ima više stepeni slobode nego klasični analogon. Sa druge strane, variranjem dejstva realnog skalarnog polja, došli smo do operatora kod koga ne postoji linearni član (kao što smo već pomenuli njega zovemo dalamberijan). Našli smo da su mode dosta slične modama laplasijana. Skupovi moda oba diferencijalna operatora dobijenih na ovaj način su kompletni skupovi fazi harmonika.

U poslednjoj glavi smo razradili dalje pravce istraživanja. Definisali smo skup semiklasičnih stanja na dS_2. Pokazali smo kako bismo mogli da nađemo očekivane vrednosti moda sa idejom da parametre koherentnih stanja izrazimo preko očekivanih vrednosti prostorne i vremenske koordinate i da nakon toga vidimo kako se definiše klasični limes preko parametra reprezentacije. Takođe je plan da se izračunaju dvotačkaste funkcije koristeći različite mode iz ove teze da bi se utvrdio njihov fizički značaj. Jedan od načina je da se očekivane vrednosti moda (nađenih preko integralnih kernela) u semiklasičnim stanjima iskoriste za računanje dvotačkastih funkcija, da se nađe klasičan limes tih funkcija i da se rezultati uporede sa komutativnim dvotačkastim funkcijama i astrofizičarskim posmatranjima.

Krajnji zaključak je da su razmatrani kosmološki modeli fazi dS_2 i dS_4 dobri i da postoji mogućnost da se pomoću njih dođe do opservabilnih rezultata u kosmologiji. Na taj način bi mogle da se vide korekcije od nekomutativne geometrije i kvantne gravitacije. Kao što smo već pomenuli, model u dve dimenzije je važan kao probni model, koji može da sugeriše kako se rešavaju realističniji problemi sa modelom u četiri dimenzije. Potvrdili smo da je korisno da se oslonimo na simetriju. Posebno je važna teorija reprezentacija pomoću koje smo došli do velikog broja rezultata. Da napomenemo da je matematika koja stoji u pozadini sprovedenih računa komplikovana i da je naša pretpostavka da bi dalji rad doprineo i njenom razvoju. Pored toga, nastavak ovog rada bi mogao da se sprovede numerički na mestima koja nisu mogla da se reše analitički.

A Dodaci

A.1 De Siterov prostor

Ovaj dodatak posvećujemo de Siterovom prostoru stavljajući akcenat na koordinatne sisteme koji se najviše koriste, [87], [88].

Maksimalan broj izometrija četovorodimenzionog prostorvremena je 10. Prostore sa maksimalnim brojem izometrija zovemo maksimalno simetrični. Za njih je karateristično da im je skalarna krivina R konstanta, a Rimanov tenzor krivine je oblika $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{12}R(g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}\, g_{\beta\gamma})$. Prostor sa $R = 0$ je prostor Minkovskog (M_4), sa $R > 0$ de Siterov prostor (dS_4) i sa $R < 0$ anti de Siterov prostor (AdS_4). Ova tri prostorvremena sa konstantnom krivinom su konformno ravna rešenja vakuumskih Ajnštajnovih jednačina sa kosmološkom konstantom Λ koja je, redom, nula, pozitivna i negativna. U ovom poglavlju ćemo razmatrati slučaj pozitivne kosmološke konstante. Vrlo brzo nakon što je de Siter našao ovo rešenje (1917.) shvaćeno je da se ova mnogostrukost može vizualizovati kao hiperboloid

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = \alpha_{\mathrm{dS}}^2, \qquad \text{sa} \qquad \alpha_{\mathrm{dS}} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \tag{A.1.1}$$

uronjen u ravan petodimenzioni prostor Minkovskog

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2. \tag{A.1.2}$$

Ova geometrijska reprezentacija de Siterovog prostora je povezana sa simetrijom desetoparametarske grupe $SO(1,4)$. Ceo hiperboloid se najprirodnije pokriva koordinatama (t, χ, θ, ϕ) takvim da

$$X_0 = \alpha_{\mathrm{dS}} \sinh \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}}, \tag{A.1.3}$$

$$X_1 = \alpha_{\mathrm{dS}} \cosh \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}} \cos\chi, \tag{A.1.4}$$

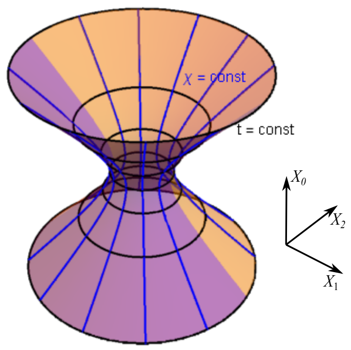
$$X_2 = \alpha_{\mathrm{dS}} \cosh \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}} \sin\chi \cos\theta, \tag{A.1.5}$$

$$X_3 = \alpha_{\mathrm{dS}} \cosh \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}} \sin\chi \sin\theta \cos\phi, \tag{A.1.6}$$

$$X_4 = \alpha_{\mathrm{dS}} \cosh \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}} \sin\chi \sin\theta \sin\phi. \tag{A.1.7}$$

U ovim koordinatama metrika de Siterovog prostora ima FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) oblik sa prostornom krivinom $k = +1$,

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha_{\mathrm{dS}}^2 \cosh^2 \frac{t}{\alpha_{\mathrm{dS}}} \left(d\chi^2 + \sin^2\chi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right). \tag{A.1.8}$$



Slika A.1: Vizuelizacija de Siterovog prostorvremena kao hiperboloida koji je uronjen u ravno petodimenziono prostovreme. Ovde je parametrizacija data u globalnim koordinatama (t, χ, θ, ϕ). Nacrtana je površ za $X_3 = X_4 = 0$. Vrednosti $X_2 > 0$ odgovaraju situaciji kada je $\theta = 0$ i one predstavljaju deo hiperboloida koji je obojen u narandžastu boju. Ljubičastom bojom su predstavljene vrednosti $X_2 < 0$ koje se dobijaju za $\theta = \pi$. Kada se uvede i opseg uglova θ i ϕ, svaka tačka na hiperboloidu predstavlja odgovarajuću dvodimenzionalnu hemisferu, u skladu sa tim da li je $\theta < \frac{\pi}{2}$ ili $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Za $t \in (-\infty, \infty)$, $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ i $\phi \in [0, 2\pi)$ koordinate pokrivaju ceo prostor iako postoje trivijalni koordinatni singulariteti u $\chi = 0, \pi$ i $\theta = 0, \pi$ koji odgovaraju lokacijama polova u sfernim koordinatama. Vizuelizacija de Siter hiperboloida ilustrovana je na slici A.1. Prostorni preseci za $t = const$ su 3-sfere konstantne pozitivne krivine čiji su poluprečnici $\alpha_{\text{dS}} \cosh \frac{t}{\alpha_{\text{dS}}}$. Zaključujemo da de Siterov prostor ima topologiju $R^1 \times S^3$.

Ako uvedemo konformno vreme izrazom

$$\sin \eta = \cosh^{-1} \frac{t}{\alpha_{\text{dS}}}, \tag{A.1.9}$$

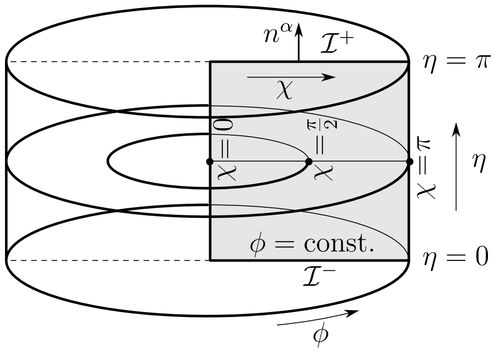
metrika (A.1.8) postaje

$$ds^2 = \frac{\alpha_{\text{dS}}^2}{\sin^2 \eta} \left(-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right). \tag{A.1.10}$$

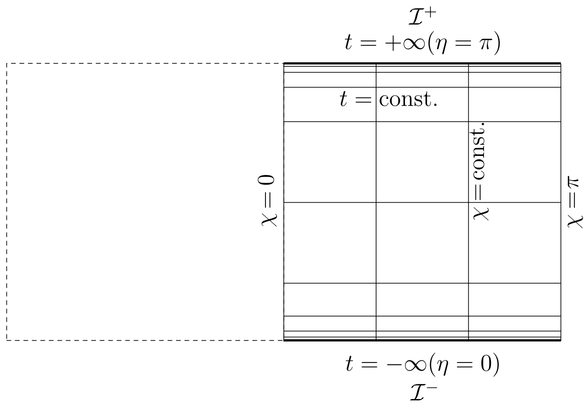
Dobija se da je de Siterovo prostorvreme konformno Ajnštajnovom statičkom svemiru sa konformnim faktorom $\Omega = \sin \eta$, definisanim kao (4.2.1). Granica prostora $\Omega = 0$ se nalazi u $\eta = 0$ i $\eta = \pi$ što odgovara prošloj i budućoj konformnoj beskonačnosti $\mathcal{I}^-$ i $\mathcal{I}^+$, redom, kao što je ilustrovano na slici A.2. Za razliku od prostora Minkovskog beskonačnosti $\mathcal{I}^-$ i $\mathcal{I}^+$ su prostornog tipa. Dvodimenzini Penrouzov dijagram de Siterovog prostora prikazan je na slici A.3 i on odgovara osenčenom delu na slici A.2, gde je $\theta = \frac{\pi}{2}$ i $\phi = const$. Isprekidanim linijama je označen kompletan presek koji se dobija rotacijom oko $\chi = 0$.

Koordinatni sistem koji se često koristi (T, R, θ, ϕ) uvodi se na sledeći način

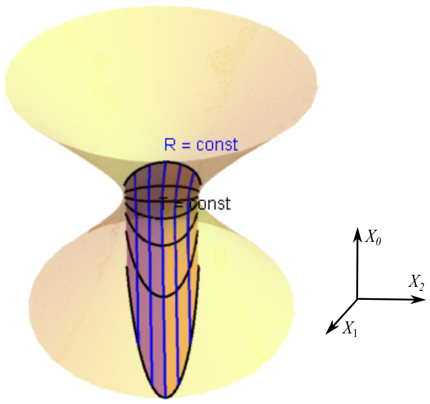
$$\begin{aligned}
X_0 &= \sqrt{\alpha_{\text{dS}}^2 - R^2} \, \sinh \frac{T}{\alpha_{\text{dS}}}, \\
X_1 &= \sqrt{\alpha_{\text{dS}}^2 - R^2} \, \cosh \frac{T}{\alpha_{\text{dS}}}, \\
X_2 &= R \cos \theta, \\
X_3 &= R \sin \theta \cos \phi, \\
X_4 &= R \sin \theta \sin \phi,
\end{aligned} \tag{A.1.11}$$



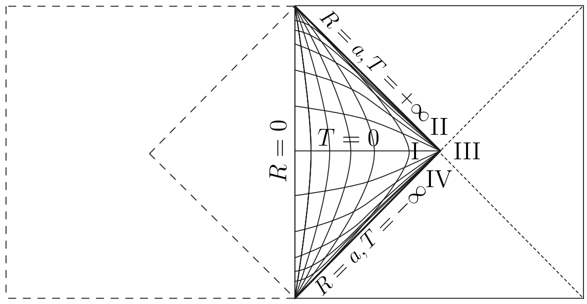
Slika A.2: Konformna struktura de Siterovog prostorvremena sa $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ceo de Siterov prostor je konforman oblasti $\eta \in (0, \pi)$ Ajnštajnovog statičkog svemira, predstavljen kao cilindar čiji su i poluprečnik i visina jednaki π. Centar $\chi = 0$ reprezentuje severni pol 3-sfere S^3, a spoljna granica $\chi = \pi$ predstavlja južni pol.



Slika A.3: Penrouzov dijagram de Siterovog prostora odgovara osenčenom delu (A.2) za neku fiksnu vrednost ugla ϕ iz opsega $[0, 2\pi)$. Uzimajući sve moguće vrednosti θ i ϕ u obzir svaka tačka na prikazanom kvadratu predstavlja 2-sferu poluprečnika $\sin \chi$. Za $\chi = 0$ i $\chi = \pi$ ovo su pojedinačne tačke, tj. polovi sfere S^3.



Slika A.4: De Siterov hiperboloid u sfernim koordinatama (T, R, θ, ϕ). Tačke za koje je $X_2 > 0$ odgovaraju polu $\theta = 0$ i obojene su narandžastom bojom, dok su one sa $X_2 < 0$ obojene u ljubičasto i predstavljaju suprotan pol $\theta = \pi$. Svetložutom bojom je predstavljen ceo hiperboloid koji se pokriva u globalnim koordinatama (A.1.7).



Slika A.5: Penrouzov dijagram de Siterovog prostora u statičkim sferno-simetričnim koordinatama. Svaka tačka predstavlja 2-sferu u (θ, ϕ) koordinatama.

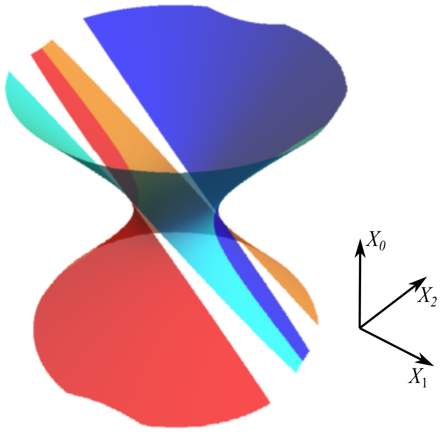
gde su kordinate u intervalima $T \in (-\infty, \infty)$, $R \in [0, \alpha_{\rm dS})$, $\theta \in [0, \pi]$ i $\phi \in [0, 2\pi)$. One pokrivaju deo de Siterovog prostora, što je ilustrovano na slici A.4. Primećujemo da su oblasti prostornog tipa $T = const$ preseci takvi da je $\frac{X_0}{X_1} = \tanh \frac{T}{\alpha_{\rm dS}}$ i $R = const$ su vertikalne hiperbole $X_1^2 - X_0^2 = \alpha_{\rm dS}^2 - R^2$ koje za $R = \alpha_{\rm dS}$ postaju prave svetlosnog tipa. U ovim koordinatama metrika je

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) dT^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right)^{-1} dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \qquad \text{(A.1.12)}$$

Interesantno je da ova metrika takođe opisuje anti de Siterov prostor kada je $\Lambda < 0$ i prostor Minkovskog za $\Lambda = 0$. Za $R < \alpha_{\rm dS} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ metrika je statička. Kada primenimo transformaciju $R = \alpha_{\rm dS} \sin\tilde{\chi}$ u prethodnom izrazu za metriku, dobija se

$$ds^2 = -\cos^2\tilde{\chi}\, dT^2 + \alpha_{\rm dS}^2 \left(d\tilde{\chi}^2 + \sin^2\tilde{\chi}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right). \qquad \text{(A.1.13)}$$

Odavde se vidi da je svaki presek $T = const$ 3-sfera konstantnog radijusa $\alpha_{\rm dS}$. Na slici A.5 je prikazan Penrouzov konformni dijagram u (T, R, θ, ϕ) koordinatama. Na ovoj slici, konformni prostor je podeljen na četiri oblasti označene brojevima I-IV. U intervalu $R \in [0, \alpha_{\rm dS})$ statičke koordinate pokrivaju samo oblast I što odgovara četvrtini de Siterovog prostora. Međutim, moguće je da se koordinate (A.1.12) prošire izvan granice $R = \alpha_{\rm dS}$ u nestatičke oblasti II i IV u kojima $R > \alpha_{\rm dS}$ postaje vremenska, a T prostorna koordinata. Da bi se pokrio ceo de Siterov prostor treba zapravo razmotriti četiri skupa koordinata (A.1.11) kod kojih je $T \in (-\infty, \infty)$, a faktor $\sqrt{\alpha_{\rm dS}^2 - R^2}$ je potrebno zameniti sa $\pm\sqrt{|\alpha_{\rm dS}^2 - R^2|}$. Oblasti I i III su pokrivene sa $R \in (0, \alpha_{\rm dS})$, dok su delovi II i IV pokriveni $R \in (\alpha_{\rm dS}, \infty)$. Ova dva para oblasti (I, III i II, IV) se razlikuju po znaku $\pm$ i kod drugog para je funkcija sinh zamenjena sa cosh. Hiperpovrš svetlosnog tipa $R = \alpha_{\rm dS}$ formira kosmološki horizont de Siterovog svemira. Geometrijski gledano, to je Kilingov horizont pošto je na toj hiperpovši Kilingov vektor ∂_T nula. Prisustvo ovog horizonta je posledica činjenice da se de Siterov svemir širi toliko brzo da postoje događaji koji nikad neće biti viđeni od strane posmatrača u $R = 0$.



Slika A.6: Prikazani hiperboloid je isti kao na slici A.1 samo u koordinatama $(\eta, \mathtt{x}^1)$. Uzimanjem $\mathtt{x}^2, \mathtt{x}^3 = 0$ smo sklonili zavisnost od X_3 i X_4. Boje na slici se razlikuju u zavisnosti od znaka koordinata η i $\mathtt{x}^1$. Oblast $\eta, \mathtt{x}^1 > 0$ je plava; $\eta > 0, \mathtt{x}^1 < 0$ tirkizna; $\eta < 0, \mathtt{x}^1 > 0$ crvena i $\eta, \mathtt{x}^1 < 0$ narandžasta.

Dekartove koordinate $(\eta, \mathtt{x}^i)$, sa $i = 1, 2, 3$ se uvode smenom

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\alpha_{\mathrm{dS}}^2 - \eta^2 + (\mathtt{x}^i)^2}{2\eta}, \\ X_1 &= \frac{\alpha_{\mathrm{dS}}^2 + \eta^2 - (\mathtt{x}^i)^2}{2\eta}, \\ X_2 &= \alpha_{\mathrm{dS}} \frac{\mathtt{x}^1}{\eta}, \\ X_3 &= \alpha_{\mathrm{dS}} \frac{\mathtt{x}^2}{\eta}, \\ X_4 &= \alpha_{\mathrm{dS}} \frac{\mathtt{x}^3}{\eta}, \end{aligned} \tag{A.1.14}$$

i sve koordinate su u intevalu $\eta, \mathtt{x}^i \in (-\infty, \infty)$, što je ilustrovano na slici A.6. U njima je metrika de Siterovog prostora

$$ds^2 = \frac{\alpha_{\mathrm{dS}}^2}{\eta^2} \left(-d\eta^2 + (d\mathtt{x}^i)^2\right), \tag{A.1.15}$$

pa se eksplicitno vidi da je konformno ravna. Ova metrika je zapravo (5.2.1) za $d = 4$ koju koristimo u radu (deo $\eta < 0$) i oznake su u skladu sa tim. Prostorni preseci $\eta = const$ imaju nultu krivinu pa su neograničeni. Zatim, de Siterov svemir se smenom $\eta = \alpha_{\mathrm{dS}}\, e^{-\frac{t_0}{\alpha_{\mathrm{dS}}}}$ u (A.1.15) može izraziti kao eksponencijalno širenje FLRW metrike sa prostornom krivinom $k = 0$,

$$ds^2 = -dt_0^2 + e^{2\frac{t_0}{\alpha_{\mathrm{dS}}}} (d\mathtt{x}^i)^2. \tag{A.1.16}$$

Međutim, za $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ ova metrika poktiva samo pola mnogostrukosti (A.1.1) na kojoj je $X_0 + X_1 > 0$ tj. $\eta > 0$. Drugi skup koordinata (t_0^*, x, y, z) je neophodan da bi pokrio $X_0 + X_1 < 0$. Taj skup se dobija za $\eta = -\alpha_{\mathrm{dS}}\, e^{-\frac{t_0^*}{\alpha_{\mathrm{dS}}}}$. Metrika (A.1.16) de Siterovog prostora se razmatra u jednostavnim modelima kosmologije.

A.2 Specijalne funkcije

Ovo poglavlje posvećujemo definiciji i osobinama specijalnih funkcija koje smo koristili u radu. Oslanjamo se na sledeće reference [89], [68], [90].

A.2.1 Beselove funkcije

Beselove funkcije su rešenja diferencijalne jednačine

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0. \tag{A.2.1}$$

Rešenja su analitičke funkcije po $z \in \mathbb{C}$, osim u tački grananja $z = 0$ za $\nu \notin \mathbb{Z}$, sa zasekom u intervalu $(-\infty, 0]$. Specijalni tipovi Beselovih funkcija su Beselove funkcije prve vrste $J_{\pm\nu}(z)$, druge vrste $Y_\nu(z)$, koje se takođe zovu Nojmanove i označavaju kao $N_\nu(z)$, i treće vrste $H_\nu^{(1)}(z)$ i $H_\nu^{(2)}(z)$, tzv. Henkelove funckije. Kada je ν nije ceo broj, rešenja $J_\nu(z)$ i $J_{-\nu}(z)$ su linerano nezavisna, dok su $J_\nu(z)$ i $Y_\nu(z)$, kao i $H_\nu^{(1)}(z)$ i $H_\nu^{(2)}(z)$, linearno nezavisni za sve vrednosti ν. Vronskijani su

$$W\{J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\} = J_{\nu+1}(z)J_{-\nu}(z) + J_\nu(z)J_{-(\nu+1)}(z) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}, \tag{A.2.2}$$

$$W\{J_\nu(z), Y_\nu(z)\} = J_{\nu+1}(z)Y_\nu(z) - J_\nu(z)Y_{\nu+1}(z) = -\frac{2}{\pi z}, \tag{A.2.3}$$

$$W\{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\} = H_{\nu+1}^{(1)}(z)H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(1)}(z)H_{\nu+1}^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z}. \tag{A.2.4}$$

Ove funkcije su međusobno povezane na sledeći način

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = \frac{i}{\sin\nu\pi}(e^{-\nu\pi i}J_\nu - J_{-\nu}), \tag{A.2.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = \frac{i}{\sin\nu\pi}(J_{-\nu} - e^{\nu\pi i}J_\nu). \tag{A.2.6}$$

Pored ovih, korsine su i veze

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z), \qquad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z). \tag{A.2.7}$$

Kada $z \to 0$ funkcije se ponašaju kao

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \qquad \nu \neq -1, -2, \ldots \tag{A.2.8}$$

$$Y_0(z) \sim -iH_0^{(1)}(z) \sim iH_0^{(2)}(z) \sim \frac{2}{\pi}\log z, \tag{A.2.9}$$

$$Y_\nu(z) \sim -iH_\nu^{(1)}(z) \sim iH_\nu^{(2)}(z) \sim -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > 0. \tag{A.2.10}$$

Za $|z| \to \infty$ asimptotika je sledeća

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\Big(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\Big), \qquad |\arg z| < \pi, \tag{A.2.11}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\Big(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\Big), \qquad |\arg z| < \pi, \tag{A.2.12}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)}, \qquad -\pi < \arg z < 2\pi, \tag{A.2.13}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)}, \qquad -2\pi < \arg z < \pi. \tag{A.2.14}$$

Ortogonalnost Beselovih funkcija se vidi iz sledećih integrala

$$\int_0^\infty dx\, x^{-1} J_{\nu+2l+1}(x) J_{\nu+2m+1}(x) = \frac{1}{2\,(2l+\nu+1)}\delta_{lm}, \tag{A.2.15}$$

$$\int_0^\infty dx\, x\, J_\nu(kx) J_\nu(k'x) = \frac{1}{k}\delta(k-k'). \tag{A.2.16}$$

Zadovoljene su sledeće rekurente relacije

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1} - \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \tag{A.2.17}$$

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} J_\nu(z). \tag{A.2.18}$$

Modifikovane Beselove funkcije $I_{\pm\nu}(z)$ i $K_\nu(z)$ su rešenja diferencijalne jednačine

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0. \tag{A.2.19}$$

One su regularne funkcije po z sa zasekom duž negativnog dela realne ose i za fiksno $z \neq 0$ one su holomorfne funkcije po ν na celoj kompleksnoj ravni. Rešenja $I_{+\nu}(z)$ i $I_{-\nu}(z)$ su linearno nezavisna osim kada je $\nu \in \mathbb{Z}$. Ova rešenja su međusobno povezana preko

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \tag{A.2.20}$$

a vronskijani su

$$W\{I_\nu(z), I_{-\nu}(z)\} = I_\nu(z) I_{-(\nu+1)}(z) - I_{\nu+1}(z) I_{-\nu}(z) = -2\frac{\sin\nu\pi}{\pi z}, \tag{A.2.21}$$

$$W\{K_\nu(z), I_\nu(z)\} = I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}. \tag{A.2.22}$$

Za fiksno ν i $|z| \to \infty$, modifikovane Beselove funkcije se ponašaju kao

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \tag{A.2.23}$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \qquad |\arg z| < \frac{3\pi}{2}, \tag{A.2.24}$$

dok se za male vrednosti $z \to 0$ i fiksno ν ponašaju kao

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \qquad \nu \neq -1, -2, \ldots \tag{A.2.25}$$

$$K_0(z) \sim -\log z, \tag{A.2.26}$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > 0. \tag{A.2.27}$$

Važi relacija ortogonalnosti, [91],

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} K_{i\kappa}(x) K_{i\kappa'}(x) = \frac{1}{\kappa \sinh \pi\kappa} \left(\delta(\kappa - \kappa') + \delta(\kappa + \kappa')\right). \tag{A.2.28}$$

A.2.2 Hipergeometrijska funkcija

Hipergeometrijska funkcija ${}_2F_1(a, b; c; z)$, koju zbog jednostavnosti zapisa pišemo kao $F(a, b; c; z)$, definisana je pomoću Gausovog razvoja u red

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{A.2.29}$$

na disku $|z| < 1$, a pomoću analitičkog produženja i van ovog intervala. Red se unutar jediničnog kruga $|z| = 1$ ponaša na sledeći način:

- divergira za $\mathrm{Re}\,(c - a - b) \leq -1$;
- apsolutno konvergira za $\mathrm{Re}\,(c - a - b) > 0$;
- uslovno konvergira za $-1 < \mathrm{Re}\,(c - a - b) \leq 0$.

Specijalna vrednost za $z = 1$ je

$$F(a, b; c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \qquad c \neq 0, -1, -2, \ldots, \qquad \mathrm{Re}\,(c - a - b) > 0. \tag{A.2.30}$$

Navešćemo neke od transformacija ove funkcije koje smo koristili su radu. Za ispitivanje ponašanja funkcije oko $z = 1$ i $z = \infty$ korisne su nam naredne veze

$$\begin{aligned} F(a, b; c, z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a)}{\Gamma(b)\Gamma(c - a)} (-z)^{-a} F(a, 1 - c + a; 1 - b + a; \frac{1}{z}) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a - b)}{\Gamma(a)\Gamma(c - b)} (-z)^{-b} F(b, 1 - c + b; 1 - a + b; \frac{1}{z}), \qquad |\arg(-z)| < \pi; \end{aligned} \tag{A.2.31}$$

$$\begin{aligned} F(a, b; c, z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)} F(a, b; a + b - c + 1; 1 - z) \\ &+ (1 - z)^{c - a - b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c - a, c - b; c - a - b + 1; 1 - z), \quad |\arg(1 - z)| < \pi. \end{aligned} \tag{A.2.32}$$

A.2.3 Jakobijeve funkcije

Ortogonalnost svojstvenih funkcija kvantnomehaničkog laplasijana smo pokazali izražavajući hipergeometrijsku funkciju preko Jakobijeve i koristeći Jakobijev transform, kao i njegov inverzni. Sada ćemo pokazati da sve to važi. U nastavku koristimo notaciju iz [80] i rezultate prikazane u tom radu. Jakobijeve funkcije su definisane kao

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1 - i\lambda), \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1 + i\lambda); \alpha + 1; -\sinh^2 t\Big), \tag{A.2.33}$$

za α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$ Odavde mogu da se, koristeći osobine hipergeometrijske funkcije, izvedu i drugi oblici, npr.

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = (\cosh t)^{-\alpha-\beta-1-i\lambda}\, F\Big(\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+1+i\lambda)\,,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta+1+i\lambda)\,;\,\alpha+1;\tanh^2 t\Big) \tag{A.2.34}$$

$$= (2\cosh t)^{i\lambda-\alpha-\beta-1}\, F\Big(\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+1-i\lambda)\,,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta+1-i\lambda)\,;\,1-i\lambda;\cosh^{-2} t\Big) \tag{A.2.35}$$

$$= (2\sinh t)^{i\lambda-\alpha-\beta-1}\, F\Big(\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+1-i\lambda)\,,\frac{1}{2}\,(-\alpha+\beta+1-i\lambda)\,;\,1-i\lambda;\sinh^{-2} t\Big). \tag{A.2.36}$$

U formulama za Jakobi transform, u našem slučaju, integrali se po imaginarnoj osi $(-i\infty,\, i\infty)$, koristeći analitičko produženje hipergeometrijske funkcije. Strogo izvođenje nam nije neophodno, tako da ćemo da koristimo formule date u [80], gde su pokazane za realno β, $\alpha > -1$, i zatim analitički produžene na kompleksne vrednosti parametara $\beta, \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$

Navešćemo neke definicije i teoreme na koje se pozivamo. Za $\alpha > -1$, $|\beta| < \alpha + 1$, Jakobijeva funkcija je kernel Jakobi transforma

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty dt\,(2\sinh t)^{2\alpha+1}(2\cosh t)^{2\beta+1}\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,f(t)\,. \tag{A.2.37}$$

Inverzni transform je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda\;|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\hat{f}(\lambda)\,, \tag{A.2.38}$$

gde su konstante $c_{\alpha,\beta}(\lambda)$ dat izrazom[1]

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+1+i\lambda)\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}(\alpha-\beta+1+i\lambda)\Big)}\;. \tag{A.2.39}$$

Jednačina (A.2.38) važi kada su $c_{\alpha,\beta}(\lambda)$, $c^{-1}_{\alpha,\beta}(\lambda)$ konačni tj. kada nemaju polove, što je tačno u našem slučaju, (7.2.74). Primenjujući Jakobi transform na Jakobijeve funkcije dobijamo da su kontinualno ortogonalne,

$$\int_0^\infty dt\,(2\sinh t)^{2\alpha+1}(2\cosh t)^{2\beta+1}\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\phi_{\lambda'}^{(\alpha,\beta)}(t) = 2\pi\,|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2\,\delta(\lambda-\lambda')\,. \tag{A.2.40}$$

Poslednji izraz nam zapravo daje ortogonalnost svojstvenih funkcija laplasijana. Kompletnost skupa (7.2.73) je u osnovi formula za inverzni Jakobi transform (A.2.38).

A.2.4 Asocirane Ležandrove funkcije

Asocirane Ležandrove funkcije $P_\nu^{\pm\mu}(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ i $Q^\mu_{-1-\nu}(z)$ su rešenja diferencijalne jednačine

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{d\omega}{dz} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right)w = 0. \tag{A.2.41}$$

[1] Jakobijeve funkcije su parne i Jakobi transform je generalizacija Furije kosinus transforma, $\phi_\lambda^{(-1/2,-1/2)}(t) = \cos\lambda t$. Stoga integrali u (A.2.37)-(A.2.38) mogu da se prošire na interval $(-\infty,\infty)$, pod pretpostavkom da su f, $\hat{f}$ parne funkcije.

To su funkcije stepena ν i reda μ koje postoje za sve vrednosti μ, ν i z izuzev u tačkama $z = \pm 1, \infty$ koje su tačke grananja ili polovi funkcija. Definisane su preko hipergeometrijskih na sledeće načine

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right), \quad |1-z| < 2, \tag{A.2.42}$$

$$\begin{aligned} Q_\nu^\mu(z) = e^{i\mu\pi} 2^{-\nu-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} z^{-\nu-\mu-1} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \\ \times F\left(1 + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right), \quad |z| > 1, \end{aligned} \tag{A.2.43}$$

$$\begin{aligned} e^{-i\mu\pi} Q_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z-1)^{\frac{\mu}{2}}(z+1)^{-\frac{\mu}{2}}}{2\,\Gamma(1+\nu-\mu)} F\left(-\nu, 1+\nu; 1+\mu; \frac{1-z}{2}\right) \\ + \frac{1}{2}\Gamma(\mu)(z+1)^{\frac{\mu}{2}}(z-1)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right), \quad |1-z| < 2. \end{aligned} \tag{A.2.44}$$

a alternativni oblici se dobijaju koristeći transformacije hipergeometrijskih funkcija.
Neki od vronskijani su

$$\mathcal{W}\{P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)\} = -e^{\mu\pi i} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)(z^2-1)}, \tag{A.2.45}$$

$$\mathcal{W}\{P_\nu^{-\mu}(z), P_\nu^\mu(z)\} = \frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi(1-z^2)}, \tag{A.2.46}$$

$$\mathcal{W}\{Q_\nu^\mu(z), Q_{-\nu-1}^\mu(z)\} = \frac{\cos(\nu\pi)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)(z^2-1)}. \tag{A.2.47}$$

Slede relacije koje povezuju različite Ležandrove funkcije

$$P_{-\nu-1}^\mu(z) = P_\nu^\mu(z), \tag{A.2.48}$$

$$P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(P_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\mu\pi} \sin(\mu\pi)\, Q_\nu^\mu(z)\right), \tag{A.2.49}$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(z) = \frac{1}{\sin(\pi(\nu-\mu))} \left(-\pi e^{i\mu\pi} \cos(\nu\pi)\, P_\nu^\mu(z) + Q_\nu^\mu(z)\, \sin(\pi(\nu+\mu))\right), \tag{A.2.50}$$

$$Q_\nu^{-\mu}(z) = e^{-2i\mu\pi} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} Q_\nu^\mu(z). \tag{A.2.51}$$

Veza sa negativnim argumentom

$$Q_\nu^\mu(-z) = -e^{i\nu\pi} Q_\nu^\mu(z). \tag{A.2.52}$$

A.2.5 Sferni i spinski sferni harmonici

Sferni harmonici su definisani sa

$$Y_l^m(\vartheta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\vartheta), \tag{A.2.53}$$

i za njih koristimo konvencije iz kvantne mehanike. Ova definicija obezbeđuje sledeće osobine

$$(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}, \qquad Y_l^m(\pi-\vartheta, \pi+\phi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \phi). \tag{A.2.54}$$

Korisne relacije su adiciona teorema i relacija kompletnosti,

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vartheta_L,\phi_L)\, Y_l^m(\vartheta_R,\phi_R)^* = \frac{2l+1}{4\pi}\, P_l(\cos\Theta)\,, \tag{A.2.55}$$

$$\sum_{l,m} Y_l^m(\vartheta_L,\phi_L)\, Y_l^m(\vartheta_R,\phi_R)^* = \frac{1}{\sin\vartheta_L}\,\delta(\vartheta_L-\vartheta_R)\,\delta(\phi_L-\phi_R)\,, \tag{A.2.56}$$

sa

$$\cos\Theta \equiv \Omega = \frac{\vec{q}_L\cdot\vec{q}_R}{q_L q_R} = \cos\vartheta_L\cos\vartheta_R + \cos(\phi_L-\phi_R)\sin\vartheta_L\sin\vartheta_R\ . \tag{A.2.57}$$

Za konvencije oko spinskih harmonika pratimo [76],

$$\varphi^+_{j,m}(\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\,Y_{j-1/2}^{m-1/2}(\vartheta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\,Y_{j-1/2}^{m+1/2}(\vartheta,\phi) \end{pmatrix}, \qquad \varphi^-_{j,m}(\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+1-m}{2(j+1)}}\,Y_{j+1/2}^{m-1/2}(\vartheta,\phi) \\ -\sqrt{\frac{j+1+m}{2(j+1)}}\,Y_{j+1/2}^{m+1/2}(\vartheta,\phi) \end{pmatrix}, \tag{A.2.58}$$

Ovde je $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots$ i $m=-j,\ldots,j$. Spinski sferni harmonici zadovoljavaju

$$\varphi^{\pm}_{j,m} = \frac{\sigma^i q_i}{q}\,\varphi^{\mp}_{j,m}\,, \qquad \varphi^{\pm}_{j,m}(\pi-\vartheta,\pi+\phi) = (-1)^{j\mp\frac{1}{2}}\,\varphi^{\pm}_{j,m}(\vartheta,\phi)\ . \tag{A.2.59}$$

Definisanjem funkcija $\psi^{\mathrm{a}}_{j,m}$ u skladu sa (8.2.14), nalazimo da je

$$\psi^{\mathrm{a}}_{j,m}(\vartheta,\phi) \equiv \sigma_2\,\varphi^{\mathrm{a}}_{j,m}(\pi-\vartheta,\pi+\phi)^* = i\,(-1)^{j+m+1}\,\varphi^{\mathrm{a}}_{j,-m}(\vartheta,\phi)\ . \tag{A.2.60}$$

Spinorski harmonici zadovoljavaju različite sumacione formule, uključujući

$$\sum_m \varphi^{\uparrow}_{j,m}(\vartheta_L,\phi_L)\Big(\sigma_2\varphi^{\uparrow}_{j,m}(\vartheta_R,\phi_R)\Big)^* = T\,\frac{i(2j+1)}{8\pi}\,\Big(P_{j+\frac{1}{2}}(\Omega)+P_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)\Big)\begin{pmatrix}\tan\frac{\Theta}{2} & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{A.2.61}$$

$$\sum_m \varphi^{\downarrow}_{j,m}(\vartheta_L,\phi_L)\Big(\sigma_2\varphi^{\downarrow}_{j,m}(\vartheta_R,\phi_R)\Big)^* = T\,\frac{i(2j+1)}{8\pi}\,\Big(P_{j+\frac{1}{2}}(\Omega)+P_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)\Big)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \tan\frac{\Theta}{2}\end{pmatrix}. \tag{A.2.62}$$

Ovde je T je matrica takva da najopštiji rotaciono invarijantan kernel $f^a{}_b(\vec{q}_L,\vec{q}_R)$, odnosno onaj koji zadovoljava $(L^L_{ij}+L^R_{ij})\hat{f}(\vec{q}_L,\vec{q}_R)^a{}_b=0$, ima oblik

$$f^a{}_b(\vec{q}_L,\vec{q}_R) = (T_1)^a{}_c\,(T_2)_b{}^d\,g^c{}_d(q_L,q_R,\Omega) \equiv T^{ad}{}_{cb}\,g^c{}_d(q_L,q_R,\Omega)\,, \tag{A.2.63}$$

za proizvoljne funkcije $g^c{}_d$. Sumacione formule (A.2.61)-(A.2.62) su korisne kod prelaska sa matričnih elemenata rotaciono invarijantnih kernela u svojstvenom bazisu vremenskog operatora (korišćenog u glavnom delu teze) na funkcije $f(\vec{q}_L,\vec{q}_R)^a{}_b$. Zbog kompletnosti, pišemo eksplicitne izraze za T_1 i T_2

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{X}\,e^{i\phi_R}\sin\Theta\sin\vartheta_L \\ e^{i\phi_L}\tan\frac{\vartheta_L}{2} & -\frac{2}{X}\,e^{i(\phi_L+\phi_R)}\sin\Theta\cos^2\frac{\vartheta_L}{2}\end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sin\Theta}\,e^{-i(\phi_L+\phi_R)}X & -\frac{1}{2}\,e^{-i\phi_L}\sin\vartheta_L \\ -\frac{1}{2\sin\Theta}\,e^{i\phi_R}X\tan\frac{\vartheta_L}{2} & \cos^2\frac{\vartheta_L}{2}\end{pmatrix},$$

gde je

$$X = e^{i\phi_R}(\Omega+\cos\vartheta_R)\sin\vartheta_L - 2e^{i\phi_L}\cos^2\frac{\vartheta_L}{2}\sin\vartheta_R\ . \tag{A.2.64}$$

A.3 Furijeove transformacije

U ovom dodatku nalazimo Furije transformacije dva izraza koja se javljaju u glavnom tekstu. Preciznije, pokazaćemo kako se oni dobijaju regularizacijom integrala datih u literaturi (npr. [92]). Prvi od njih se koristi u (8.2.17) i (8.2.69)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{i\lambda q}\,(\lambda^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}\,Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\lambda) \stackrel{\epsilon}{=} C\,q^{-\frac{1}{2}+i\omega}\,J_{i\kappa}(q)\ . \tag{A.3.1}$$

Polazimo od integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-aq}\,J_{\tilde\nu}(bq)\,q^{\tilde\mu-1}\,dq = 2^{-\tilde\nu}\,\frac{\Gamma(\tilde\mu+\tilde\nu)}{\Gamma(\tilde\nu+1)}\,b^{\tilde\nu}\,a^{\tilde\mu-\tilde\nu-1}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}-\tilde\mu}\,{}_2F_1\Big(\frac{\tilde\nu-\tilde\mu+1}{2},\frac{\tilde\nu-\tilde\mu}{2}+1;\tilde\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\Big)\,, \tag{A.3.2}$$

koji važi kada njegovi parametri zadovoljavaju sledeće uslove $\mathrm{Re}(\tilde\mu+\tilde\nu)>0$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\mathrm{Re}(a\pm ib)>0$. Izborom

$$a=\epsilon+i\lambda,\quad b=1,\quad \tilde\nu=i\kappa,\quad \tilde\mu=\frac{1}{2}+i\omega,\quad \epsilon>0\,, \tag{A.3.3}$$

nalazimo da, odvojeno od granica integracije, integral daje inverznu Furijeovu transformaciju izraza (A.3.1) u limesu $\epsilon\to 0$. Formalno možemo da napišemo

$$I(\lambda)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{-(\epsilon+i\lambda)q}\,J_{i\kappa}(q)\,q^{-\frac{1}{2}+i\omega}\,dq=\int_0^{\infty} e^{-i\lambda q}\,J_{i\kappa}(q)\,q^{-\frac{1}{2}+i\omega}\,dq\ . \tag{A.3.4}$$

Koristeći sličnu regularizaciju za interval $(-\infty,0)$ i osobinu $J_{\tilde\nu}(-q)=e^{i\pi\tilde\nu}J_{\tilde\nu}(q)$, dobijamo da je $\int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda q}\,J_{i\kappa}(q)\,q^{-\frac{1}{2}+i\omega}\,dq=-e^{2\pi(\kappa+\omega)}\,I(\lambda)$. Stoga je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda q}\,J_{i\kappa}(q)\,q^{-\frac{1}{2}+i\omega}\,dq=\Big(1-e^{2\pi(\kappa+\omega)}\Big)\ I(\lambda)\ . \tag{A.3.5}$$

Hipergeometrijska funkcija (A.3.2) može da se napiše preko asocirane Ležandrove funkcije Q koristeći relaciju (A.2.43), tako da za integral dobijamo

$$I(\lambda)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}-i\omega+i\kappa)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\omega+i\kappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\omega+i\kappa\right)}\,(\lambda^2-1)^{-\frac{i\omega}{2}}\,Q^{-i\omega}_{-\frac{1}{2}+i\kappa}(\lambda)\ , \tag{A.3.6}$$

a odatle i (A.3.1). Poslednji izraz takođe određuje konstantu C,

$$C=\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\omega+i\kappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\omega+i\kappa\right)}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}-i\omega+i\kappa)}}{1-e^{2\pi(\kappa+\omega)}}\ . \tag{A.3.7}$$

Drugi integral koji treba da regularizujemo je korišćen za dobijanje Furije transformisanih moda (8.2.71). Da bismo izveli

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta^{i\omega-1}\,e^{2i\zeta\eta}\,d\eta \stackrel{\varepsilon}{=} -2\Gamma(i\omega)\,e^{\frac{\omega\pi}{2}}\,\sinh(\pi\omega)\,(2\zeta)^{-i\omega} \tag{A.3.8}$$

krećemo od integrala iz [93]

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma-1}\, e^{-ct\cos\beta - ict\sin\beta} dt = \Gamma(\gamma)\, c^{-\gamma}\, e^{-i\gamma\beta}\,, \tag{A.3.9}$$

koji važi za sledeće vrednosti parametara

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Re}\,\gamma > 0\,, \qquad \text{ili} \quad \beta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\gamma < 1\ . \tag{A.3.10}$$

Uzimamo $\gamma = \epsilon + i\omega$, $\beta = -\pi/2$, $c = 2\zeta$ i definišemo integral u granicama $\eta \in (0,\infty)$ preko limesa

$$\int\limits_0^\infty \eta^{i\omega-1}\, e^{2i\zeta\eta}\, d\eta = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_0^\infty \eta^{\epsilon+i\omega-1}\, e^{2i\zeta\eta}\, d\eta = \Gamma(i\omega)\, (2\zeta)^{-i\omega}\, e^{-\frac{\omega\pi}{2}}\ .$$

Slično radimo za oblast $\eta \in (-\infty, 0)$, uzimamo $\gamma = \epsilon + i\omega$, $\beta = \pi/2$, $c = 2\zeta$

$$\int_{-\infty}^0 \eta^{i\omega-1}\, e^{2i\zeta\eta}\, d\eta = (-1)^{i\omega-1} \int_0^\infty \eta^{i\omega-1}\, e^{-2i\zeta\eta}\, d\eta = (-1)^{i\omega-1}\Gamma(i\omega)\, (2\zeta)^{-i\omega}\, e^{\frac{\omega\pi}{2}}\ ,$$

pa se sabiranjem poslednja dva integrala dobija (A.3.8). Poredeći (8.2.71) sa (A.3.8) dolazimo do vrednosti konstante E iz glavnog teksta,

$$E = -4(-1)^{-i\omega}\, e^{\frac{\pi\omega}{2}} \sinh(\pi\omega)\, \Gamma(i\omega)\, C\ . \tag{A.3.11}$$

Reference

[1] H. C. Steinacker, *"Quantum Geometry, Matrix Theory, and Gravity"*, Cambridge University Press (2024).

[2] M. Blau, S. Theisen, *"String theory as a theory of quantum gravity: a status report"*, Gen Relativ Gravit 41, 743–755 (2009).

[3] Carlo Rovelli, *"Loop quantum gravity: the first 25 years"*, Class. Quantum Grav. **28** 153002.

[4] Richard J. Szabo, *"Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces"*, Phys.Rept. 378:207-299, (2003).

[5] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, *"Can Spacetime Be Probed below the String Size?"*, Physics Letters B, 216 (1989), 41-47.

[6] Tamiaki Yoneya, *"String Theory and the Space-Time Uncertainty Principle"*, Progress of Theoretical Physics, 103 6, (2000), 1081–1125.

[7] E. Schrödinger, *"Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen"*, Naturwissenschaften 22 (1934), 518–520.

[8] W. Heisenberg, *"Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge"*, Ann. Phys. 424: 20–33..

[9] H.S. Snyder, *"Quantized Spacetime"*, Phys. Rev. 71 (1947) 38

[10] Alain Connes, *"Noncommutative geometry"*, Springer (1994).

[11] J. Madore, *"An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications"*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **257** (2000).

[12] M. Burić *"A road to fuzzy physics"* Eur. Phys. J. Spec. Top. **232**, 3597–3606 (2023)

[13] B. Brkic, M. Buric and D. Latas, *"Fuzzy de Sitter and anti-de Sitter spaces"*, PoS **CORFU2021** (2022), 274.

[14] J. Madore, *"The fuzzy sphere"*, Class. Quant. Grav. **9** (1992), 69-88.

[15] Maja Burić, John Madore, *"Fuzzy Physics"*, unpublished book.

[16] D. Jurman, H. Steinacker, *"2D fuzzy Anti-de Sitter space from matrix models"*, JHEP **01** (2014), 100.

[17] Bojana Brkic, Ilija Buric, Maja Buric, Dusko Latas, *"Quantum scalar field on fuzzy de Sitter space. Part I. Field modes and vacua"*, JHEP **10** (2024), 018, `arXiv:2403.10634 [hep-th]`.

[18] J. P. Gazeau, J. Mourad and J. Queva, *"Fuzzy de Sitter space-times via coherent states quantization"*, [`arXiv:quant-ph/0610222 [quant-ph]`].

[19] M. Buric and J. Madore, *"Spherically Symmetric Noncommutative Space: $d = 4$"*, Eur. Phys. J. C **58** (2008), 347-353.

[20] M. Buric and J. Madore, *"Noncommutative spherical symmetry via the monopole"*, Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009), 2783-2791.

[21] M. Buric and J. Madore, *"On noncommutative spherically symmetric spaces"*, Eur. Phys. J. C **74** (2014), 2820.

[22] M. Buric and J. Madore, *"Noncommutative de Sitter and FRW spaces"*, Eur. Phys. J. C **75** (2015), 502, arXiv:1508.06058 [hep-th].

[23] C. S. Chu, B. R. Greene and G. Shiu, *"Remarks on inflation and noncommutative geometry"*, Mod. Phys. Lett. A **16** (2001), 2231-2240, arXiv:hep-th/0011241 [hep-th].

[24] F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele and M. Peloso, *"Cosmological perturbations and short distance physics from noncommutative geometry"*, JHEP **06** (2002), 049, arXiv:hep-th/0203099 [hep-th].

[25] S. Alexander, R. Brandenberger and J. Magueijo, *"Noncommutative inflation"*, Phys. Rev. D **67** (2003), 081301, arXiv:hep-th/0108190 [hep-th].

[26] H. Garcia-Compean, O. Obregon and C. Ramirez, *"Noncommutative quantum cosmology"*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 161301, arXiv:hep-th/0107250 [hep-th].

[27] G. D. Barbosa and N. Pinto-Neto, *"Noncommutative geometry and cosmology"*, Phys. Rev. D **70** (2004), 103512, arXiv:hep-th/0407111 [hep-th].

[28] A. Chaney, L. Lu and A. Stern, *"Lorentzian Fuzzy Spheres"*, Phys. Rev. D **92** (2015) no.6, 064021

[29] A. Chaney, L. Lu and A. Stern, *"Matrix Model Approach to Cosmology"*, Phys. Rev. D **93** (2016) no.6, 064074, arXiv:1511.06816 [hep-th].

[30] H. C. Steinacker, *"Quantized open FRW cosmology from Yang–Mills matrix models"*, Phys. Lett. B **782** (2018) 176, arXiv:1710.11495 [hep-th].

[31] M. Sperling and H. C. Steinacker, *"The fuzzy 4-hyperboloid H_n^4 and higher-spin in Yang–Mills matrix models"*, Nucl. Phys. B **941** (2019) 680, arXiv:1806.05907 [hep-th].

[32] M. Sperling and H. C. Steinacker, *"Covariant cosmological quantum space-time, higher-spin and gravity in the IKKT matrix model"*, JHEP **07** (2019), 010, arXiv:1901.03522 [hep-th].

[33] J. L. Karczmarek and H. C. Steinacker, *"Cosmic time evolution and propagator from a Yang–Mills matrix model"*, J. Phys. A **56** (2023) no.17, 175401, arXiv:2207.00399 [hep-th].

[34] E. Battista and H. C. Steinacker, *"On the propagation across the big bounce in an open quantum FLRW cosmology"*, Eur. Phys. J. C **82** (2022) no.10, 909, arXiv:2207.01295 [gr-qc].

[35] S. Brahma, R. Brandenberger and S. Laliberte, *"Emergent cosmology from matrix theory"*, JHEP **03** (2022), 067, arXiv:2107.11512 [hep-th].

[36] M. Marcolli, *"Noncommutative Cosmology"*, World Scientific (2018). WSP, 2018, ISBN 978-981-320-283-2, 978-981-320-286-3.

[37] V. Mukhanov and S. Winitzki, *"Introduction to quantum effects in gravity"*, Cambridge University Press (2007).

[38] C. Pecker and J. Narlikar, *"Current Issues in Cosmology"*, Cambridge University Press (2006).

[39] G. Hinshaw *et al.*, *"NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL PARAMETER RESULTS"*, 2013 ApJS **208** 19

[40] N. Aghanim *et al.* *"Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters"*, Astron. Astrophys. **641** (2020), A6 [erratum: Astron. Astrophys. **652** (2021), C4], arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].

[41] D. Baumann, *"Inflation"*, [arXiv:0907.5424 [hep-th]].

[42] X. Chen *"Primordial Non-Gaussianities from Inflation Models"*, Adv. Astron. **2010** (2010), 638979, arXiv:1002.1416 [astro-ph.CO].

[43] C. Cheung, P. Creminelli, A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan and L. Senatore *"The Effective Field Theory of Inflation"*, JHEP **03** (2008), 014, arXiv:0709.0293 [hep-th].

[44] Peter Adshead, Richard Easther, Eugene A. Lim, *""In-in" formalism and cosmological perturbations"*, Phys. Rev. D **80**, 083521 (2009).

[45] A. D. Linde, *"Quantum cosmology and the structure of inflationary universe"*, [arXiv:gr-qc/9508019 [gr-qc]].

[46] D. Baumann, D. Green, A. Joyce, E. Pajer, G. L. Pimentel, C. Sleight and M. Taronna, *"Snowmass White Paper: The Cosmological Bootstrap"*, arXiv:2203.08121 [hep-th].

[47] M. Hogervorst, J. Penedones and K. S. Vaziri, *"Towards the non-perturbative cosmological bootstrap"*, JHEP **02** (2023), 162, arXiv:2107.13871 [hep-th].

[48] L. Di Pietro, V. Gorbenko and S. Komatsu, *"Analyticity and unitarity for cosmological correlators"*, JHEP **03** (2022), 023, arXiv:2108.01695 [hep-th].

[49] M. Nakahara, *"Geometry, Topology and Physics"*, CRC Press (2003).

[50] B. Brkic, M. Buric and D. Latas, *"Laplacian on fuzzy de Sitter space"*, Class. Quant. Grav. **39** (2022) no.11, 115001, arXiv:2111.07391 [hep-th].

[51] M. Buric, H. Grosse and J. Madore, *"Gauge fields on noncommutative geometries with curvature"* J. High Energ. Phys. 2010, 10 (2010).

[52] S. Cho *"Quantum Mechanics on the h-deformed Quantum Plane"*, J. Phys. A, 32 (1999), 2091-2102, arXiv:math-ph/9804015.

[53] J. Madore and H. Steinacker, *"Propagator on the h - deformed Lobachevsky plane"*. J. Phys. A **33** (2000), 327-342. arXiv:math/9907023 [math.QA].

[54] Cho, S. J. et al., *"Non-commutative geometry of h-deformed quantum plane"*. Journal of Physics A 31 (1997): 2639-2654.

[55] P. Kravchuk and D. Simmons-Duffin, *"Light-ray operators in conformal field theory"*, JHEP **11** (2018), 102, arXiv:1805.00098 [hep-th].

[56] V. K. Dobrev, G. Mack, V. B. Petkova, S. G. Petrova and I. T. Todorov, *"Harmonic Analysis on the n-Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory"*, Lect. Notes Phys. 63, 1 (1977).

[57] V. Bargmann, *"Irreducible unitary representations of The Lorentz group"*, Annals Math. 48 568-640 (1947).

[58] V. Bargmann and E. P. Wigner, *"Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations"*, Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948) 211-23.

[59] P. Moylan, *"Unitary Representations of the (4+1) De Sitter Group on Unitary Irreducible Representation Spaces of the Poincare Group"*, J. Math. Phys. **24** (1983) 2706.

[60] F. Mandl and G. Shaw, *"QUANTUM FIELD THEORY"*, (1985).

[61] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *"Quantum Fields in Curved Space"*, Cambridge Univ. Press (1984).

[62] A. A. Kirillov, *"Elements of the Theory of Representations"*, Springer-Verlag (1976).

[63] B. Allen, *"Vacuum States in de Sitter Space"*, Phys. Rev. D **32** (1985), 3136.

[64] Schomblond, Christiane; Spindel, Philippe *"Conditions d'unicité pour le propagateur $\Delta^1(x,y)$ du champ scalaire dans l'univers de de Sitter"*, Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique, Volume 25 (1976) no. 1, pp. 67-78.

[65] C. Sleight and M. Taronna, *"Bootstrapping Inflationary Correlators in Mellin Space"*, JHEP **02** (2020), 098, arXiv:1907.01143 [hep-th].

[66] M. Buric, D. Latas and L. Nenadovic, *"Fuzzy de Sitter Space"*, Eur. Phys. J. C **78** (2018), 953, arXiv:1709.05158 [hep-th].

[67] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, *"Quantum theory of scalar fields in de Sitter space-time"*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A **9** (1968).

[68] I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, *“Tables Of Integrals, Series And Products”*, 2015

[69] D. Jurman and H. Steinacker, *“2D fuzzy Anti-de Sitter space from matrix models”*, JHEP **01** (2014), 100, arXiv:1309.1598 [hep-th].

[70] A. Pinzul and A. Stern, *“Exact solutions for scalars and spinors on quantized Euclidean AdS2 space and the correspondence principle”*, Phys. Rev. D **104** (2021) no.12, 126034, arXiv:2106.13376 [hep-th].

[71] I. Buric and M. Buric, *“The fuzzy BTZ”*, JHEP **12** (2022), 102, arXiv:2204.03673 [hep-th].

[72] T. Garidi, *“What is mass in de Sitterian physics?”* hep-th/0309104.

[73] J. P. Gazeau and M. Lachieze Rey, *“Quantum field theory in de Sitter space: A Survey of recent approaches”*, PoS IC **2006** (2006) 007 [hep-th/0610296].

[74] D. Skinner, *“Mathematical Methods”*, University of Cambridge lecture notes.

[75] R. M. Wald, *“Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics”*, University of Chicago Press (1995).

[76] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *“Relativistic quantum mechanics”*, McGraw-Hill, New York (1964).

[77] M. Buric and D. Latas, Dusko, *“Discrete fuzzy de Sitter cosmology”*, Phys. Rev. D **100** (2019), 024053, arXiv:1903.08378 [hep-th].

[78] N. Dunford and J.T. Schwartz, *“Linear Operators: Spectral theory”*, Interscience Publishers (1958)

[79] V. Hutson, J. Pym, M. J. Cloud, *“Applications of Functional Analysis and Operator Theory”*, Elsevier Science (2005).

[80] T. H. Koornwinder, *“Jacobi Functions and Analysis on Noncompact Semisimple Lie Groups”*, Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications, Springer (1984).

[81] M. S. Costa, J. Penedones, D. Poland and S. Rychkov, *“Spinning Conformal Blocks”*, JHEP **11** (2011), 154, arXiv:1109.6321 [hep-th].

[82] D. Karateev, P. Kravchuk and D. Simmons-Duffin, *“Weight Shifting Operators and Conformal Blocks”*, JHEP **02** (2018), 081, arXiv:1706.07813 [hep-th].

[83] I. Buric and V. Schomerus, *“Universal spinning Casimir equations and their solutions”*, JHEP **03** (2023), 133, arXiv:2211.14340 [hep-th].

[84] Askold Perelomov *“Generalized Coherent States and Their Applications”* Springer Berlin, Heidelberg(1986)

[85] A. M. Perelomov *“Generalized coherent states and some of their applications”* Sov. Phys. Usp. **20** 703 (1997),

[86] B. Brkić, I. Burić, M. Burić, D. Đorđević and D. Latas, *“QFT on Fuzzy AdS Spaces: Classical Limit and Boundary Correlation Functions”*, [arXiv:2502.17595 [hep-th]].

[87] Griffiths, Jerry B., and Jiří Podolský, *“Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity”*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge: Cambridge University Press, 2009).

[88] S. M. Carroll, *“Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity”*, Cambridge University Press (2019)

[89] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *“Handbook of Mathematical Functions”*, Dover, New York (1964).

[90] F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds., *“NIST Digital Library of Mathematical Functions”*, Release 1.2.4 of 2025-03-15.

[91] G. Z. Forristall and J. D. Ingram, *“Evaluation of Distributions Useful in Kontorovich-Lebedev Transform Theory”* SIAM Journal on Mathematical Analysis Vol. 3, Iss. 4 (1972)

[92] G. N. Watson, *“A Treatise on the Theory of Bessel Functions”*, Cambridge University Press (1922).

[93] H. Bateman, A. Erdélyi et. al., *“Higher Transcendental Functions”*, vol 1, McGraw Hill, New York (1953).

[94] A. U. Klimyk and N. Ja. Vilenkin, *“Representations of Lie Groups and Special Functions”*, Springer-Verlag (1991).

Biografija

Bojana (Dragan) Brkić je rođena 7. januara 1993. godine u Čačku. Osnovnu školu „Milan Blagojević” završila je u Lučanima. Maturirala je na prirodno-matematičkom smeru Gimnazije „Sveti Sava” u Požegi 2012. godine kao nosilac Vukove diplome. Nakon toga je upisala osnovne studije na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Teorijska i eksperimentalna fizika, koje je završila 2017. godine sa prosečnom ocenom 9.72. Na istom fakultetu 2017. godine upisuje master akademske studije, uža naučna oblast Fizika čestica i polja, koje završava 2018. godine sa prosečnom ocenom 10. Master rad pod naslovom „Proučavanje procesa rasejanja u nekomutativnom standardnom modelu pomoću paketa *FeynRules* i *MadGraph*” je odbranila 2018. godine sa završnom ocenom 10. Iste godine upisala je doktorske studije na Fizičkom fakultetu, smer Kvantna polja, čestice i gravitacija. Sve ispite na doktorskim studijama položila je sa ocenom 10. Temu doktorske disertacije ”Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima” je odbranila pred kolegijumom doktorskih studija Fizičkog fakulteta 1. decembra 2021. godine.

Od januara 2019. godine je zaposlena na Fizičkom fakultetu, prvo kao istraživač-pripravnik, a zatim kao istraživač-saradnik. Naučne aktivnosti obavlja u okviru Grupe za gravitaciju, čestice i polja. Bavi se istraživanjem nekomutativne geometrije, koja predstavlja kvantnu verziju klasične geometrije. Analizira skalarno polje na nekomutativnim verzijama rešenja Ajnštajnovih jednačina, fazi de Siterovom i fazi anti de Siterovom prostoru.

Trenutno, kao saradnik u nastavi na Fizičkom fakultetu, drži računske vežbe iz četiri predmeta: Mehanika, Termodinamika, Kvantna teorijska fizika i Osnovi elektrodinamike. Pored toga je, u poriodu od po godinu dana, držala računske i laboratorijske vežbe iz Fizike atoma kao i računske vežbe iz Fizike 2 za studente sa Fakulteta za fizičku hemiju. Učestvovala je u popularizaciji fizike kao član Komisije za takmičenje za osnovne škole.

Izjava o autorstvu

Ime i prezime autora: *Bojana Brkić*
Broj indeksa: **8010/2018**

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za sticanje druge diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih institucija;
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršila autorska prava i koristila intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis autora

U Beogradu, 28.4.2025. ______________________

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: *Bojana Brkić*
Broj indeksa: **8010/2018**
Studijski program: *Kvantna polja, čestice i gravitacija*
Naslov rada: *Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima*
Mentor: *doc. dr Duško Latas*

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predala radi pohranjivanja u **Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog naziva doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis autora

U Beogradu, 28.4.2025.

____

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku Svetozar Marković da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Kosmološki modeli na nekomutativnim prostorima

koja je moje autorsko delo.
Disertaciju sa svim prilozima predala sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.
Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci. Kratak opis licenci je sastavni deo ove izjave).

Potpis autora

U Beogradu, 28.4.2025. ______________________

1. Autorstvo. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. Autorstvo – bez prerada. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.