УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Лука В. Ненадовић

ОСОБИНЕ КЛАСИЧНЕ И КВАНТНЕ ТЕОРИЈЕ ПОЉА НА ЗАКРИВЉЕНОМ НЕКОМУТАТИВНОМ ПРОСТОРУ

докторска дисертација

Београд, 2017

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Лука В. Ненадовић

ОСОБИНЕ КЛАСИЧНЕ И КВАНТНЕ ТЕОРИЈЕ ПОЉА НА ЗАКРИВЉЕНОМ НЕКОМУТАТИВНОМ ПРОСТОРУ

докторска дисертација

Београд, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF PHYSICS

Luka V. Nenadović

PROPERTIES OF CLASSICAL AND QUANTUM FIELD THEORY ON A CURVED NONCOMMUTATIVE SPACE

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017

Abstract

In the first part we shortly review the historical development of the noncommutative geometry. After presenting some of the main features and problems of the wide class of quantum field theories on noncommutative spaces, we give a brief introduction of the frame formalism in the noncommutative differential geometry. Introducing the earlier defined truncated Heisenbera algebra, we review the construction of differential geometric objects on it using the frame formalism. We complete the introduction by citing the previously shown equivalence of the Grosse-Wulkenhaar model with the scalar theory coupled to the curvature of the truncated Heisenberg space.

Further, we present our construction and analysis of the Dirac action on the truncated Heisenberg algebra. In particular, the nonminimal couplings to the background gravitational field via torsion was considered. By the dimensional reduction to the Heisenberg algebra we obtained the renormalizable Vignes-Tourneret model which is an extension of the noncommutative Gross-Neveu model. This result indicates that, as on the commutative curved backgrounds, nonminimal couplings with torsion and curvature are necessary (and sufficient) for renormalisability of scalar and spinor theories on the curved noncommutative spaces.

In the last part, we present our calculation of the divergent one-loop corrections to the propagators of the $U(1)$ gauge theory on the truncated Heisenberg space, which is one of the gauge extensions of the Grosse-Wulkenhaar model. The model is purely geometric, based on the Yang-Mills action; the corresponding gauge-fixed theory is BRST invariant and has trivial classical vacuum. We quantize perturbatively around this vacuum and, along with the usual wave-function and mass renormalizations, we find divergent nonlocal terms of the $\Box^{-1}$ and $\Box^{-2}$ type. We discuss the meaning of these terms and possible improvements of the model.

Резиме

После кратаког историјског приказа развоја некомутативне геометрије и упознавања са основним особинама и проблемима квантних теорија поља формулисаних на некомутативним просторима дат је увод у тетрадни формализам у некомутативној диференцијалној геометрији. Размотрили смо основне особине раније дефинисане модификоване Хајзенбергове алгебре и описали конструкцију диференцијалне геометрије на овом некомутативном простору. Ово је урађено коришћењем тетрадног формализма. Уводна разматрања завршавамо навођењем претходног резултата, где је показана еквиваленција Гросе-Вулкенхаровог модела и скаларне теорије на закривљеном некомутативном простору.

У наставку представљамо формулацију и анализу Дираковог дејства на модификованој Хајзенберговој алгебри. Конкретно, размотрена је неминимална интеракција са позадинским гравитационим пољем. Ренормализабилни модел је добијен димензионом редукцијом на Хајзенбергову алгебру. Успостављена је еквиваленција са Вињ-Турнеровим моделом који је некомутативна екстензија Грос-Невоовог модела. Овај резултат је индикација да је интеракција са торзијом и кривином неопходан (и довољан) услов за ренормализабилност скаларних и спинорских теорија на закривљеном некомутативном простору.

У последњем делу, представили смо резултате рачуна дивергентних квантних корекција пропагатора на нивоу једне петље, за градијентно $U(1)$ поље на модификованом Хајзенберговом простору. Ова теорија је раније формулисана и представља једну екстензију Гросе-Вулкенхаровог модела за градијентно поље. Модел је чисто геометријски, заснован на Јанг-Милсовом дејству и БРСТ инваријантан. Након пертурбативне квантизације око тривијалног вакуума, налазимо дивергентне нелокалне чланове облика $\square^{-1}$ и $\square^{-2}$. Напослетку анализирамо значење ових чланова и могућности за поправку модела.

Садржај

1 Увод

Схватање природе се тренутно ослања на две физичке теорије које имају дисјунктне домене важења и суштински различиту математичку структуру. Квантна механика је заснована на алгебри оператора дефинисаних на Хилбертовом простору и описује ефекте на малим растојањима. С друге стране, општа теорија релативности је заснована на Римановој геометрији и успешно описује ефекте на великим скалама дужине. Покушаји да се формулише јединствена теорија основних интеракција, на пример да се општа теорија релативности опише у контексту квантне механике, као квантна теорија поља, до сада нису успели. Сви досадашњи покушаји да се пронађе јединствени теоријски оквир захтевају одређену промену парадигме. Ова промена парадигме може бити, на пример онтолошка као у теорији струна, што значи да се уводе нови фундаметални конституенти, у овом случају струне или бране (или спинске мреже у случају теорије квантне гравитације на петљама). Други начин подразумева неонтолошку промену парадигме јер се не уводе нови ентитети, него редефинишу алгебарски постулати на којима је заснована сама геометрија која стоји у основи описа материје. Последњи приступ, а који носи назив некомутативна геометрија[1] и којем ће бити посвећен остатак овог текста, почива на уверењу да се простор-време на малим скалама дужине модификује тако да координате чине некомутативну асоцијативну алгебру. Ово представља екстензију алгебарског апарата квантне механике на класичну

---

[1] У скорије време, развијен је још један неонтолошки приступ који се назива уопштена геометрија. Интересантна је чињеница да из уопштене геометрије могу да се добију вакууми теорије струна [1].

геометрију. На тај начин модификована ,,квантна геометрија” отвара могућност уједињеног описа природе на нивоу геометрије.

Идеја о модификацији геометрије на малим растојањима и минималној скали дужине потиче још из тридесетих година XX века, из времена настанка квантне електродинамике [2, 3]. Мотивисан потребом да реши проблем ултраљубичастих дивергенција, Снајдер је 1947. године указао на могућност да се на Лоренц-инваријантан начин одреди горња граница скале импулса [4]. Он је показао да захтев Лоренцове инваријантности не условљава континуалност простор-времена. Постојање најмање дужине за последицу има некомутативност координата и на природан и Лоренц-инваријантан начин, због комплементарности координата и импулса, одређује горњу границу импулса. Недуго затим, успех програма ренормализације квантне теорије поља изместио је идеју некомутативности из истраживачког интересовања на неколико деценија.

Тек када су се појавили проблеми са квантовањем гравитације, постало је јасно да је класична представа простор-времена могућа препрека за формулацију јединствене конзистентне теорије основних интеракција. Може се рећи да је опште уверење да се класични појам простор-времена испод неког опсега дужина мора модификовати и да испод Планкове скале нема смисла говорити о простор-времену у операционалном смислу [5]. Постојање хоризонта догађаја у покушају локализације објекта произвољно малих димензија имплицира неодређеност у мерењу координата, а самим тим и модификацију простор-времена. Ако се простор постулира као многострукост чије координате међусобно не комутирају, одатле природно следе релације неодређености и тиме је немогућност постојања јасног концепта простор-времена на малим скалама инкорпорирана у математичку стуктуру теорије, а избегнут је и претходно наведени парадокс. Ако координате не комутирају, немогуће их је истовремено измерити, па појам тачке губи смисао. На тај начин се избегава интеракција у тачки која је један од извора ултраљубичастих дивергенција у стандардној теорији поља.

Предуслов за настанак некомутативне диференцијалне геометрије је формулација диференцијалног рачуна на некомутативним алгебрама. Развојем алгебарске топологије и K-теорије, као и снажним утицајем који је оставила Атија-Сингерова теорема, ствара се окружење у којем Кон, инспирисан квантном механиком, осамдесетих година XX века успева да прошири појам диференцијала на некомутативне алгебре [6]. Основна идеја је квантизација диференцијалног рачуна по угледу на операторски формализам квантне механике, при чему је диференцијал формално дефинисан помоћу комутатора [7]

$$df = i[F, f], \tag{1.1}$$

где је f елемент инволутивне алгебре $\mathcal{A}$, оператора на Хилбертовом простору $\mathcal{H}$, а F аутоадјунговани оператор на $\mathcal{H}$, такав да задовољава услов $F^2 = 1$. Овај услов је изабран како би се обезбедило да диференцијал df антикомутира са F, што дефинише $d^2 = 0$. У физици овај услов задовољава, на пример, оператор киралности. Уређена тројка $(\mathcal{A}, F, \mathcal{H})$ назива се спектрална тројка и представља полазни објекат у заснивању некомутативне геометрије по Кону. Некомутативна диференцијална геометрија у овом контексту може да се посматра као аналогон обичне диференцијалне геометрије, где су пресеци на векторским раслојењима замењени модулима над асоцијативним некомутативним алгебрама. Постоји формална аналогија између једначине (1.1) и идентитета за Дираков оператор у обичној геометрији. Нека је f глатка функција, ψ Дираков спинор, а $\not{D}$ Дираков оператор, тада важи [9, 8]

$$i\gamma^\alpha(e_\alpha f)\psi = \not{D}(f\psi) - f\not{D}\psi, \tag{1.2}$$

где је e_α Пфафов извод у базису тетраде θ^α. Ова једначина у операторском облику може да се напише као

$$\gamma^\alpha e_\alpha f = -i[\not{D}, f]. \tag{1.3}$$

Ако се направи замена $\gamma^\alpha \mapsto \theta^\alpha$, онда је израз на левој страни де Рамов диференцијал[2], што је аналогон једначини (1.1).

---

[2] Ова замена је само аналогија јер је $\theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\beta\theta^\alpha = 0$, док је $\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha \neq 0$, [10]

Формулација некомутативне диференцијалне геометрије отворила је могућност за разматрање последица модификација простор-времена на малим скалама дужине, у смислу претходно изнетог. У овом контексту, апарат квантне теорије поља, која оперише функцијама које су дефинисане на диференцијалним многострукостима је проширен на асоцијативне некомутативне алгебре које могу да се интерпретирају као алгебре функција на некомутативним (квантованим) просторима. Овим приступом је квантномеханички математички апарат инкорпориран у основне поставке геометрије, па можемо да кажемо да су на тај начин обе стране Ајнштајнових једначина записане на алгебри оператора, као у квантној механици. Први корак оваквог приступа представља испитивање особина теорије поља на фиксираним некомутативним просторима, а крајњи циљ би била формулација уједињене теорије поља у којој позадински простор није унапред задат.

Постоје и додатне мотивације за некомутативну геометрију које потичу из других приступа. На пример из теорије струна [11, 12, 13] или из квантне гравитације на петљама [14]. Такође, интересантан је покушај налажења некомутативне алгебре која би одговарала уједињењу интеракција [15, 32, 17].

Као што је већ наглашено, од теорије поља дефинисане на некомутативном простору се очекивало да има боље понашање у ултраљубичастом сектору него њен комутативни аналогон. Међутим, испоставило се да ϕ^4 теорија формулисана на θ-деформисаном Мојаловом простору, који је најједноставнији некомутативни простор, испољава нежељене особине при квантизацији, наиме мешање ултраљубичастих и инфрацрвених дивергенција, или кратко УВ/ИЦ-мешање [18]. Као последица нелокалности, која потиче из θ-деформисаног производа, поред за теорију поља уобичајених планарних дијаграма, појављује се нова класа дијаграма који су непланарни. Ови непланарни дијаграми на нивоу једне петље имају додатни фазни допринос $e^{ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu}$, где је p спољашњи импус. Поменути фазни допринос успева да регуларизује УВ-дивергенције због брзих осцилација за велике вредности спољашњих импулса p, али не успева да поправи сингуларно понашање ових дијаграма за мале вредности p. Како дијаграми вишег реда садрже непланарне поддијаграме ове ИЦ-дивергенције остају и појављују се у облику УВ-дивергенција. Овакво нетривијално мешање УВ и ИЦ дивергенција онемогућава ренормализацију упркос томе што нелокалност поправља УВ-сектор теорије.

Прва пертурбативно ренормализабилна теорија скаларног поља на некомутативном простору је Гросе-Вулкенхаров (ГВ) модел [19, 20]. Овај модел описује реално скаларно поље на Мојаловом простору са еуклидском сигнатуром у две и четири димензије. У ГВ моделу, поље је конфинирано у хармонијском потенцијалу

$$S = \int \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\Omega^2}{2}\tilde{x}^2\phi^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\, \phi\star\phi\star\phi\star\phi \right), \tag{1.4}$$

где је Ω реална константа уз осцилаторни члан $\tilde{x}^2\phi^2$. Присуство овог члана модификује теорију на тај начин да она губи транслациону инваријантност, али јој овај члан са друге стране даје Лангман-Сабо (ЛС) дуалност [21] (грубо речено, симетрију на замену $x \leftrightarrow p$). ЛС-дуалност је симетрија између великих и малих дужина, која омогућава уклањање УВ/ИЦ-мешања и обезбеђује ренормализабилност теорије. Додатни хармонијски члан, због постојања експлицитне координатне зависности, модификује уобичајени пропагатор трансформишући га у Мелеров кернел и обезбеђује на тај начин одсуство проблематичног УВ/ИЦ месхања. Ренормализационе особине ГВ-модела су детаљно испитане применом МС-анализе (Multiscale analysis) у координатном простору [22] и у матричној бази [23]. Рачунање β-функције на нивоу једне петље је урађено у [24], а у тачки ЛС-самодуалности, $\Omega = 1$, је показано да је β-функција једнака нули у свим редовима теорије пертурбације [25]. То значи да је теорија асимптотски сигурна и да нема Ландауових духова.

Постоји још један начин да се добије ренормализабилна теорија за скаларно поље. Приступ се базира на додавању нелокалног билинеарног члана облика $\phi\star\Box^{-1}\phi$, који се појављује у ренормализацији ϕ^4-теорије [26]. Овај модел нема осцилаторни члан и транслационо је инваријантан. Обично се назива ,,скаларни $1/p^2$-модел" и уводи нову верзију ЛС-дуалности облика $\Box \leftrightarrow \Box^{-1}$.

Када је у питању спинорско поље, постоје такође два ренормализабилна модела. Један је добијен узимањем корена Дираковог оператора у четири димензије са дуплираном димензијом спинорске репрезентације [27]. Међутим, физичка интерпретација ове осмодимензионалне спинорске репрезентације није најјаснија. Други модел је некомутативна екстензија Грос-Невоовог (ГН) модела [28], који се назива оријентабилни ГН-модел или Вињ-Турнеров (ВТ) модел [29, 30]. Помоћу МС-анализе је показано да је овај модел пертурбативно ренормализабилан у свим редовима [31].

Конструкција ренормализабилне теорије за градијентно поље на некомутативном простору се суочава са неколико изазова. Једноставно укључивање координатно зависног хармонијског члана нарушава градијентну инваријантност. Тај проблем се у некомутативној теорији поља природно решава увођењем коваријантних координата, које се трансформишу у придруженој репрезентацији групе дате градијентне симетрије [32, 33]. Један модел за градијентно поље, дефинисан на четвородимензионалном Мојаловом простору, добијен је као резултат минималне интеракције спољешњег градијентног поља и скаларног поља. Дејство је по конструкцији градијентно инваријантно, а интеграцијом по скаларном пољу се добија ефективна теорија за градијентно поље [34, 35]. Резултујуће индуковано дејство, поред уобичајеног Јанг-Милсовог члана, садржи аналогон осцилаторног члана у којем фигурише коваријантна координата. Тиме ово дејство поседује неку врсту ЛС-дуалности у градијентном сектору. Упркос томе, пертурбативна квантизација ове теорије је компликован задатак зато што вакуум није тривијалан. Због постојања чланова другог и четвртог реда по коваријантној координати, ово поље има ненулту вакуумску очекивану вредност. У комутативном случају постојање чисто масеног члана за градијентно поље нарушава градијентну инваријантност па такав члан није дозвољен. Поменимо још један модел који је такође градијентно инваријантан [36, 67]. У овој теорији хармонијски члан потиче од духова, међутим испоставило се да овај модел садржи квадратне ИР-дивергенције. Поменута два модела су заснована на покушају да се направи теорија за градијентно поље која би била аналогон скаларном ГВ-моделу. Градијентни аналогон $1/p^2$-теорије је конструисан и анализиран у [66, 67]. Присуство нелокалног еквивалента за вектроско поље у дејству резултује неограниченим бројем вертекса градијентног поља, чинећи вакуумску структуру теорије прилично компликованом и захтева увођење додатних поља.

Општи закључак који се намеће за теорије поља дефинисане на некомутивном простору сугерише да ренормализационе шеме, засноване првенствено на појму локалности, не могу просто да се примене у овом случају. Услови за ренормализабилност у наведеним примерима, изузев за фермионске теорије, су или постојање ЛС-дуалности или додавање нелокалних контрачланова. Нелокалност је сама по себи концептуално проблематична и за моделе који су конструисани тако да буду ЛС-дуални захтева додатно интерпретацију нарушења транслационе инваријантности. С друге стране постоји више разлога који нас наводе на закључак да квантна теорија гравитације неће бити локална у конвенционалном смислу [39]. У случају градијентног поља ствари се још додатно компликују због присуства симетрија и тензорске структуре теорије. Последица свега овога је, да упркос томе што постоји неколико модела са градијентним пољем дефинисаних на Мојаловом простору, још увек не постоји ренормализабилна теорија, иако неки од ових модела имају добре особине. Доказ ренормализабилности је доста отежан и чињеницом да уобичајене ренормализационе технике, попут МА, не могу да се примене у присуству симетрија [57, 41, 42, 43]. Због тога се разматрају друге опције, попут алгебарске ренормализације [44, 45]. Додатно, због некомутативности ни $U(1)$ градијентна теорија није Абелова. Због тога се, као у не-Абеловим теоријама, појављује проблем фиксирања калибрације, односно постојање Грибовљевих хоризоната [46].

С друге стране, квантне теорије поља дефинисане на матричним просторима са коначним матричним репрезентацијама, су коначне при квантизацији. Интеграл је траг по матрицама и функционални интеграли дају коначне изразе. Ово може да се види као нека врста матричне регуларизације одговарајућих комутативних теорија и послужило је као једна од мотивација за нови приступ, заснован првенствено на геометријским идејама, предложен у [47]. Теорија за скаларно поље дефинисана на модификованој Хајзенберговој алгебри, чија је једна репрезентација коначна матрична алгебра, пружа могућност да се ГВ-модел посматра на потпуно другачији начин. ГВ-модел се овде добија као ϕ^4 дејство за скаларно поље које пропагира у закривљеном некомутативном простору. Хармонијски члан у том случају може да се интерпретира као неминимална интеракција скаларног поља са кривином позадинске геометрије. Овакав приступ на природан начин објашњава нарушење транслационе инваријантности у ГВ-моделу. Позадински некомутативни простор, који се назива модификована Хајзенбергова алгебра, је у овом случају резултат коначног одсецања матрица и затварања бесконачнодимензионе репрезентације Хајзенбергове алгебре. Добијена алгебра, као што је речено, има коначнодимензионе матричне репрезентације помоћу којих је у тетрадном формализму [33] могуће дефинисати закривљену тродимензиону геометрију са торзијом. Релевантна дводимензиона геометрија је добијена димензионом редукцијом на дводимензиони потпростор. Ова димензиона редукција може да се посматра као некомутативни аналогон Калуца-Клајнове редукције. Резултујућа алгебра има исту структуру као Мојалов простор на нивоу алгебре, али има богатију структуру на нивоу геометрије.

Описани метод на основу којег је конструисано дејство еквивалентно ГВ-моделу је могућа општа прескрипција за конструкцију ренормализабилних теорија дефинисаних на некомутативноим просторима. Тако би потенцијално ренормализабилан модел могао да се добије као дејство за дато поље дефинисано на закривљеном некомутативном простору где би кривина или торзија имале улогу регулатора. Као што ћемо видети, ова процедура није у потпуности једнозначна и њена доследна примена се компликује повећањем комплексности поља за које се дејство конструише.

На основу горе поменутог метода, на модификованој Хајзенберговој алгебри, конструисли смо геометријски аналогон за фермионско поље

[48], за који се испоставило да је, уз одређену идентификацију, еквивалентан ВТ-теорији. Сличан приступ је примењен за $U(1)$ Јанг-Милсову теорију, која се после КК-редукције своди на интеракциону теорију која садржи скаларно и градијентно поље [49]. Класичне особине овог модела су веома добре. Наиме, постоје вакуумска решења која дају тривијалан вакуум, а уз то је успостављена и БРСТ-инваријантност. Пертурбативна квантизација је започета у [50], где су израчунате дивергенције у првом реду по константи интеракције за градијентно поље. Добијене дивергенције су логаритамске и односе се на тедпол дијаграме. Двочестичне дивергенције које су пронађене, могу да се уклоне ренормализацијом масе и таласне функције, док су тедпол дијаграми остали, што сугерише нестабилност тривијалног вакуума при квантним флуктуацијама. У [51] смо наставили рачунање квантних корекција на нивоу једне петље за овај модел. Успели смо да пронађемо систематски начин да израчунамо и упоредимо дивергентне интеграле са више параметара. Ово нам је омогућило да саберемо и упоредимо појединачне доприносе. Резултат је постојање нелокалних ИЦ-дивергенција облика $\Box^{-1}$ и $\Box^{-2}$. Како се ови чланови не појављују у класичном дејству, закључујемо да је почетна теорија нееренормализабилна.

Наставак текста је организован на следећи начин. У наредном поглављу ћемо навести неке од проблема са којима се суочава некомутативна теорија поља на Мојаловом простору. Направићемо кратак преглед постојећих теорија дефинисаних на Мојаловом простору са неким техничким детаљима и увешћемо терминологију неопходну за разумевање даљег текста. У поглављу 3 ћемо дефинисати објекте и појмове у некомутативној диференцијалној геометрији и описати некомутативну верзију тетрадног формализма. У четвртом поглављу ћемо се упознати са особинама модификоване Хајзенбергове алгебре и приказати како се успоставља веза између геометријског модела за скаларно поље и ГВ-теорије. У поглављу 5 ћемо описати поступак конструкције ренормализабилне теорије за спиноре. У шестом поглављу ћемо дати детаље рачуна квантних корекција на нивоу једне петље за модел из [49] и описаћемо метод регуларизације који смо користили за добијање резултата. У закључку ћемо анализирати добијене резултате и предложити неке од могућности за побољшање модела. У додатку су дати детаљи рачуна.

2 Проблеми квантне теорије поља на Мојаловом простору

У овом поглављу ћемо се осврнути на Мојалов простор и један број теорија поља формулисаних на овом некомутативном простору. У првом одељку ћемо да наведемо неке основне особине Мојаловог простора, а у наредним одељцима ћемо набројати неке од најважнијих особина до сада формулисаних теорија поља. Теорије поменуте у уводу ћемо приказати са више техничких детаља. У овом, као и у наредном поглављу нема наших оригиналних доприноса и она служе искључиво да употпуне текст који следи како би се резултати које смо добили разумели у једном ширем контексту. Ниво излагања ће бити минималан, а детаљнији прикази и прецизнија математичка формулација могу да се пронађу у [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 33, 39] и припадајућим референцама.

2.1 Мојалов простор

Некомутативна геометрија је уопштење обичне диференцијалне геометрије. Ово уопштење се своди на уопштење асоцијативне комутативне C^* алгебре координата и функција на некомутативну C^* алгебру. Тако координате могу да се посматрају као оператори на Хилбертовом простору $\mathcal{H}$, који генеришу алгебру (некомутативни простор) и задовољавају комутационе релације облика

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}(x), \tag{2.1}$$

$\mu, \nu = 1, \dots d$, где је d димензија деформисаног простора. Постоји веома широка класа некомутативних простора дефинисаних на овај начин, а најједноставнији и највише проучаван је Мојалов простор или θ-деформисан простор. У случају Мојаловог простора, комутатор (2.1) одговара компонентама константне симплектичке форме на $\mathbb{R}^d$, репрезентоване у канонском базису матрицом

$$\theta^{\mu\nu} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

У наставку ћемо видети последице овакве редефиниције алгебре на којој је заснована геометрија. У лимесу $\theta^{\mu\nu} \to 0$ алгебра координата постаје комутативна. Овакав гранични прелаз се назива *комутативни лимес* и код Мојаловог простора је тривијалан добро дефинисан, за разлику од бројних примера некомутативних простора који постоје у литератури [33]. Репрезентације и математичка структура Мојаловог простора и функција дефинисаних на њему су доста испитиване и добро схваћене [52].

Да бисмо мотивисали правила везана за производе функција дефинисаних на θ-деформисаном простору посматраћемо базис равних таласа, који су својствене функције извода

$$\partial_\mu e^{ik\cdot x} = ik_\mu e^{ik\cdot x}. \tag{2.3}$$

Како генератори алгебре x^μ сада задовољавају

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

где је $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$, очекује се да производ два равна таласа не буде комутативан. Због константне некомутативности развој у Бејкер-Кемпбел-Хаусдорфовој формули је нулти после првог комутатора, па следи

$$e^{ik\cdot x} \cdot e^{ip\cdot x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu p_\nu} e^{i(k+p)\cdot x} \neq e^{ip\cdot x} \cdot e^{ik\cdot x}. \tag{2.5}$$

Још једна веома важна последица некомутативности је и нелокалност физичких теорија дефинисаних на овом простору. Наиме, ако је дата произвољна функција $\phi(x)$, тада ће множење равним таласом да је транслира

$$e^{ik\cdot x} \cdot \phi(x) \cdot e^{-ikx} = e^{-\theta^{\mu\nu} k_\mu \partial_\nu} \phi(x) = \phi(x^\mu - \theta^{\mu\nu} k_\nu). \tag{2.6}$$

Нелокалност је већа са порастом импулса и видимо да у комутативном лимесу ($\theta^{\mu\nu} \to 0$) нестаје (Више детаља и графички приказ се могу наћи у [39, 59]). Касније ће се испоставити да се на овај начин унета нелокалност у теорију има значајне реперкусије. Између осталог, претпоставља се да ова инхерентна нелокалност, у случају θ-деформисаног простора има везе са појавом нелокалног члана у ренормализованом дејству [56].

Алгебра функција на θ-деформисаном простору може да се схвати као алгебра обичних функција на $\mathbb{R}^d$ са производом који је деформисан. На основу једначина (2.3) и (2.5), овај некомутативни асоцијативни производ је облика [52]

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x \partial_\nu^y} \phi_1(x)\phi_2(y)|_{y\to x}. \tag{2.7}$$

Производ (2.7) се у литератури најчешће назива Мојал-Вајлов или Груневолд–Мојалов производ. У комутативном лимесу овај производ се своди на обичан производ функција, а комутатор координатних функција задовољава комутациону релацију

$$[x^\mu \overset{\star}{,} x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Једна веома важна последица овако дефинисаног производа је цикличност интеграла. Наиме, у случају интеграла Мојал-Вајловог производа две функције некомутативни ефекти изостају, па се интеграл своди на обичан интеграл комутативних функција [52]

$$\int \phi_1 \star \phi_2 = \int d^d x\, (\phi_1 \star \phi_2)(x) = \int d^d x\, \phi_1(x)\phi_2(x). \tag{2.9}$$

Ово може лако да се види ако опет посматрамо развој функција у базису равних таласа. Интеграција $\int d^d x$ израза (2.5) због члана $e^{i(k+p)\cdot x}$

ће дати делта функцију $\delta(p+k)$ па ће аргумент експонента $e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu p_\nu}$ бити нула због антисиметричности $\theta^{\mu\nu}$. Особина (2.9) за последицу има инваријантност на цикличну пермутацију функција у производу под интегралом

$$\begin{aligned}\int \phi_1 \star \phi_2 \star \cdots \star \phi_n &= \int \phi_2 \star \cdots \star \phi_n \star \phi_1 \\ &= \int d^dx\, (\phi_2 \star \cdots \star \phi_n)(x) \cdot \phi_1(x),\end{aligned} \tag{2.10}$$

па се интеграл понаша као траг.

Све претходно изнето у овом одељку може да се формулише са већом математичком прецизношћу. Наиме, није све функције могуће развити у базису равних таласа, па због тога цео формализам може конзистентно да се заснује на простору Шварцових функција са брзо опадајућим изводима за које постоје Фуријеови развоји. Ово је прво урађено за фазни простор у квантној механици. За више детаља видети [52, 58].

2.2 Скаларна теорија

Прву некомутативну верзију теорије за скаларно поље на четвородимензионом Мојаловом простору са еуклидском метриком разматрао је Филк [60], који је извео и одговарајућа Фајнманова правила. У питању је ϕ^4 теорија са Мојал-Вајловим производом

$$S(\phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi \star \partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi \right). \tag{2.11}$$

Због особине (2.9), прва два члана у дејству, билинеарна по пољима, се своде на исти облик као у комутативном случају. То има за последицу да пропагатор изгледа исто као у комутативној теорији

$$G(p) = \frac{1}{p^2+m^2}. \tag{2.12}$$

Насупрот томе, за интеракциони члан из правила за Мојал-Вајлов производ следи

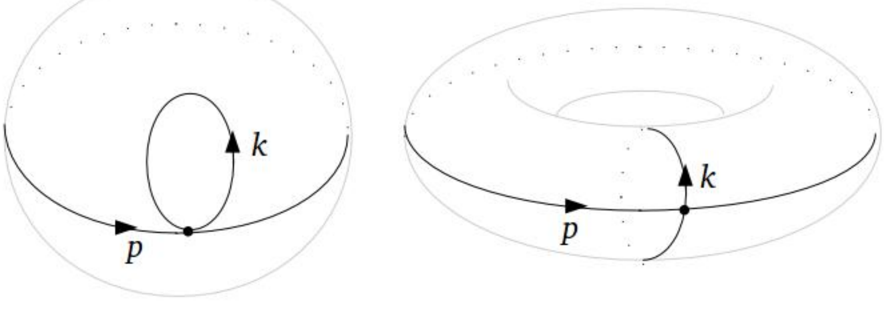
$$S_{\text{int}} = \int d^4x \frac{\lambda}{4!}(\phi \star \phi \star \phi \star \phi)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^8} \int \left(\prod_{i=1}^{4} dk_i^4 \right) \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4) \\ &\quad \times e^{ik_1x} \star (e^{ik_2x} \star (e^{ik_3x} \star e^{ik_4x})) \\ &= \int \frac{\prod_{i=1}^4 dk_i^4}{(2\pi)^4} \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4) \\ &\quad \times \delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3+k_4) e^{-\frac{i}{2}(k_1\times k_2 + k_1 \times k_3 + k_2 \times k_3)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где је уведена ознака $k \times p = k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu$. Из последњег следи да у некомутативном случају постоји модификација вертекса у виду фазног фактора

$$V(k_1,k_2,k_3,k_4) \to \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} k_i \times k_j \right) V(k_1,k_2,k_3,k_4), \tag{2.14}$$

при чему су k_i улазни импулси. Вертекс $\phi \star \phi \star \phi \star \phi$ допушта само цикличне пермутације, што при квантним поправкама теорије узрокује постојање два типа контракција, а самим тим и два типа нееквивалентних дијаграма. Контракције суседних поља у производу дају планарне дијаграме. Ови дијаграми су петље које могу да се утопе у раван или сферу. Контракције несуседних поља дају непланарне дијаграме, које је могуће утопити у површи вишег генуса. Постојање непланарних дијаграма је искључива последица некомутативности теорије.



Слика 2.1: Планарни и непланарни дијаграми

Минвала и Ван Рамсдонк [18] су показали да постојање непланарних дијаграма рађа нову врсту ИЦ дивергенција. Ове ИЦ дивергенције за последицу имају феномен УВ/ИЦ-мешања. Конкретно, сопствена енергија скаларног поља на нивоу једне петље за планарне дијаграме је корекција облика

$$\Gamma^{(2)}_{1\,p} = \frac{\lambda^2}{3(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2+m^2}, \tag{2.15}$$

чији је допринос уобичајена квадратна УВ-дивергенција као и у некомутативном случају. У случају непланарних дијаграма, корекција је

$$\Gamma^{(2)}_{1\,np} = \frac{\lambda^2}{6(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2+m^2} e^{ik\times p} = \frac{\lambda^2}{24\pi^2}\sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1\left(m^2\tilde{p}^2\right), \tag{2.16}$$

при чему је $\tilde{p}^\mu = \theta^{\mu\nu}p_\nu$, а K_1 модификована Беселова функција. За велике вредности спољашњег импулса p, овај допринос је коначан, али за мало p има водећи члан облика $\tilde{p}^{-2}$, што представља квадратну ИЦ-дивергенцију. Ово води ка УВ/ИЦ-мешању зато што када $\tilde{p} \to 0$ осцилаторни члан, који брзим осцилацијама регуларизује уобичајене УВ-дивергенције, нема више то својство. Резултујућа квадратна УВ-дивергенција се тада појављује у облику ИЦ-дивергенције. Непланарни дијаграми могу да се појаве као саставни делови дијаграма у вишим редовима, па ће интеграција по унутрашњем импулсу петље вишег реда одговарати спољашњем импулсу непланарног поддијаграма (ово укључује и мале вредности импулса), што ово мешање чини нетривијалним. Штавише, ова врста дивергенције није локална па не може да се апсорбује корекцијом масеног члана у почетном дејству, чинећи ϕ^4 теорију на Мојаловом простору нererенормализабилном.

Једно решење проблема УВ/ИЦ-дивергенција, уједно и прво, дали су Гросе и Вулкенхар, додајући осцилаторни члан у дејство (2.11). Резултујућа теорија [19, 20]

$$S(\phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi \star \partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\Omega^2(\tilde{x}_\mu\phi)\star(\tilde{x}^\mu\phi) + \frac{m^2}{2}\phi\star\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi\right), \tag{2.17}$$

при чему је $\tilde{x}_\mu = 2(\theta^{-1})_{\mu\nu}x^\nu$, а Ω реални параметар, позната је као Гросе-Вулкенхаров модел. У овом моделу је манифестно нарушена транслациона инваријантност због експлицитне координатне зависности дејства. Због особине (2.9) у квадратним члановима дејства (2.17) може да се изостави Мојал-Вајлов $\star$-производ и замени обичним множењем па теорија има облик

$$S(\phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \tilde{x}^2 \phi^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi \right), \qquad (2.18)$$

одакле се види да је пропагатор инверз оператора $-\Delta + \Omega^2\tilde{x}^2 + m^2$. Овако модификовани пропагатор је познат под називом Мелеров кернел. Ефекат присуства Мелеровог кернела је ублажавање како УВ, тако и ИЦ-дивергенција. У координатном простору у четири димензије Мелеров кернел је [61]

$$C(x,y) = \frac{\Omega^2}{\theta^2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{sh}^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2}\,\mathrm{cth}(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2}\,\mathrm{th}(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - m^2 t}, \qquad (2.19)$$

где је $\tilde{\Omega} = 2\Omega/\theta$. Нарушење транслационе инваријантности се види и из облика Мелеровог кернела, тј. $C(x,y) \neq C(x-y)$.

Гросе-Вулкенхарово дејство (2.18) има симетрију која повезује УВ и ИЦ секторе теорије, односно неку врсту дуалности између теорије у координатном и импулсном простору. Ову симетрију су уочили Лангман и Сабо у случају ϕ^4 скаларног поља на Мојаловом простору, па се по њима ова дуалност назива Лангман-Сабова (ЛС)-дуалност [21]. Испоставило се да слободни део теорије (2.11) нема ову врсту симетрије, а да је за њено успостављање неопходан хармонијски члан какав поседује ГВ-модел. Гросе и Вулкенхар су облик дејства добили као ренормализациону поправку, а онда се показало да је тако модификовано дејство (2.18) и ЛС-дуално. Може да се каже да ова трансформација дуалности повезивањем УВ и ИЦ сектора поништава и УВ/ИЦ мешање јер ЛС-дуални члан има улогу контрачлана који компензује ИЦ-дивергенцију потеклу од кинетичког члана [31].

Наиме, логика која стоји иза ЛС-дуалности је једноставна. Ако се, као у [21], посматра хамилтонијан за линеарни хармонијски осцилатор у квантној механици

$$H(x;\Omega) = -\frac{d^2}{dx^2} + \Omega^2 x^2, \qquad (2.20)$$

где је $\Omega > 0$ и x координата, онда је Фурије трансформисани хамилтонијан

$$\tilde{H}(p;\Omega) = -\Omega^2 \frac{d^2}{dp^2} + p^2 = -\frac{d^2}{d(p/\Omega)^2} + \Omega^2(p/\Omega), \tag{2.21}$$

где p одговара импулсу, односно

$$\tilde{H}(p;\Omega) = \Omega^2 H(p;\Omega^{-1}) = H(\Omega^{-1}p;\Omega) \tag{2.22}$$

Ово за последицу има УВ/ИЦ-дуалност $x \leftrightarrow \Omega^{-1}p$, то јест, таласна функција основног стања, до на рескалирање једнака свом Фуријеовом трансформу.

Како су на Мојаловом простору изводи дефинисани преко импулса $\partial_\mu \phi = [p_\mu \overset{\star}{,} \phi]$, односно $p_\mu = -i(\theta^{-1})_{\mu\nu} x^\mu = -i\tilde{x}_\mu$ и како важи идентитет $\{\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi\} = 2\tilde{x}_\mu \phi$ следи

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + 2\Omega^2(\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) = -\frac{1}{2}[\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi] \star [\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi] + \frac{\Omega^2}{2}\{\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi\} \star \{\tilde{x}^\mu \overset{\star}{,} \phi\}. \tag{2.23}$$

Одавде видимо да замена комутатора антикомутатором

$$[\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi] \leftrightarrow \{\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} \phi\} \tag{2.24}$$

оставља ГВ дејство (2.18) форм-инваријантним до на рескалирање

$$S[\phi; m, \lambda, \Omega] \leftrightarrow \Omega^2 S\left[\phi, \frac{m}{\Omega}, \frac{\lambda}{\Omega^2}, \frac{1}{\Omega}\right], \tag{2.25}$$

што је еквивалентно ономе што је илустровано квантномеханичким примером, односно првој једнакости у (2.22).

Као што је наведено већ у уводу, хармонијски члан у Гросе-Вулкенхаровом дејству због експлицитне координатне зависности нарушава транслациону инваријантност. Нешто касније предложена је транслационо инваријантна ϕ^4 теорија која је ренормализабилна. Ову теорију предложили су Гуро, Мањен, Ривасо и Танаса [26] и доказали њену ренормализабилност помоћу МС-анализе. Теорија се добија додавањем нелокалног члана. Оригинално формулисана у импулсном простору

$$S(\phi) = \int d^4p \left(\frac{1}{2} p_\mu \phi \, p^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi\phi + \frac{1}{2}\frac{a}{\theta^2 p^2}\phi\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi \right). \tag{2.26}$$

ова теорија има пропагатор

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + \frac{a}{\theta^2 p^2}} \tag{2.27}$$

који у граничном случају малих спољашњих импулса има особину

$$\lim_{p \to 0} G(p) = 0, \tag{2.28}$$

што за последицу има регуларизацију ИЦ дивергенција сопствене енергије непланарних дијаграма. Са друге стране овај члан не утиче на УВ сектор. Ово омогућава ренормализабилност зато што уклања ИЦ дивергенције непланарних поддијаграма који би ушли у састав дијаграма вишег реда манифестујући се као УВ дивергенције. Последица тога је одсуство УВ/ИЦ мешања.

Особина ове теорије је постојање нелокалног $1/p^2$ члана који у координатном простору има облик

$$S_{\rm nl}(\phi) = -\int d^4x \, \phi(x) \star \frac{a^2}{\tilde{\Box}} \star \phi(x), \tag{2.29}$$

где је $\tilde{\Box} = \theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial^\rho$, а $\int d^4x \, \Box^{-1}$ је Гринова функција за оператор $\Box$ и представља скраћени запис за израз $\int d^4x \int d^4x'(x-x')^{-2}$ у којем се експлицитно види нелокалност. Физичка интерпретација било каквог нелокалног члана у дејству није једноставна. Оно што је извесно, јесте да се нелокалност из Мојаловог производа овде експлицитно види као квантна поправка (2.29). У [62, 63] је овај модел додатно анализиран.

2.3 Спинорска теорија

Постоји више покушаја да се особине ГВ-модела, када је у питању ренормализација и УВ/ИЦ-мешање за скаларно поље, генерализује и на друга поља; спинорско и градијентно. Непосредно уопштење би се односило на конструкцију лагранжијана чији је пропагатор Мелеров кернел. Једна таква конструкција за спиноре је дата дејством [27]

$$\mathcal{S}_8 = \int \bar{\psi}\mathcal{D}_8\psi = \int \bar{\psi}\big(i\Gamma^\mu\partial_\mu + \Omega\Gamma^{\mu+4}\tilde{x}_\mu\big)\psi. \tag{2.30}$$

Ово дејство је дефинисано на простору спинора $\psi(x^\mu)$, $\mu = 1, \dots 4$ који имају дуплирану димензију спинорске репрезентације $\{\Gamma^k, \Gamma^l\} = 2\delta^{kl}$, $k, l = 1, \dots 8$. Избор спинорске репрезентације је условљен потребом да квадрат пропагатора одговара Мелеровом кернелу. Квадрат овако дефинисаног Дираковог оператора је

$$\mathcal{D}_8^2 = (-\Delta + \Omega^2 \tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu)\mathbb{1} + \Sigma \tag{2.31}$$

где је $\Sigma = i\Omega(\theta^{-1})_{\mu\nu}[\Gamma^\mu, \Gamma^{\nu+4}]$ координатно-независна матрица. До на константну матрицу Σ, (2.31) је управо хамилтонијан безмасеног ГВ-модела. Дејство (2.30), које су конструисали Гросе и Вулкенхар је такође ренормализабилно. Оно што није јасно у овом моделу, као што је већ напоменуто у уводу, јесте интерпретација овако дуплиране спинорске репрезентације.

Познат је још један начин да се добије ренормализабилно дејство за фермионе. Ова конструкција се своди на налажење корена хармонијског потенцијала из ГВ-модела и њу је предложио Вињ-Турнер [31, 30]. Кинетички члан добијеног фермионског дејства у две димензије је

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{VT} &= \int \bar{\psi} \mathcal{D}_{VT} \psi + V(\bar{\psi}\psi) \\ &= \int \bar{\psi}\big(-i\not{\partial} + \Omega\not{\tilde{x}} + \tilde{m} + \kappa\gamma\big)\psi + V(\bar{\psi}\psi), \end{aligned} \tag{2.32}$$

где је $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$, Диракова контракција и $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$. Матрица γ је аналогон матрице γ_5 у четири димензије, а члан $\kappa\gamma$, који нарушава парност, се добија као контрачлан за масивне спиноре. Дејство (2.33) представља некомутативну екстензију Грос-Невоовог дејства. Последица комбиновања спинорске структуре и некомутативности $\star$-производа за последицу има интеракциони члан који се састоји од оријентабилних вертекса облика

$$\bar{\psi}_a \star \psi_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b, \qquad \psi_a \star \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_b, \qquad \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_a \star \psi_b$$

док су неоријентабилне интеракције облика

$$\bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_a \star \psi_b, \qquad \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \star \psi_a, \qquad \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \psi_b,$$

при чему су a и b спинови или боје. Теорија са оријентабилним вертексима је ренормализабилна, иако $\mathcal{D}_{VT}^2$ не одговара кинетичком члану ГВ-модела. Пропагатор за ово дејство је

$$C(x,y) = -\frac{\Omega}{\theta\pi}\int\limits_0^\infty dt \frac{e^{-t\tilde{m}^2}}{\operatorname{sh} 2\tilde{\Omega}t}\, e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2}\operatorname{cth} 2\tilde{\Omega}t(x-y)^2} + i\Omega x \wedge y \tag{2.33}$$

$$\times\Big(i\tilde{\Omega}\operatorname{cth} 2\tilde{\Omega}t(\not{x} - \not{y}) + \Omega(\tilde{\not{x}} - \tilde{\not{y}}) - m\Big)e^{-2i\Omega t\gamma\Theta^{-1}\gamma}, \tag{2.34}$$

где је $\tilde{\Omega} = 2\Omega/\theta$ и $x\wedge y = 2x\Theta^{-1}y$. Овај модел је ренормализабилан упркос томе што постоји УВ/ИЦ-мешање. УВ/ИЦ-мешање је регуларизовано контрачланом који нарушава парност.

2.4 Градијентна теорија

Слична логика као у случају скаларног поља може да се примени и код екстензије на теорије са градијентним пољем. Дакле, идеја је да се нађе дејство чији кинетички члан ће да да пропагатор који може да пригуши УВ/ИЦ мешање, као што то чини Мелеров кернел када је у питању скаларно поље. Оно што је у случају градијентног поља додатни проблем, јесте да директна генерализација осцилаторног члана коришћењем градијентног потенцијала $\Omega^2\tilde{x}^2 A_\mu A^\mu$ нарушава градијентну инваријантност.

Начин да се напише дејство које је по конструкцији градијентно инваријантно је дат у [35, 64]. Ова теорија је названа „индукова градијентна теорија”. Коришћењем идентитета (2.23) ГВ-дејство може да се напише у следећем облику

$$S_0 = \int d^4x\Big(\frac{1}{2}\phi\star[\tilde{x}_\mu \overset{*}{,} [\tilde{x}^\mu \overset{*}{,} \phi]] + \frac{\Omega^2}{2}\phi\star\{\tilde{x}_\mu \overset{*}{,} \{\tilde{x}^\mu \overset{*}{,} \phi\}\}$$

$$+ \frac{\mu^2}{2}\phi\star\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi\Big)(x). \tag{2.35}$$

Увођењем калибрационе групе $\mathcal{U}$, унитарних елемената на Мојаловом простору, за неко $u \in \mathcal{U}$, скаларна поља се трансормишу при дејству групе на следећи начин

$$\phi \mapsto u^* \star \phi \star u. \tag{2.36}$$

Како се координате x^μ не трансформишу при дејству групе, због некомутативности комбинација $x^\mu \star \phi$ није инваријантна на ове трансформације. Проблем се решава увођењем *коваријантних координата*

$$\tilde{X}^\mu = \tilde{x}^\mu + igA^\mu, \tag{2.37}$$

где је g константа интеракције. Градијентна поља се при деловању групе $\mathcal{U}$ трансформишу као

$$A_\mu \mapsto igu^* \star \partial_\mu u + u^* \star A_\mu \star u = gu^*[\tilde{x}_\mu \overset{\star}{,} u] + u^* \star A_\mu \star u, \tag{2.38}$$

следи да се комбинација

$$\tilde{X}^\mu = \tilde{x}^\mu + igA^\mu \tag{2.39}$$

трансформише у придруженој репрезентацији групе $\mathcal{U}$,

$$\tilde{X}^\mu \mapsto u^* \star \tilde{X}^\mu \star u. \tag{2.40}$$

Због цикличности $\star$-производа, и начина на који се трансформишу коваријантне координате, може да се направи дејство које је аналогно ГВ-моделу, али за коваријантне координате, односно

$$\begin{aligned}\tilde{S}_0(\tilde{X}, \phi) = \int d^4x \Big(& \frac{1}{2}\phi \star [\tilde{X}_\mu \overset{\star}{,} [\tilde{X}^\mu \overset{\star}{,} \phi]] + \frac{\Omega^2}{2}\phi \star \{\tilde{X}_\mu \overset{\star}{,} \{\tilde{X}^\mu \overset{\star}{,} \phi\}\} \\ & + \frac{\mu^2}{2}\phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi \Big)(x).\end{aligned} \tag{2.41}$$

То одговара минималној замени у којој скаларно поље интерагује са спољашњим класичним градијентним потенцијалом и по конструкцији, ово дејство је градијентно инваријантно. Додатно, оно поседује ЛС-дуалност, односно симетрију на замену комутатора антикомутатором $[\tilde{X}_\mu \overset{\star}{,}\,] \leftrightarrow \{\tilde{X}_\mu \overset{\star}{,}\,\}$. Следећи корак је интеграција по пољу ϕ, при чему се ово поље губи из дејства. Интеграција може да се изврши развојем топлотног кернела [64], или пак директним рачунањем квантних поправки, као у [35], да се на нивоу једне петље дејство (2.41) модификује логаритамски дивергентним чланом. Укључивањем тог члана у дејство добија се

$$\tilde{S}_{(1)}(A) = \int d^4x \Bigg(\frac{12}{\theta}(1-\rho^2)(\tilde{\mu}^2 - \rho^2)(\tilde{X}_\mu \star \tilde{X}^\mu - \tilde{x}^2) \\ + 6(1-\rho^2)^2\Big((\tilde{X}_\mu \star \tilde{X}^\mu)^{\star 2} - (\tilde{x}^2)^2\Big) + \rho^4 F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} \Bigg), \tag{2.42}$$

где су ρ и $\tilde{\mu}$ параметри који зависе од Ω и μ. Јачина поља може да се изрази преко коваријантних координата

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu \stackrel{\star}{,} A_\nu], \qquad (\theta^{-1})_{\mu\nu} - gF_{\mu\nu} = \{\tilde{X}_\mu \stackrel{\star}{,} \tilde{X}_\nu\} \tag{2.43}$$

Иако се не очекује да би квантне корекције у вишим редовима даље модификовале дејство, недостатак ове теорије је нелинеарност, односно постојање нетривијалног вакуума, што значајно отежава пертурбативну квантизацију.

Алтернативни модел са осцилаторним чланом у којем фигурише градијентно поље, чије класично дејство није градијентно инваријантно, али се градијентна симетрија постиже додавањем духова је предложен у [36] и додатно анализиран у [65]. Ово дејство је по конструкцији БРСТ инваријантно. Модел је дефинисан следећим дејством

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= S_{inv} + S_m + S_{gf}, \\ S_{inv} &= \frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}, \\ S_m &= \frac{\Omega^2}{4}\int d^4x \Big(\frac{1}{2}\{\tilde{x}_\mu \stackrel{\star}{,} A_\nu\} \star \{\tilde{x}^\mu \stackrel{\star}{,} A^\nu\} + \{\tilde{x}_\mu \stackrel{\star}{,} \bar{c}\} \star \{\tilde{x}^\mu \stackrel{\star}{,} c\}\Big) \\ &= \frac{\Omega^2}{8}\int d^4x (\tilde{x}^\mu \star \mathcal{C}^\mu), \\ S_{gf} &= \int d^4x \Big(B \star \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2} B \star B - \bar{c} \star \partial_\mu s A^\mu - \frac{\Omega^2}{8}\tilde{c}_\mu \star s\mathcal{C}^\mu\Big), \end{aligned} \tag{2.44}$$

где је поље B Лагранжев множитељ, који уводи нелинеарно фиксирање калибрације

$$\frac{\delta S^{(0)}}{\delta B} = \partial_\mu A^\mu - B + \frac{\Omega^2}{8}\Big([\{\tilde{x}_\mu \stackrel{\star}{,} c\} \stackrel{\star}{,} \tilde{c}^\mu] - \{\tilde{x}_\mu \stackrel{\star}{,} [\tilde{c}^\mu \stackrel{\star}{,} c]\}\Big) = 0, \tag{2.45}$$

а $\tilde{c}^\mu$ представља множитељ који гарантује БРСТ инваријантност на једначинама кретања. Дејство (2.45) је инваријантно на БРСТ трансформације

$$\begin{aligned} &sA_\mu = D_\mu c = \partial_\mu c - ig[A_\mu \stackrel{\star}{,} c], \qquad s\bar{c} = B, \qquad sc = igc \star c, \\ &sB = 0, \qquad s\tilde{c}_\mu = \tilde{x}_\mu, \qquad sB = 0, \qquad s\tilde{x}^\mu = 0, \qquad s^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.46}$$

При овим трансформацијама $\tilde{c}^\mu$ се трансформише у x^μ па члан из S_{gf} који садржи $\tilde{c}_\mu$ поништава S_m. Коришћењем трансформација (2.46) дејство (2.45) постаје

$$S^{(0)} = \int d^4x \Bigg(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} + s\Big(\bar{c} \star \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \bar{c} \star B + \frac{\Omega^2}{8} \tilde{c}_\mu \star \mathcal{C}^\mu \Big) \Bigg). \tag{2.47}$$

Испоставља се да се и за ово дејство пропагатори своде на Мелеров кернел. Због постојања градијентне инваријантности, очекивало и се да ниво дивергенције квантних поправки дејства (2.47) на нивоу једне петље буде блажи. Међутим, за $\Omega \neq 0$, нефизички тедпол дијаграми $\int \tilde{x}_\mu A^\mu$ и $\int \tilde{x}_\mu \tilde{x}^2 A^\mu$ не нестају, што сугерише да је пертурбативни развој направљен око погрешног вакуума, као и у случају индуковане теорије. Такође, рачунањем двочестичних корелационих функција на нивоу једне петље, показује се да је особина трансферзалности $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ није задовољена, као и да постоје логаритамске УВ и квадратне ИЦ дивергенције које се у лимесу $\Omega \to 0$, своде на

$$\Pi^{div}_{\mu\nu}(p) = \frac{2g^2}{\pi^2} \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{(\tilde{p}^2)^2} + \text{логаритамске УВ дивергенције}, \tag{2.48}$$

при чему се добијене логаритамске УВ дивергенције већ налазе у индукованој теорији.

Пратећи логику транслационо инваријантног $1/p^2$ модела, предложена је његова екстензија за векторско $U(1)$ поље. Модел је предложен у [66], а квантне корекције на нивоу једне петље су додатно анализиране у [67]. Овај модел, који је калибрационо инваријантан, садржи додатни нелокални члан за векторско поље. Међутим нелокални члан који се појављује као контрачлан у теорији

$$\int d^4x\, \tilde{F} \star \frac{1}{(\tilde{D}^2)^2} \star \tilde{F}, \qquad \tilde{F} = \theta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

не обезбеђује потребну регуларизацију која би ублажила проблем УВ/ИЦ мешања. Уместо тога, предложен је модел

$$S_{inv} = \frac{1}{4}\int d^4x \left(F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \star \frac{a'^2}{D^2\tilde{D}^2} \star F^{\mu\nu}\right), \tag{2.50}$$

где је:

$$\frac{1}{\tilde{D}^2} \star \tilde{D}^2 = 1, \qquad \tilde{D}^2 = \tilde{D}^\mu \star \tilde{D}^\mu, \qquad \tilde{D}_\mu = \theta_{\mu\nu} D^\nu, \tag{2.51}$$

а D је уобичајени коваријантни извод. Уз фиксирање калибрације, ова теорија је додатно и БРСТ инваријантна, са градијентно фиксирајућим чланом дејства који је БРСТ егзактан. Градијентни еквивалент оператора $\Box^{-1}$ је диференцијални оператор $1/D^2\tilde{D}^2$. Када овај оператор делује на јачину поља, развој у ред који је градијентно инваријантан резултује бесконачним бројем вертекса за градијентно поље. Овај проблем може да се реши увођењем помоћног поља за које се испоставља да има независну динамику. Импликације и надоградња овог модела су рамотрени у [97] и каснијим рефернцама и превазилазе оквире нашег раматрања.

У овом поглављу навели смо неке моделе теорије поља на Мојаловом простору и указали на поједине битне особине и недостатке ових модела. У наредном поглављу ћемо увести геометријске концепте на којима је заснована једна интерпретација ренормализабилних теорија за скаларно и спинорско поље да бисмо након тога анализирали градијентни модел који почива на оваквој геометријској интерпретацији.

3 Тетрадни формализам

За опис гравитационог поља у општој теорији релативности користи се математички апарат диференцијалне геометрије. Објекти који стоје у основи оваквог описа су многострукости и раслојења, док се релевантни физички контекст добија идентификацијом простор-времена са датим објектима. Ова идентификација се обезбеђује увођењем додатних структура као што су метрика и конексија. На овај начин се закривљени простор опште теорије релативности опрема појмовима дужине и паралелног преноса, који имају јасно интуитивно утемељење и представљају елементе помоћу којих могу да се искажу физички закони. Додатно, на класичном нивоу из принципа каузалности следи да би ова формулација требало да буде локална. Сви поменути геометријски објекти, као и концепт локалности такође леже у опису градијентних теорија, чија је геометријска основа раслојење одговарајуће градијентне групе, па се претходно речено односи на опис свих фундаменталних интеракција, а не само гравитације. У случају градијентних теорија, конексија представља поље које преноси интеракцију.

Појму конексије може да се приступи на два различита начина. Ова два приступа су различита како концептуално, тако и историјски [69]. Први начин подразумева стандардну Риманову геометрију која полази од метрике и помоћу ње дефинисане Леви-Чивита конексије. Ајнштајнова теорија гравитације у себи садржи ове елементе. Други начин, који је настао нешто касније, је Картанова формулација тетрадног базиса и помоћу њега дефинисане конексије. Картанов тетрадни базис је привилеговани базис са аспекта принципа еквиваленције јер се у овом базису локално не осећа гравитационо поље, па је дефинисање свих објеката који већ постоје у равном простору природно. Последњи приступ је општији и из њега следи Риманова геометрија. Картанова формулација гравитације, која се назива Ајнштајн-Картанова теорија, инкорпорира ширу класу објеката, као што су спинори, омогућавајући укључивање интеракције гравитационог поља са фермионским пољима материје.

У некомутативној геометрији, због некомутативности координата, појам тачке нема смисла па се поставља питање дефиниције локалности. Један од могућих одговора на ово питање је замена особине локалности особином леве и десне линеарности [10]. Посебну улогу у овој дефиницији има некомутативна верзија тетрадног базиса јер овај базис 1-форми комутира са свим елементима алгебре. Ова Мадорова конструкција се природно надовезује на Конову екстензију појма диференцијала у случају некомутативних алгебри. Диференцијални рачун је у овом случају одређен захтевом да метрика има одговарајући класични лимес, а идеја се своди на дефинисање аналогона паралелизабилне многострукости која има глобално дефинисан тетрадни базис [78]. По аналогији са Картановим формализмом у комутативном случају могуће је, након увођења диференцијала, дефинисати конексију, а потом и торзију и кривину конексије. На тај начин тетрадни формализам у некомутативној геометрији обезбеђује везу између некомутативне геометрије и гравитације. У примерима које ћемо размотрити гравитација је нединамичка и унапред задата обликом алгебре којом описујемо позадинску некомутативну геометрију. Касније ћемо видети да некомутативна верзија тетрадног формализма омогућава формулацију диференцијалног рачуна на матричним просторима што, ако се узме у обзир могућа матрична дискретизација простора, са аспекта теорије поља може да има значајне последице у смислу коначности и ренормализационих својства. У наставку поглавља ће бити дат преглед овог приступа.

3.1 Тетрадни формализам у комутативној диференцијалној геометрији

У овом одељку ћемо дати преглед основних појмова стандардне диференцијалне геометрије како бисмо фиксирали ознаке и термине које ћемо користити у даљем тексту. То ће бити учињено без превелике тежње за оригиналношћу, а степен математичке прецизности неће бити већи од неопходног за даље излагање. Ознаке су стандардне за ову област, а прецизније дефиниције и више детаља могу да се нађу у [33, 87, 71, 69], што представља примарни извор дефиниција и једначина у овом одељку.

Централни појам у диференцијалној геометрији је *многострукост*. Грубо речено, n-димензионална многострукост M, је Хаусдорфов тополошки простор који је локално хомеоморфан са $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^{1,n-1}$ у случају локалне идентификације многострукости са простором Минковског). Овај локални хомеоморфизам омогућава да се у околини неке тачке на многострукости уведу локалне координате x^μ, $\mu = 1, \ldots, n$. Када се уведу локалне координате на многострукости, онда може да се уведе и комутативна, асоцијативна алгебра $C(M)$ коју чине функције координата $f : M \to \mathbb{R}$, $x^\mu \mapsto f(x)$. У наставку се претпоставља се да је у питању алгебра глатких функција $C^\infty(M)$ на многостукости.

У околини неке тачке p на многострукости може да се дефинише *крива* $c(t)$ која полази из p, као скуп n једнаопараметарских функција $c : [0,1] \to M$, $t \mapsto x^\mu(t)$. Интуитивно, тангента у тачки p на криву $c(t)$ дефинише вектор чији се смер поклапа са почетним смером криве. Да би се прецизно дефинисао овај вектор, потребна је помоћна функција n координата $f \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ дефинисана у околини тачке p. Тада може да се дефинише *тангентни вектор* на криву $c(t)$ у тачки p $(t = 0)$ као дејство диференцијалног оператора на функцију $Xf = df(c(t))/dt$. Применом ланчаног правила $Xf = \partial_\mu f \dot{x}^\mu = X^\mu \partial_\mu f$, где је $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ и $X^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu/dt$, види се да је ова дефиниција независна од избора функције $f \in C(M)$

$$X = X^\mu \partial_\mu. \tag{3.1}$$

Из тачке p на n-димензионалној многострукости може да пође n различитих кривих у правцима који одговарају линеарно независним векторима из $\mathbb{R}^n$ јер у случају довољно мале околине нема разлике између $\mathbb{R}^m$ и M. На тај начин тангентни вектори у некој тачки $p \in M$ образују *тангентни простор* T_pM. Овај линеарни векторски простор је исте димензије као и многостукост.

Облик у којем можемо да напишемо тангентни вектор (3.1) на природан начин дефинише базис парцијалних извода ∂_μ у тачки p који се назива *координатни базис*. Чињеница да је X диференцијални оператор додатно мотивише и увођење појма *векторског поља*, које се дефинише као *деривација* алгебре $C(M)$, односно линеарно пресликавање $X : C(M) \to C(M)$ које задовољава Лајбницово правило:

$$X(fg) = (Xf)g + fXg. \tag{3.2}$$

Све деривације алгебре $C(M)$ образују векторски простор $\mathcal{X}(M)$. Овај векторски простор је *леви* $C(M)$*-модул*. То значи да ако $f \in C(M)$ и $X \in \mathcal{X}(M)$ тада и $fX \in \mathcal{X}(M)$. Аналогно се дефинише и *десни* $C(M)$-*модул*, као десно дејство елементима алгебре . У комутативном случају $C(M)$ је у исто време и леви и десни модул, односно $C(M)$-*модул*.

Тангентни простор се добија тако што се фиксира тангентни вектор X који делује на било коју функцију $f \in C(M)$ на кривој $c(t)$ која полази из тачке $p \in M$. Ако се уместо фиксираног тангентног вектора X, фиксира функција f и размотре све могуће криве које полазе из p, може да се дефинише линеарни функционал $df : T_p(M) \to \mathbb{R}$ који се назива *диференцијал функције* f и он представља дејство функције на векторско поље дато $df(X) = Xf$.

Линеарни функционали дефинисани на коначнодимензионом векторском простору образују дуални векторски простор исте димензије. Базисни вектори овог дуалног простора природно могу да се дефинишу као диференцијали координате који делују на базисне векторе координатног базиса $dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu x^\mu = \delta^\mu_\nu$. На овакав начин се дефинишу дуални базисни вектори у координатној репрезентацији. Векторски простор дуалан T_pM се назива *котангентни простор* $T_p^\star M$, а његови базисни вектори називају се *диференцијалне 1-форме.* У координатној репрезентацији 1-форме су диференцијали координата dx^μ. Котангентна векторска поља су 1-форме и могу да се развију у координатном базису 1-форми $\zeta = \zeta_\mu \, dx^\mu$.

Да би могла да се дефинише дужина вектора на многострукости, неопходно је да се, у овом случају локално, уведу структуре које поседује метрички простор. *Метрика* је симетрично тензорско поље ранга $(0, 2)$ дефинисано билинеарним пресликавањем $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. У координатном базису метрички тензор је $g = g_{\mu\nu} \, dx^\mu \otimes dx^\nu$, где су компоненте метрике $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu \otimes \partial_\nu)$, док особина билинеарности подразумева линеарност по сваком од фактора $g(f\partial_\mu \otimes \partial_\nu) = g(\partial_\mu \otimes f\partial_\nu) = fg_{\mu\nu}$. Инверзна метрика се дефинише као билинеарно пресликавање $g^{-1} : T_pM^* \times T_pM^* \to \mathbb{R}$ и у координатној репрезентацији је $g^{\mu\nu} = g(dx^\mu \otimes dx^\nu)$, тако да $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$. Елемент дужине написан у координатном базису је

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3.3}$$

где се тензорски производ међу базисним 1-формама подразумева.

Осим координатног базиса, који је довољан за нека разматрања у физици, постоји потреба за дефинисањем *Картановог покретног базиса* или *тетраде.* Вектори тетраде се дефинишу тако да локално имају равну метрику $g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha \otimes e_\beta)$. У случају еуклидске сигнатуре $g = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$. Ако се развију у координатном базису

$$e_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu, \tag{3.4}$$

и искористи особина билинеарности, следи

$$g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha^\mu \partial_\mu \otimes e_\beta^\nu \partial_\nu) = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu g_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

1-форме у тетрадном базису се дефинишу постављањем захтева $\theta^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$. Дуалне један форме тетрадног базиса такође могу да се развију у координатном базису

$$\theta^\alpha = \theta_\mu^\alpha dx^\mu, \tag{3.6}$$

где коефицијенти развоја задовољавају $\theta^\alpha_\mu e^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$. Елемент дужине у овом базису је

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \tag{3.7}$$

Из једначине (3.7) се види да скаларни производ базисних вектора θ^α формира репрезентацију групе $SO(n)$. Инверзија релације (3.5) се добија по аналогији, $g_{\mu\nu} = \theta^\alpha_\mu \theta^\beta_\nu g_{\alpha\beta}$. Индексе координатног базиса означавамо словима из средине грчког алфабета, $(\mu, \nu, \rho, \ldots)$, а индексе тетрадног базиса словима са почетка грчког алфабета $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

Од посебног интереса за даљу дискусију су антисиметрични тензори вишег ранга настали антисиметризацијом директног производа 1-форми. Ови тензори ранга $(0, p)$ називају се *диференцијалне p-форме.* Базисна 2-форма се добија антисиметричним множењем две базисне 1-форме. Тако је базисна 2-форма у тетрадном базису

$$\theta^\alpha \wedge \theta^\beta = \theta^\alpha \otimes \theta^\beta - \theta^\beta \otimes \theta^\alpha. \tag{3.8}$$

Диференцијална 2-форма је линеарна комбинација базисних 2-форми $\zeta = \frac{1}{2}\zeta_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$. У наставку нећемо писати антисиметрични производ између форми, али ћемо га подразумевати $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \equiv \theta^\alpha \theta^\beta$. По аналогији се дефинишу и форме вишег реда. Овде се користи конвенција по којој је p-форма развијена у покретном базису са погодним фактором нормирања

$$\zeta = \frac{1}{p!}\, \zeta_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}\, \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_p}. \tag{3.9}$$

Простор свих p-форми на многострукости M димензије n је линеарни векторски простор димензије $\binom{n}{p}$ и биће означаван са $\Omega^p(M)$. Форме су, због антисиметричности, дефинисане само уколико је $p \leq n$. Форма максималног степена је n-форма и њу називамо *елемент запремине.* Множење (3.8) се назива *спољашњи производ форми.* Спољашњи производ p-форме ζ и q-форме ξ је $p + q$-форма, где је $p + q \leq n$, дефинисано као билинеарно пресликавање $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$ које задовољава услов градиране симетрије $\zeta\, \xi = (-1)^{pq} \xi\, \zeta$.

Спољашњи извод p-форме је пресликавање $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ које задовољава услов нилпотентности $d^2 = 0$ и градирано Лајбницово правило

$$d(\zeta\,\xi) = (d\zeta)\xi + (-1)^p\zeta d\xi, \tag{3.10}$$

где је ζ p-форма. У базису тетраде за p-форму ζ, спољашњи извод је облика

$$d\zeta = \frac{1}{p!}e_\alpha\zeta_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\theta^\alpha\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_p}. \tag{3.11}$$

Елементи координатног базиса међусобно комутирају, $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Насупрот томе, елементи локалног ортонормираног базиса, у општем случају нису комутативни. Њихов комутатор је линеарна комбинација базисних вектора

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta}e_\gamma. \tag{3.12}$$

Структурне константе ове алгебре $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$, зову се *Ричијеви коефицијети ротације.* Ако се израчуна комутатор два базисна вектора локалног ортонормираног базиса $[e_\alpha, e_\beta] = e_\alpha e^\mu_\beta\partial_\mu - e_\beta e^\mu_\alpha\partial_\mu = (e_\alpha e^\mu_\beta - e_\beta e^\mu_\alpha)\theta^\gamma_\mu e_\gamma$ и то упореди са једначином (3.12), могу да се прочитају Ричијеви коефицијенти

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = \theta^\gamma_\mu(e_\alpha e^\mu_\beta - e_\beta e^\mu_\alpha). \tag{3.13}$$

Налажењем спољашњег извода базисне 1-форме тетраде $d\theta^\gamma = d\theta^\gamma_\mu dx^\mu = (e_\alpha\theta^\gamma_\mu)\theta^\alpha e^\mu_\beta\theta^\beta$ и после антисиметризације и примене Лајбницовог правила $d\theta^\gamma = -\frac{1}{2}\theta^\gamma_\mu(e_\alpha e^\mu_\beta - e_\beta e^\mu_\alpha)\theta^\alpha\theta^\beta$, упоређивањем са (3.13), налазе се *структурне једначине*

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}C^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta^\beta\theta^\gamma. \tag{3.14}$$

У општем случају тетрада зависи од тачке на многострукости, $d\theta^\alpha \neq 0$, што сугерише да је простор закривљен.

Конексија или *коваријантни извод* је пресликавање које је деривација $D : \Omega^\star(M) \to \Omega^1(M)\otimes\Omega^\star(M)$, такво да задовољава градирано Лајбницово правило (3.10). Додатно се захтева да се коваријантни извод редукује на спољашњи извод када делује на функције, а дејство на базисне 1-форме је у тетрадном базису дефинисано релацијом

$$D\theta^\alpha = -\omega^\alpha{}_\beta\theta^\beta. \tag{3.15}$$

Овим су дефинисане *1-форме конексије* $\omega^{\alpha}{}_{\beta}$, које могу да се развију у базису тетраде $\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\theta^{\gamma}$. Из захтева $D(\theta^{\alpha}(e_{\beta})) = 0$, се налази

$$De_{\alpha} = \omega^{\beta}{}_{\alpha}e_{\beta}. \tag{3.16}$$

Конексија је *метрички компатибилна*, односно *коваријантно равна* ако

$$Dg_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.17}$$

На основу (3.15), (3.16) и дефиниције коваријантног извода, следе изрази за коваријантне изводе 1-форми $\zeta = \zeta_{\alpha}\theta^{\alpha}$ и векторских поља $X = X^{\alpha}e_{\alpha}$

$$D\xi = (d\xi_{\alpha} - \omega^{\beta}{}_{\alpha}\xi_{\beta})\theta^{\alpha}, \tag{3.18}$$

$$DX = (dX^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta})e_{\alpha}. \tag{3.19}$$

Торзија T^{α} и *кривина* $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$ су 2-форме дате Картановим структурним једначинама:

$$T^{\alpha} = d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta} \tag{3.20}$$

$$\Omega^{\alpha}{}_{\beta} = d\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta}. \tag{3.21}$$

Ове једначине представљају уопштење Френе-Сереовних једначина за криве површи [69].

За многострукост (M, g) опремљену метриком, може да се дефинише Хоџов $*$-дуал као пресликавање $* : \Omega^{p}(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$ које је у координатном и тетрадном базису респективно:

$$^{*}dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p} = \frac{\sqrt{|\mathrm{det}g|}}{(n-p)!}\epsilon^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\dots\mu_n}dx^{\mu_{p+1}}\cdots dx^{\mu_n}, \tag{3.22}$$

$$^{*}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_p} = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p}{}_{\alpha_{p+1}\dots\alpha_n}\theta^{\alpha_{p+1}}\cdots\theta^{\alpha_n}. \tag{3.23}$$

Мера интеграције на n-димензионалној многострукости је инваријантни елемент запремине, односно n-форма Θ која се дефинише као Хоџов дуал јединице. У координатном базису, то је

$$\Theta = {}^{*}1 = \frac{\sqrt{|g|}}{n!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_n}dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_n} = \sqrt{|g|}dx^1\cdots dx^n \equiv \sqrt{|g|}d^nx, \tag{3.24}$$

а у тетрадном

$$\Theta = \frac{1}{n!}\epsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_n} = \theta^1\cdots\theta^n. \tag{3.25}$$

3.2 Тетрадни формализам у некомутативној диференцијалној геометрији

У наставку овог поглавља представићемо некомутативну верзију Картановог тетрадног формализма. Направићемо осврт на детаље развијене у [72, 79, 74, 75, 76, 77] и систематизоване и примењене у [33, 78], где је на више примера илустровано да овај приступ представља један природан начина да се опише гравитација под претпоставком некомутативности координата. Важну улогу у квантизацији геометрије игра избор диференцијалног рачуна и ту посебно место има тетрадни формализам зато што омогућава неку врсту принципа кореспонденције који даје одговарајући класични лимес.

Овде ћемо да представимо уопштење претходно уведених појмова и дефиниција, у случају када уместо многострукости разматрамо некомутативну асоцијативну алгебру $\mathcal{A}$. Ова алгебра је генерисана елементима које ћемо звати *координате*, а као и у комутативном случају координате ће бити облежене са x^μ. Наравно, овде не постоји локална идентификација $\mathcal{A}$ и $\mathbb{R}^n$ зато што $\mathcal{A}$ није многострукост него алгебра. У овом случају не постоји ни појам димензије у стандардном смислу [33]. Алгебру $\mathcal{A}$, у даљем тексту ћемо звати *некомутативни простор.*

Некомутативни простор $\mathcal{A}$ је дефинисан комутационим релацијама

$$[x^\mu, x^\nu] = iJ^{\mu\nu}(x). \tag{3.26}$$

У случају Мојаловог производа $J^{\mu\nu}(x) = \theta^{\mu\nu}$ су, како смо видели, биле компоненте константне антисиметричне матрице. За разлику од комутативног случаја, функције координата $f(x^\mu)$ овде припадају некомутативном простору $\mathcal{A}$. Због тога се векторска поља дефинишу као пресликавања $X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ која су деривације и задовољавају Лајбницово правило

$$X(fg) = (Xf)g + fXg. \tag{3.27}$$

Последица некомутативности је нелинеарност простора деривација. Наиме, простор деривација $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ није ни леви ни десни $\mathcal{A}$-модул. Производ функције g и векторског поља X више не задовољава Лајбницово правило $gX(fh) = gX(f)h + gfXh \neq gX(f)h + fgXh$, те није векторско поље $gX \notin \mathcal{X}(\mathcal{A})$, односно $\mathcal{X}$ није леви модул. Аналогно важи за Xg.

Специфичност некомутативних простора је постојање *унутрашњих извода*, који се дефинишу као комутатори са елементима алгебре $\mathcal{A}$

$$Xf = [p, f]. \tag{3.28}$$

$p \in \mathcal{A}$. Када генеришу тетраду, елементи алгебре p се називају *импулси* по аналогији са квантном механиком. Унутрашњи изводи су деривације, односно $[p, fg] = f[p, g] + [p, f]g$. У комутативној диференцијалној геометрији парцијални изводи ∂_μ су елементи тангентног простора. Они су спољашњи и не припадају самој многострукости M, [71]. Насупрот томе у случају алгебре коначних матрица, као што ћемо видети у наредном поглављу, сви изводи су унутрашњи и припадају алгебри.

Скуп векторских поља, као што смо показали, није затворен при множењу функцијама. Ако се додатно размотри дуални простор 1-форми, који је линеарни векторски простор, не може да се очекује да ће правила која су важила у комутативном случају бити иста. За 1-форме $\zeta, \xi \in \Omega^1(\mathcal{A})$ и функцију $f \in \mathcal{A}$ у општем случају $f\zeta \neq \zeta f$ и $\zeta\xi \neq -\xi\zeta$.

Некомутативни аналогон тетрадног базиса може да послужи као основа за дефинисање диференцијалног рачуна. Како некомутативни простор $\mathcal{A}$ локално није $\mathbb{R}^n$, постоји потешкоћа у конструкцији спољашњег извода. Међутим, могуће је да се изабере тетрадни базис у којем су компоненте метрике локално константне, што је могуће лако показати. Ако се метрика дефинише као билинеарно пресликавање $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{g} \mathcal{A}$, односно

$$g^{\alpha\beta} = g(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta), \qquad fg^{\alpha\beta} = g(f\theta^\alpha \otimes \theta^\beta) = g(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta f) = g^{\alpha\beta} f, \tag{3.29}$$

види се да то имплицира да компоненте метрике $g^{\alpha\beta}$ припадају центру алгебре $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, што значи да су оне локално константне, односно да је простор локално раван. Локално равна метрика $[\,g^{\alpha\beta}, x^{\mu}\,] = 0$ због линеарности $g(\theta^{\alpha} \otimes \theta^{\beta})x^{\mu} - x^{\mu} g(\theta^{\alpha} \otimes \theta^{\beta}) = g(\,[\theta^{\alpha}, x^{\mu}] \otimes \theta^{\beta})$ је последица услова [47]

$$[\,\theta^{\alpha}, x^{\mu}] = 0. \tag{3.30}$$

Спољашњи диференцијални рачун, који ћемо користити у наставку је заснован на управо овом избору, односно на исказу да тетрадне 1-форме комутирају са елементима алгебре.

Деривације e_{α}, односно базисна векторска поља у тетрадном базису се дефинишу као објекти дуални 1-формама овог базиса θ^{α}

$$\theta^{\alpha}(e_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{3.31}$$

Одавде непосредно следи $f\theta^{\alpha}(e_{\beta}) = f\delta^{\alpha}_{\beta} = (\theta^{\alpha} f)(e_{\alpha})$, односно

$$[f, \theta^{\alpha}] = 0, \tag{3.32}$$

што је сагласно избору (3.30).

Нека је функција f елемент алгебре $\mathcal{A} = \Omega^{0}(\mathcal{A})$ ($\Omega^{p}(\mathcal{A})$ је ознака за простор p-форми дефинисаних на $\mathcal{A}$). Диференцијал функције је пресликавање $d : \Omega^{0}(\mathcal{A}) \to \Omega^{1}(\mathcal{A})$ дефинисано као

$$df = (e_{\alpha} f)\theta^{\alpha}. \tag{3.33}$$

Како би се конструисале форме вишег реда, потребно је да се дефинише спољашњи производ 1-форми. Тензорски производ два простора $\Omega^{1}(\mathcal{A})$ се означава са $\Omega^{1}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{1}(\mathcal{A})$. Ова ознака сугерише полилинеарност, односно поистовећивање елемената $\zeta f \otimes \xi$ и $\zeta \otimes f\xi$ за $\zeta, \xi \in \Omega^{1}(\mathcal{A})$ и $f \in \mathcal{A}$. Простор 2-форми $\Omega^{2}(\mathcal{A})$ је подмодул тензорског производа $\Omega^{1}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{1}(\mathcal{A})$ и дефинисан је пресликавањем $\pi : \Omega^{1}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{1}(\mathcal{A}) \to \Omega^{2}(\mathcal{A})$ које је пројекција дата правилом $\zeta\xi = \pi(\zeta \otimes \xi) \in \Omega^{2}(\mathcal{A})$, за $\zeta, \xi \in \Omega^{1}(\mathcal{A})$, а у сагласности је са релацијом којом је задата алгебра [10, 33]. У наставку може да се види да овај избор није једнозначан.

Када постоји тетрадни базис θ^α, могућа је експлицитна конструкција простора 2-форми као пресликавање $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} \Omega^2(\mathcal{A})$ дато релацијом

$$\theta^\alpha \theta^\beta = \pi(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta) = P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \theta^\gamma \otimes \theta^\delta, \tag{3.34}$$

где $P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \in Z(\mathcal{A})$. Како је π пројекција, захтева се идемпотентност

$$\theta^\alpha \theta^\beta = P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \theta^\gamma \theta^\delta \tag{3.35}$$

што имплицира пројекциону релацију

$$P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} P^{\gamma\delta}{}_{\iota\kappa} = P^{\alpha\beta}{}_{\iota\kappa}. \tag{3.36}$$

Конструкција простора виших форми $\Omega^p(\mathcal{A})$ може да се настави, у случајевима када је то могуће, сличном логиком уз поштовање алгебарских ограничења. За 3-форме ограничења су Јанг-Бакстерове релације [33]. Простор свих форми на некомутативном простору $\mathcal{A}$ је директни збир $\Omega^*(\mathcal{A}) = \oplus_p \Omega^p(\mathcal{A})$.

Претходно је дефинисан диференцијал функције, који може да се уопшти на спољашњи извод форме произвољног степена. *Спољашњи извод* је пресликавање $d : \Omega^p(\mathcal{A}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{A})$, које је асоцијативно, задовољава градирано Лајбницово правило и $d^2 = 0$. Подразумевани захтев је да диференцијал буде у сагласности са релацијама којима је задата алгебра. Избор уређеног пара $(\Omega^*(\mathcal{A}), d)$ представља *диференцијални рачун* на $\mathcal{A}$.

Претходно изнете дефиниције могу да се илуструју примером, [33, 78, 47]. Размотримо најједноставнији алгебру (3.26), када је некомутативност константна, $J^{\mu\nu} = \mathrm{const}$, као у случају Мојаловог простора. Да бисмо могли да разматрамо и комутативни лимес, комутациону релацију којом дефинишемо овај некомутативни простор написаћемо у облику

$$[x^\mu, x^\nu] = i\hbar J^{\mu\nu}, \tag{3.37}$$

где је параметар $\hbar$, мера некомутативности. Комутативни лимес је у овом случају једноставан, $\hbar \to 0$. Диференцирањем (3.37) се добија

$$d[x^\mu, x^\nu] = [dx^\mu, x^\nu] + [x^\mu, dx^\nu] = i dJ^{\mu\nu}. \tag{3.38}$$

Како је $J^{\mu\nu}$ константа, може да се претпостави

$$[x^\mu, dx^\nu] = 0, \tag{3.39}$$

односно, да 1-форме комутирају са елементима алгебре. То значи да 1-форме dx^μ, могу да буду идентификоване са тетрадним базисом помоћу релације

$$\theta^\alpha = \delta^\alpha_\mu dx^\mu. \tag{3.40}$$

Поновним дејством диференцијала, из услова $d^2 = 0$ додатно следи да 1-форме међусобно антикомутирају

$$\{dx^\mu, dx^\nu\} = dx^\mu dx^\nu + dx^\nu dx^\mu = 0, \tag{3.41}$$

тако да је за овакав избор алгебре и диференцијала алгебра 1-форми иста као у комутативном случају, односно

$$P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta \delta^\beta_\gamma) \equiv \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}. \tag{3.42}$$

Ово није општи случај у некомутативној геометрији јер простор константне некомутативности (3.26) не представља најопштији облик некомутативне алгебре.

Спољашњи извод 1-форме θ^α је 2-форма која може да се развије у базису 2-форми

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}C^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta^\beta\theta^\gamma. \tag{3.43}$$

Ова једначина има исти облик као структурна једначина (3.14), па коефицијенте $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ можемо да интерпретирамо као некомутативни аналогон Ричијевих коефицијената ротације. Због (3.35) можемо додатно да ставимо услов

$$C^\alpha{}_{\beta\gamma}P^{\beta\gamma}{}_{\delta\eta} = C^\alpha{}_{\delta\eta}. \tag{3.44}$$

У случају алгебре (3.37), из идентификације (3.40) због $d^2 = 0$, следи да су Ричијеви коефицијенти једнаки нули, односно да је простор (3.37) глобално раван, па може да се каже да је простор константне некомутативности, некомутативна генерализација равног простора.

Ако захтевамо да деривације буду унутрашње[3], по аналогији са квантном механиком, можемо да претпоставимо да су генерисане импулсима p_α:

$$e_\alpha f = [p_\alpha, f], \tag{3.45}$$

где $p_\alpha, f \in \mathcal{A}$[4]. Из дуалности

$$\delta^\alpha_\beta = \theta^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\mu dx^\mu(e_\beta) = \delta^\alpha_\mu e_\beta(x^\mu) = \delta^\alpha_\mu [p_\beta, x^\mu]. \tag{3.46}$$

следи да је за раван некомутативни простор (3.37),

$$p_\alpha = \frac{1}{i\bar{k}} J^{-1}_{\alpha\mu} x^\mu. \tag{3.47}$$

У комутативном лимесу $\bar{k} \to 0$, импулси (3.47) су сингуларни[5]. Како су импулси линеарни по координатама, следи

$$[p_\alpha, p_\beta] = \frac{1}{(i\bar{k})^2} J^{-1}_{\alpha\mu} J^{-1}_{\beta\nu} [x^\mu, x^\nu] = -\frac{1}{i\bar{k}} J^{-1}_{\alpha\beta}. \tag{3.48}$$

Видимо да су комутационе релације (3.37) и (3.48) сличне, па алгебра $\mathcal{A}$ у овом случају алтернативно може да се генерише и помоћу импулса.

У општем случају, да би се на неком некомутативном простору дефинисао диференцијални рачун, неопходно је наћи скуп 1-форми θ^α које припадају $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Овај скуп 1-форми је у том случају тетрадни базис и његов избор није једнозначан. У случају унутрашњих деривација избор диференцијала се своди на избор скупа импулса p_α. Једно додатно ограничење које желимо да имамо је услов $d^2 = 0$, што сужава могући избор импулса. У наставку ће бити приказан поступак на основу којег се добија најопштији облик алгебре импулса, тако да претходно поменути услови буду задовољени. Примери ове конструкције могу да се нађу у [77, 75, 72, 78, 33]. У некомутативним просторима у којима је

---

[3] У матричној геометрији деривације су нужно унутрашње.

[4] У случајевима које ћемо разматрати у наредним поглављима, импулси p_α ће бити антихермитски, тако де је за реално f, израз $(e_\alpha f)$ такође реалан.

[5] У квантној механици, однос између диференцијала и извода дат је комутационом релацијом $\partial f = [p, f]$, где је класични лимес $\hbar \to 0$, укључен у дефиницију импулса $p = -i\hbar\partial$, [78].

диференцијални рачун заснован на унутрашњим изводима, могуће је дефинисати конексију или Дираков оператор [7, 77]

$$\theta = -p_\alpha \theta^\alpha, \tag{3.49}$$

тако да диференцијал (3.33) може да се напише као

$$df = [p_\alpha, f]\theta^\alpha = -[\theta, f]. \tag{3.50}$$

Ако се зада услов $d^2 = 0$, следи

$$0 = d(df) = d(-[\theta, f]) = -[d\theta + \theta^2, f], \tag{3.51}$$

што значи да и 2-форма $d\theta + \theta^2$ припада центру алгебре. У тетрадном базису, ова 2-форма може да се развије по базисним 2-формама

$$d\theta + \theta^2 = -\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \tag{3.52}$$

при чему су $K_{\alpha\beta}$ комплексни бројеви. Због (3.35) можемо додатно да ставимо услов

$$K_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = K_{\gamma\delta}. \tag{3.53}$$

Диференцијал конексије θ у тетрадном базису је

$$d\theta = d(-p_\alpha\theta^\alpha) = -dp_\alpha\theta^\alpha - p_\alpha d\theta^\alpha = -[p_\alpha, p_\beta]\theta^\alpha\theta^\beta + \frac{1}{2}p_\alpha C^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta^\beta\theta^\gamma, \tag{3.54}$$

а квадрат конексије

$$\theta^2 = p_\alpha p_\beta \theta^\alpha\theta^\beta, \tag{3.55}$$

па једначина (3.52) постаје

$$\left(p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2}C^\gamma{}_{\alpha\beta}p_\gamma + \frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\right)\theta^\alpha\theta^\beta = 0. \tag{3.56}$$

Поновним деловањем пројекције, на основу (3.35), (3.44) и (3.53) следи

$$2p_\alpha p_\beta P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + C^\alpha{}_{\gamma\delta}p_\alpha + K_{\gamma\delta} = 0. \tag{3.57}$$

Додатна ограничења долазе из идентитета $d^2 f = 0$, који употребом (3.43) и (3.50) постаје

$$0 = d(f\theta - \theta f) = \left[\left(\frac{1}{2}C^\alpha{}_{\beta\gamma} + p_\beta\delta^\alpha_\gamma + p_\gamma\delta^\alpha_\beta\right)\theta^\beta\theta^\gamma, f\right]. \tag{3.58}$$

Одавде се види да израз у загради припада $\mathscr{Z}(\mathcal{A})$, па у том случају важи

$$\left(C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + 2p_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma} + 2p_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\beta} - F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\right)\theta^{\beta}\theta^{\gamma} = 0, \tag{3.59}$$

где су $F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ комплексни бројеви. Због особина (3.44) и (3.53), следи да важи и

$$F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}P^{\beta\gamma}{}_{\delta\eta} = F^{\alpha}{}_{\delta\eta}. \tag{3.60}$$

Контракцијом (3.59) са p_{α} и заменом у (3.58), добија се да импулси задовољавају квадратну релацију

$$2p_{\alpha}p_{\beta}P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - p_{\alpha}F^{\alpha}{}_{\gamma\delta} - K_{\gamma\delta} = 0. \tag{3.61}$$

Види се да су комутативна алгебра 1-форми, као и начињени избор алгебре 1-форми у случају равног некомутативног простора дати релацијама (3.35), где су коефицијенти $P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ чист комутатор (3.42), што значи да форме искључиво антикомутирају (као у обичној геометрији). У општем случају, алгебра 1-форми може да буде градирана, односно потпуно или делимично антикомутирајућа. Ово уопштено правило спољашњег производа форми, може да се представи помоћу коефицијената

$$P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} + i\bar{k}Q^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \tag{3.62}$$

где је комутирајући део дефинисан антикомутатором

$$\{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\} = 2i\bar{k}Q^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\theta^{\gamma}\theta^{\delta}. \tag{3.63}$$

Заменом (3.62) у релацију за импулсе (3.61), добија се алгебра коју, уз претходно изнете захтеве, задовољавају импулси

$$[p_{\alpha}, p_{\beta}] = K_{\alpha\beta} + p_{\gamma}F^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - 2i\bar{k}p_{\gamma}p_{\delta}Q^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}. \tag{3.64}$$

Закључак је, да услов $d^2 = 0$ даје ограничење на основу којег је алгебра импулса у најопштијем случају квадратна. Из (3.63) и (3.64) видимо да генерално, када је алгебра импулса квадратна, 1-форме θ^{α} не антикомутирају.

Једна додатна последица ограничења које следи из услова $d^2 = 0$ је запис структурне једначине (3.43) преко коефицијената $F^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$. Замена услова (3.59) у једначину (3.43) уз дефиницију (3.49), даје

$$d\theta^{\alpha} = -\frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}\theta^{\gamma} - \{\theta, \theta^{\alpha}\}. \tag{3.65}$$

3.3 Линеарна конексија

Да бисмо могли да упоредимо тезорска поља у различитим тачкама многострукости, неопходан је појам паралелног преноса, а самим тим и конексије. У овом одељку ћемо приказати један начин да се дефинише конексија у некомутативном случају. У приступу који смо усвојили, конексију нећемо дефинисати као 1-форму на главном раслојењу, него ћемо је везати за појам коваријантног извода који је пресликавање између модула које задовољава извесна правила [9]. У класичној гравитацији, конексија је метрички компатибилна и без торзије. Овде ћемо да размотирмо ове услове детаљније. У овом одељку ћемо анализирати метрицку компатибилност, а у следећем везу између конексије и торзије.

Претпостављамо да је некомутативни простор паралелизабилан и да у свакој тачки може да се дефинише тетрада, као и коваријантни извод на њој. Да би се дефинисала линеарна конексија на некомутативном простору, неопходно је да се пре тога дефинише уопштена пермутација (флип) σ, као пресликавање

$$\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbf{\Omega^1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{\Omega^1}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}),$$

које мења редослед индекса у тензорском производу, што је назначено подебљаним записом фактора у тензорском производу, а дато је као

$$\sigma(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta) = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\,\theta^\gamma \otimes \theta^\delta, \tag{3.66}$$

где су $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ комплексни бројеви облика

$$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \delta^\alpha_\delta \delta^\beta_\gamma + i\bar{k}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \tag{3.67}$$

за које се захтева да се у комутативном лимесу сведу на $\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$.

Линеарна конексија се дефинише као пар (D, σ), *коваријантног извода* D и уопштене пермутације σ, где је коваријантни извод дат пресликавањем

$$\mathbf{\Omega^1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{D} \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbf{\Omega^1}(\mathcal{A}),$$

(подебљаним записом назначен је простор на који ово пресликавање делује) које задовољава лево Лајбницово правило

$$D(f\xi) = df \otimes \xi + fD\xi \tag{3.68}$$

као и додатно, десно Лајбницово правило [72]

$$D(\xi f) = \sigma(\xi \otimes df) + (D\xi)f. \tag{3.69}$$

Сврха оператора σ у (3.69) је да помери деловање диференцијала на лево, поштујући при томе редослед чланова у тензорском производу. Делујући коваријантним изводом на идентитете $(\xi f)g = \xi(fg)$ и $(f\xi)g = \xi(fg)$ и применом дефиниција (3.68) и (3.69), добија се да је пресликавање σ десно и лево $\mathcal{A}$-линеарно, односно

$$\sigma(\xi \otimes dfg) = \sigma(\xi \otimes df)g, \qquad \sigma(f\xi \otimes dg) = f\sigma(\xi \otimes dg). \tag{3.70}$$

На основу једначина (3.70), може да се напише следећи низ идентитета

$$fS^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\,\theta^\gamma \otimes \theta^\delta = \sigma(f\theta^\alpha \otimes \theta^\beta) = \sigma(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta f) = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\,f\theta^\gamma \otimes \theta^\delta \tag{3.71}$$

па се закључује да коефицијенти $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ припадају $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ [75]. Коваријантни извод може да се дефинише као дејство на елементе базиса

$$D\theta^\alpha = -\omega^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta^\beta \otimes \theta^\gamma = -\omega^\alpha{}_\gamma \otimes \theta^\gamma. \tag{3.72}$$

Коефицијенти конексије $\omega^\alpha{}_{\beta\gamma}$, одређени су тиме да елементи тетрадног базиса припадају центру алгебре, као и левим и десним Лајбницовим правилом.

Природан захтев, наслеђен из класичне Ајнштајнове гравитације је да конексија буде метрички компатибилна и без торзије. Симетричност метрике, по аналогији са комутативном геометријом, може да се изрази на два различита начина.

$$g \circ \pi = 0, \qquad g \circ \sigma = g. \tag{3.73}$$

Пре него што се дефинише захтев метричке компатибилности, у некомутативном случају, неопходно је да се прошири појам коваријантног извода који делује на тензорски производ $\Omega^1(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A})$. Ако се дефинише пресликавање

$$D_2 : \boldsymbol{\Omega^1}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\boldsymbol{\Omega^1}(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\boldsymbol{\Omega^1}(\mathcal{A})\otimes\boldsymbol{\Omega^1}(\mathcal{A}),$$

где је подебљаним записом назначен тензорски производ на који ово пресликавање делује, одговарајуће Лајбницово правило је [72, 77]

$$D_2(\xi\otimes\eta) = D\xi\otimes\eta + \sigma_{12}(\xi\otimes D\eta) \tag{3.74}$$

по аналогији са (3.69), где је $\sigma_{12} = \sigma\otimes\mathrm{id}_{\Omega(\mathcal{A})}$. Оператор пермутације σ_{12} делује само на прва два фактора тензорског производа зато што он има задатак да помери само први фактор у коваријантном изводу $D\xi = (D\xi_\alpha)\otimes\theta^\alpha$ на лево, остављајући базисну 1-форму θ^α на трећем месту.

Метричка компатибилност се дефинише по аналогији са комутативном геометријом на следећи начин. На основу дефиниције метрике за некомутативни простор (3.29) и екстензије дефиниције коваријантног извода (3.74), може да се конструише следећи дијаграм [72]

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A}) \arrow[r, "D_2"] \arrow[d, "g"'] & \Omega^1(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A}))\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\Omega(\mathcal{A})}\otimes g"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathcal{A})
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.75}$$

Конексија је метрички компатибилна ако је дијаграм (3.75) комутативан, што може да се изрази једначином

$$g_{23}\circ D_2(\theta^\alpha\otimes\theta^\beta) = dg(\theta^\alpha\otimes\theta^\beta) = 0, \tag{3.76}$$

где је $g_{23} = \mathrm{id}_{\Omega(\mathcal{A})}\otimes g$. Ово одговара услову метричке компатибилности $Dg^{\alpha\beta} = 0$ у комутативном случају. На основу дефиниције (3.76),

$$g_{23}\circ D_2(\theta^\alpha\otimes\theta^\beta) = g_{23}\left(D\theta^\alpha\otimes\theta^\beta + \sigma_{12}(\theta^\alpha\otimes D\theta^\beta)\right) = 0. \tag{3.77}$$

Применом дефиниција (3.72, 3.66) и особине линеарности уопштене пермутације σ, претходна једначина се своди на

$$-\omega^\alpha{}_{\gamma\delta}\, g_{23}(\theta^\gamma\otimes\theta^\delta\otimes\theta^\beta) - \omega^\beta{}_{\gamma\delta}\, S^{\alpha\gamma}{}_{\eta\iota}\, g_{23}(\theta^\eta\otimes\theta^\iota\otimes\theta^\delta) = 0, \tag{3.78}$$

а како је на основу дефиниције $g_{23}(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma) = g^{\beta\gamma}$, из претходне једначине коначно следи услов метричке компатибилности конексије

$$\omega^\alpha{}_{\gamma\delta}\, g^{\delta\beta} + \omega^\beta{}_{\gamma\delta}\, S^{\alpha\gamma}{}_{\eta\iota}\, g^{\iota\delta} = 0. \tag{3.79}$$

У комутативном лимесу је $S^{\alpha\gamma}{}_{\eta\iota} = \delta^\alpha_\iota \delta^\gamma_\eta$, па се једначина услова метричке компатибилности (3.79) своди на

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \tag{3.80}$$

односно на добро познати исказ да је метрички компатибилна конексија антисиметрична по првом и трећем индексу.

3.4 Торзија и кривина

Торзија је пресликавање $T : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A})$ дефинисано једначином

$$T = d - \pi \circ D \tag{3.81}$$

које је лево-линеарно по дефиницији [33]. Из захтева десне линеарности

$$T(\xi f) = T(\xi) f \tag{3.82}$$

применом Лајбницовог правила за d и десног Лајбницовог правила (3.69) за коваријантни извод

$$T(\xi f) = (d - \pi \circ D)(\xi f) = d\xi \otimes f - \pi(\xi \otimes df) - \pi \circ \sigma(\xi \otimes df) - \pi \circ (D\xi) f,$$

тако да се услов (3.82) своди на [77]

$$\pi \circ (\,\mathrm{id} + \sigma) = 0, \tag{3.83}$$

па је торзија уз овај услов билинеарна. Ово је услов за σ, мада се исто тако може узети као услов за π. У комутативној геометрији (3.83) представља услов за π јер су 2-форме антисиметрични тензори.

Дејство торзије на базисну 1-форму $T(\theta^\alpha)$, применом дефиниције (3.81) може да се напише у облику

$$T^\alpha = d\theta^\alpha - \pi \circ D\theta^\alpha, \tag{3.84}$$

што употребом дефиниција $(3.43, 3.34)$ и (3.72) постаје

$$T^{\alpha} = -\frac{1}{2} C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \theta^{\beta} \theta^{\gamma} + \omega^{\alpha}{}_{\delta\eta} P^{\delta\eta}{}_{\beta\gamma} \theta^{\beta} \otimes \theta^{\gamma}. \tag{3.85}$$

Услов да конексија буде без торзије се сада своди на

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} P^{\beta\gamma}{}_{\delta\eta} - \frac{1}{2} C^{\alpha}{}_{\delta\eta} = 0, \tag{3.86}$$

односно у комутативном лимесу

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} - C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0. \tag{3.87}$$

Цикличном пермутацијом једначине за конексију без торзије (3.87) и након тога, применом услова метричке компатибилности у комутативном лимесу (3.80), добија се израз за метрички компатибилну конексију без торзије у комутативном лимесу

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta\gamma} - C_{\beta\gamma\alpha} + C_{\gamma\alpha\beta}). \tag{3.88}$$

У некомутативном случају, услов да коваријантни извод нема торзију има комплексније решење. Из идентитета $D(f\theta^{\alpha}) = D(\theta^{\alpha} f)$, применом левог и десног Лајбницовог правила (3.68) и (3.69), уз дефиницију диференцијала $df = e_{\alpha} f \theta^{\alpha} = [p_{\alpha}, f]$ и (3.66) добија се да конексија мора да задовољава једначину

$$e_{\beta} f(\delta^{\beta}_{\gamma} \delta^{\alpha}_{\delta} - S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}) = [f, \omega^{\alpha}{}_{\gamma\delta}]. \tag{3.89}$$

Једно партикуларно решење ове једначине је

$$\tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma\delta} = p_{\beta}(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - \delta^{\beta}_{\gamma} \delta^{\alpha}_{\delta}), \tag{3.90}$$

односно уз дефиницију (3.67)

$$\tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma\delta} = i\hbar T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} p_{\beta}, \tag{3.91}$$

док је опште решење облика [33]

$$\omega^{\alpha}{}_{\gamma\delta} = \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma\delta} + \chi^{\alpha}{}_{\gamma\delta}, \tag{3.92}$$

где $\chi^{\alpha}{}_{\gamma\delta} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. С друге стране, може да се покаже да је коваријантни извод

$$\tilde{D}\theta^{\alpha} = -\theta \otimes \theta^{\alpha} + \sigma(\theta^{\alpha} \otimes \theta) \tag{3.93}$$

у сагласности са дефиницијама (3.68) и (3.69). Торзија која одговара конексији (3.92) је на основу дефиниције торзије (3.84) и (3.65) као и израза за коваријантни извод (3.93)

$$T^{\alpha} = -\frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}\theta^{\gamma} - \{\theta, \theta^{\alpha}\} - \pi(-\theta \otimes \theta^{\alpha} + \sigma(\theta^{\alpha} \otimes \theta) - \chi^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}\theta^{\gamma}), \tag{3.94}$$

што може да се поједностави применом захтева (3.83), чиме се добија

$$T^{\alpha} = -\frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}\theta^{\gamma} + \chi^{\alpha}{}_{\beta\gamma}, \tag{3.95}$$

па је услов да конексија буде без торзије

$$\chi^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}. \tag{3.96}$$

У том случају је конексија

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + i\bar{k}T^{\alpha\delta}{}_{\beta\gamma}p_{\delta}. \tag{3.97}$$

По аналогији са комутативном геометријом, где је $D^2 = D \wedge D$, може да се дефинише

$$D^2 = \pi_{12} \circ D_2 \circ D \tag{3.98}$$

и формално уведе *кривина* као пресликавање

$$\mathrm{Curv} : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$$

дато са

$$\mathrm{Curv} = D^2. \tag{3.99}$$

У базису тетраде је тада *2-форма кривине* $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$ дефинисана преко дејства на базисну 1-форму

$$\mathrm{Curv}(\theta^{\alpha}) = \Omega^{\alpha}{}_{\beta} \otimes \theta^{\beta}, \qquad \Omega^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\theta^{\gamma}\theta^{\delta}. \tag{3.100}$$

У општем случају, уз претходно изнете дефиниције потребно је поставити и услове који се односе на десну линеарност Curv, а у вези су са условима реалности [77, 79].

4 Модификована Хајзенбергова алгебра

Модификована Хајзенбергова алгебра је тродимензиони некомутативни простор генерисан координатама x, y и z, који представља матричну апроксимацију Хајзенбергове алгебре. Ова апроксимација је добијена коначним одсецањем бесконачнодимензионих матрица које репрезентују Хајзенбергову елгебру у Фоковом простору. Трећа координата z, која је уведена како би се ова алгебра затворила је привилеговани правац и представља некомутативни аналогон додатне Калуца-Клајнове димензије. Једна алгебарска контракција на математички конзистентан начин може да се интерпретира као димензиона редукција на xy-раван. Модификована Хајзенбергова алгебра у извесном смислу представља прелаз између квантне групе и Лијеве алгебре и има коначнодимензионе матричне репрезентације, као и континуални лимес. Диференцијална геометрија дефинисана на овом некомутативном простору, уз увођење одређених геометријски и физички мотивисаних ограничења у некомутативној верзији тетрадног формализма може добро да се дефинише и обезбеди предуслове за физички опис материје. Наш фокус, у наставку ће бити разматрање физичких импликација димензионе редукције, а пре свега утицаја некомутативне гравитације у континуалном лимесу матричног модела на ренормализабилност теорије поља.

Да бисмо описали физику помоћу теорије поља, неопходни су нам појмови непрекидности, диференцијабилности, и интеграбилности. У даљем тексту ћемо видети на који начин модификована Хајзенбергова алгебра, као пример некомутативног простора, одговара овим захтевима и да ли је могуће и у којој мери дефинисати физички релевантан комутативни лимес.

Садржај овог поглавља је у основи резултат рада [47], уз један мали део који се односи на евентуалну редефиницију елемента запремине из [48]. Након дефиниције модификованог Хајзенберговог простора коришћењем тетрадног формализма могуће је конструисати диференцијални рачун и диференцијалну геометрију на овом некомутативном простору. Испоставиће се да је модификована Хајзенбергова алгебра закривљен некомутативни простор са торзијом. После димензионе редукције, скалар кривине до на адитивну константу садржи координатну зависност која је истог облика као и хармонијски члан у Гросе-Вулкенхаровом дејству, тако да је скаларна теорија поља која описује неминималну интеракцију са позадинском геометријом еквивалентна Гросе-Вулкенхаровом дејству у две димензије. Успостављена еквиваленција обезбеђује једну физичку интерпретацију ГВ дејства и нарушења транслаторне инваријантности.

4.1 Конструкција модификоване Хајзенбергове алгебре

Модификована Хајзенбергова алгебра је матрична апроксимација Хајзенбергове алгебре

$$[x, y] = i\bar{k}. \tag{4.1}$$

Хајзенбергова алгебра може да се репрезентује бесконачнодимензионим матрицама

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\mu}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \sqrt{n-1} & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{n-1} & 0 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$y = \frac{i}{\sqrt{2}\mu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\sqrt{n-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{n-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где је μ константа која има инверзну димензију дужине. Ово је урађено по угледу на репрезентовање координате и импулса линеарног хармонијског осцилатора у својственом базису енергије (у Фоковом простору), с тим што овде координата y одговара импулсу, а фундаментална скала површине $\bar{k}$ која контролише некомутативност, одговара Планковој константи.

После одсецања бесконачнодимензионих матрица (4.2,4.3) на коначне $n \times n$ матрице

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \sqrt{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$y = \frac{i}{\sqrt{2}\mu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\sqrt{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

добија се измењена верзија Хајзенбергове алгебре

$$[x, y] = i\bar{k}(1 - \mu z), \tag{4.6}$$

која није затворена. Ова алгебра може да се затвори $n \times n$ матрицом z

$$z = \frac{n}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Матрице (4.4, 4.5) и (4.7) генеришу тродимензионалну *модификовану Хајзенбергову алгебру* или *модификовани Хајзенбергов некомутативни простор*, који је онда задат комутационим релацијама:

$$\begin{aligned} [\mu x, \mu y] &= i\epsilon\,(1 - \mu z), \qquad (4.8) \\ [\mu x, \mu z] &= i\epsilon\,(\mu y\,\mu z + \mu z\,\mu y), \\ [\mu y, \mu z] &= -i\epsilon\,(\mu x\,\mu z + \mu z\,\mu x), \end{aligned}$$

где је $\not{k} = \epsilon\mu^{-2}$. Бездимензиони параметар ϵ контролише величину некомутативности. За $\epsilon = 0$ алгебра постаје комутативна (комутативни лимес), док за $\epsilon = 1$ (значајна некомутативност) има коначнодимензионалне матричне репрезентације дате матрицама (4.4, 4.5) и (4.7). Тренутно није јасно како би алгебра била репрезентована у случају када се параметар ϵ налази између ове две вредности. Уобичајено је да се узме да су параметри ϵ и μ независни. У [47] и радовима који следе обично се користио додатни параметар μ' за z-правац зато што је овај правац привилегован[6], али у нашем разматрању ово не игра значајну улогу. Параметар μ је везан за неку значајну скалу дужине или масе (космолошка константа), или алтернативно може да се узме да је цела комбинација $\not{k}$ повезана са Планковом дужином $\sqrt{\not{k}} = l_{Pl}$, на пример.

Ако се модификована Хајзенбергова алгебра (4.8) изрази преко параметра некомутативности $\not{k} = \epsilon\mu^{-2}$

$$\begin{aligned} [x, y] &= i\not{k}\,(1 - \mu z) \qquad (4.9) \\ [x, z] &= i\not{k}\,(\mu y\,\mu z + \mu z\,\mu y) \end{aligned}$$

---

[6] Модификовани Хајзенбергов простор је аксијално симетричан, а генератор ротација је $\mathcal{M} = \frac{\mu}{2}(\mu x^2 + \mu y^2 + z)$, [80].

$$[y,z] = -i\bar{k}\,(\mu x\,\mu z + \mu z\,\mu x),$$

очигледно је да Инону-Вигнерова контракција $\mu \to 0$ редукује (4.9) на Хајзенбергову алгебру (4.1). Ово формално може да се репрезентује слабим лимесом $n \to \infty$, а да се геометријски интерпретира као пројекција на потпростор $z = 0$.

У тетрадном формализму дефинишемо диференцијал избором импулса. Овај избор није једнозначан и неће сваки могући избор импулса дати диференцијални рачун који има смисла. Раније смо видели да захтев $d^2 = 0$ ограничава избор алгебре импулса у најопштијем случају на квадратну алгебру (3.64), коју ћемо овде да напишемо у облику

$$[p_\alpha, p_\beta] = \frac{1}{i\epsilon} K_{\alpha\beta} + p_\gamma F^\gamma{}_{\alpha\beta} - 2i\epsilon p_\gamma p_\delta Q^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}. \tag{4.10}$$

Структурни елементи $K_{\alpha\beta}$, $F^\gamma{}_{\alpha\beta}$ и $Q^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}$ су одређени додатним условима као што су облик спољашње алгебре, метричка компатибилност или конексија без торзије. На пример, коефицијенти $Q^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}$ одређују облик спољашње алгебре 1-форми (3.63). Сви ови услови сужавају могући избор импулса на

$$\epsilon p_1 = i\mu^2 y, \qquad \epsilon p_2 = -i\mu^2 x, \qquad \epsilon p_3 = i\mu(\mu z - \frac{1}{2}), \tag{4.11}$$

при томе је овај избор скоро јединствен. Модификација избора импулса је детаљније приказана у [49]. Из релација (4.11) се види да се при редукцији на потпростор $z = 0$, импулси p_1 и p_2 своде на импулсе у равном простору (3.48). Алгебра импулса (4.11) је

$$\begin{aligned} [p_1, p_2] &= \frac{\mu^2}{2i\epsilon} + \mu p_3 \qquad (4.12)\\ [p_2, p_3] &= \mu p_1 - i\epsilon(p_1 p_3 + p_3 p_1)\\ [p_3, p_1] &= \mu p_2 - i\epsilon(p_2 p_3 + p_3 p_2), \end{aligned}$$

одакле поређењем са (4.10) директно могу да се прочитају ненулти структурни коефицијенти:

$$K_{12} = \frac{\mu^2}{2}, \quad F^1{}_{23} = \mu, \quad Q^{13}{}_{23} = Q^{23}{}_{31} = \frac{1}{2}. \tag{4.13}$$

Из релација (4.8) и (4.12) се такође види да су структурне константе ${Q^{\gamma\delta}}_{\alpha\beta}$ симетричне по горњим и антисиметричне по доњим индексима, па су ненулте и сртуктурне константе

$$ {Q^{13}}_{23} = {Q^{31}}_{23} = -{Q^{13}}_{32}, \quad {Q^{23}}_{31} = {Q^{32}}_{31} = -{Q^{23}}_{13}. \tag{4.14} $$

Спољашња алгебра 1-форми θ^α је у потпуности одређена структурним константама ${Q^{\gamma\delta}}_{\alpha\beta}$, па из једначина (4.13) и (4.14) следи

$$ \begin{aligned} &(\theta^1)^2 = 0, \qquad (\theta^2)^2 = 0, \qquad (\theta^3)^2 = 0, \qquad \{\theta^1, \theta^2\} = 0, \\ &\{\theta^1, \theta^3\} = i\epsilon(\theta^2\theta^3 - \theta^3\theta^2), \qquad \{\theta^2, \theta^3\} = i\epsilon(\theta^3\theta^1 - \theta^1\theta^3). \end{aligned} \tag{4.15} $$

Видимо да је простор 2-форми $\Omega^2(\mathcal{A})$ тродимензионалан, као и у обичној геометрији. Због асоцијативности спољашњег производа можемо да направимо проширење спољашње алгебре на алгебру 3-форми $\Omega^3(\mathcal{A})$. Множењем једначина (4.16) базисним 1-формама θ^α са леве и десне стране, добијају се елементи $\Omega^3(\mathcal{A})$:

$$ \begin{aligned} &\theta^1\theta^3\theta^1 = \theta^2\theta^3\theta^2, \qquad \theta^3\theta^1\theta^3 = 0, \qquad \theta^3\theta^2\theta^3 = 0, \\ &\theta^1\theta^2\theta^3 = -\theta^2\theta^1\theta^3 = \theta^3\theta^1\theta^2 = -\theta^3\theta^2\theta^1 = i\,\frac{\epsilon^2 - 1}{2\epsilon}\,\theta^2\theta^3\theta^2, \\ &\theta^1\theta^3\theta^2 = -\theta^2\theta^3\theta^1 = i\,\frac{\epsilon^2 + 1}{2\epsilon}\,\theta^2\theta^3\theta^2. \end{aligned} \tag{4.16} $$

Из ових релација се види да постоји само једна линеарно независна 3-форма Θ коју дефинишемо као

$$ \Theta = \frac{1}{2i\epsilon}\theta^2\theta^3\theta^2. \tag{4.17} $$

Постојање јединственог елемента запремине је веома значајна импликација претходно дефинисаног диференцијалног рачуна зато што ће касније омогућити дефинисање интеграције. Ово је од кључне важности за исказивање физичких теорија преко дејства које изражавамо као запремински интеграл густине лагранжијана. Комутативни лимес може да се види ако се релације (4.16) напишу у облику

$$ [\theta^1, \theta^2]\theta^3 = \theta^3[\theta^1, \theta^2] = 2(1 - \epsilon^2)\Theta, \quad [\theta^2, \theta^3]\theta^1 = \theta^1[\theta^2, \theta^3] = 2\Theta, $$

$$[\theta^2,\theta^3]\theta^2 = -\theta^2[\theta^2,\theta^3] = 2i\epsilon\Theta, \qquad [\theta^3,\theta^1]\theta^2 = \theta^2[\theta^3,\theta^1] = 2\Theta,$$
$$[\theta^3,\theta^1] = -\theta^1[\theta^3,\theta^1] = -2i\epsilon\Theta. \tag{4.18}$$

На основу (4.18) се види да у комутативном лимесу,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Theta = \theta^1\theta^2\theta^3 \tag{4.19}$$

што значи да је елемент запремине $\mathrm{Vol} = \Theta$ јединствен и добро дефинисан.

4.2 Диференцијална геометрија

Већ смо видели да је услов (3.32) да елементи покретног базиса комутирају са елементима алгебре довољан да уведемо метрички тензор који у покретном базису има константне компоненте. Изабраћемо еуклидску метрику

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4.20}$$

где је α, $\beta = 1,2,3$. На основу релације (3.50) и дефиниције тетраде

$$dx^\mu = [p_\alpha, x^\mu]\theta^\alpha = e^\mu_\alpha\theta^\alpha \tag{4.21}$$

и комбиновањем (4.8) и (4.12) добијају се изрази за диференцијале

$$\begin{aligned} dx &= (1-\mu z)\theta^1 + \mu^2\{y,z\}\theta^3, \\ dy &= (1-\mu z)\theta^2 - \mu^2\{x,z\}\theta^3, \\ dz &= \mu^2\{x,z\}\theta^1 + \mu^2\{y,z\}\theta^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

После редукције на потпростор $z = 0$, видимо да је котангентни простор и даље тродимензионалан. Ово није неуобичано у некомутативној геометрији и такви случајеви су анализирани раније [8]. Из (4.22) можемо да прочитамо елементе тетраде

$$e^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\mu z & 0 & \mu^2\{y,z\} \\ 0 & 1-\mu z & \mu^2\{x,z\} \\ \mu^2\{x,z\} & \mu^2\{y,z\} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

На основу избора (4.20) и дефиниције (3.5), компоненте метрике у координатном базису су

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1-\mu z)^2 + \mu^4\{y,z\}^2 & -\mu^4\{y,z\}\{x,z\} & \mu^2(1-\mu z)\{x,z\}^2 \\ -\mu^4\{x,z\}\{y,z\} & (1-\mu z)^2 + \mu^4\{x,z\}^2 & \mu^2(1-\mu z)\{y,z\} \\ \mu^2\{x,z\}(1-\mu z) & \mu^2\{y,z\}(1-\mu z) & \mu^4\{x,z\}^2 + \mu^4\{y,z\}^2 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

На потпростору $z = 0$, ова метрика се редукује на

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

као што се и очекује.

Услови да конексија буде метрички компатибилна и без торзије су дати нелинеарним једначинама (3.79) и (3.86), где су сада

$$P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} + i\epsilon Q^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \tag{4.26}$$

$$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma} + i\epsilon T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}. \tag{4.27}$$

Заменом дефиниције (4.26) у једначину (3.79), услов метричке компатибилности постаје

$$\omega_{\alpha\beta\delta} + \omega_{\delta\beta\alpha} + i\epsilon\omega_{\delta}{}^{\gamma\epsilon}T_{\alpha\gamma\beta\epsilon} = 0, \tag{4.28}$$

а заменом (4.27) у (3.86), услов да конексија буде без торзије

$$\omega_{\alpha\beta\delta} - \omega_{\alpha\delta\beta} + 2i\epsilon\omega_{\alpha\epsilon\gamma}Q^{\epsilon\gamma}{}_{\beta\delta} = C_{\alpha\beta\delta}. \tag{4.29}$$

Ови услови могу да се реше линеаризацијом у комутативном лимесу $\epsilon \to 0$, а то значи да ће резултат да буде исти као и у комутативном случају, односно за конексију се добија израз (3.88).

Множењем једначине (3.59) пројектором и применом особина (3.44) и (3.60), као и дефиниције (4.26) добија се да структурне константе $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ могу да буду највише линеарне по импулсима

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = F^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + 4i\epsilon Q^{\delta\alpha}{}_{\beta\gamma}p_{\delta}, \tag{4.30}$$

док је опште решење за конексију без торзије у овом случају исто као (3.97), односно

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}F^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + i\epsilon T^{\alpha\delta}{}_{\beta\gamma}p_{\delta}.. \tag{4.31}$$

Из антисиметричности $F^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ по последња два индекса следи

$$F^{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \tag{4.32}$$

а из линеаризације

$$T^{(\alpha\delta}{}_{\beta}{}^{\gamma)} = 0. \tag{4.33}$$

Из захтева да конексија задовољава (3.88),

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2(-Q_{\alpha\beta\gamma\delta} + Q_{\beta\gamma\delta\alpha} + Q_{\beta\delta\gamma\alpha}), \tag{4.34}$$

па су на основу (4.13) и (4.14) ови коефицијенти

$$\begin{aligned} &T_{1332} = 2, \quad T_{1233} = 2, \quad T_{2133} = -2, \\ &T_{2331} = -2, \quad T_{3132} = 2, \quad T_{3231} = -2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

На основу (3.97) може да се нађе конексија

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -\omega_{21} = (-\frac{\mu}{2} + 2i\epsilon p_3)\theta^3 = \mu\,(\frac{1}{2} - 2\mu z)\theta^3, \\ \omega_{13} &= -\omega_{31} = \frac{\mu}{2}\,\theta^2 + 2i\epsilon p_2\theta^3 = \frac{\mu}{2}\,\theta^2 + 2\mu^2 x\,\theta^3, \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} = -\frac{\mu}{2}\,\theta^1 - 2i\epsilon p_1\theta^3 = -\frac{\mu}{2}\,\theta^1 + 2\mu^2 y\,\theta^3. \end{aligned} \tag{4.36}$$

односно компоненте

$$\begin{aligned} &\omega_{132} = -\omega_{231} = \frac{\mu}{2} - 2\mu^2 z, \qquad \omega_{123} = -\omega_{321} = \frac{\mu}{2}, \qquad \omega_{133} = -\omega_{331} = 2x, \\ &\omega_{213} = -\omega_{312} = -\frac{\mu}{2}, \qquad \omega_{233} = -\omega_{332} = 2\mu^2 y. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Додатно из (4.30) и могу да се израчунају Ричијеви коефицијенти ротације

$$\begin{aligned} &C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = 2\mu^2 z, \qquad C^2{}_{13} = -C^2{}_{31} = 2\mu^2 z, \qquad C^3{}_{12} = -C^3{}_{21} = \mu, \\ &C^3{}_{13} = -C^3_{31} = 2\mu^2 z, \qquad C^3{}_{23} = -C^3{}_{32} = 2\mu^2 y. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Видели смо да на модификованом Хајзенберговом простору постоји јединствена 3-форма која је елемент запремине, што је предуслов за добро дефинисану меру интеграције. По дефиницији, интеграл 3-форме $\xi = f\Theta$ је [49]

$$\int \xi = \operatorname{tr} f. \tag{4.39}$$

Следеће што хоћемо да дефинишемо је Хоџов дуал. Део алгебре 3-форми (4.18)

$$\begin{aligned} &[\theta^1,\theta^2]\,\theta^3 = \theta^3[\theta^1,\theta^2] = 2(1-\epsilon^2)\Theta, \\ &[\theta^2,\theta^3]\,\theta^1 = \theta^1[\theta^2,\theta^3] = 2\Theta, \qquad\qquad [\theta^3,\theta^1]\,\theta^2 = \theta^2[\theta^3,\theta^1] = 2\Theta, \end{aligned} \tag{4.40}$$

сугерише један могући избор

$$^*\big([\theta^1,\theta^2]\big) = 2\theta^3, \qquad ^*\big([\theta^2,\theta^3]\big) = 2\theta^1, \qquad ^*\big([\theta^3,\theta^1]\big) = 2\theta^2. \tag{4.41}$$

Ова дефиниција се слаже са тим да у еуклидском простору за произвољну p-форму ξ важи $^\star(^\star\xi) = \xi$. На први поглед делује да (4.41) мења уобичајена правила која се односе на запремински елемент. На пример

$$\big(^*\tfrac{1}{2}\,[\theta^1,\theta^2]\big)\ \tfrac{1}{2}\,[\theta^1,\theta^2] = (1-\epsilon^2)\,\Theta, \qquad \big(^*\tfrac{1}{2}\,[\theta^2,\theta^3]\big)\ \tfrac{1}{2}\,[\theta^2,\theta^3] = \Theta. \tag{4.42}$$

У овом случају, комутатори 1-форми нису природни базис $\Omega^2(\mathcal{A})$, па је природније узети канонски базис $\tilde\theta^{\alpha\beta} \equiv P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta$, јер он више одражава особине некомутативног производа. Конкретно, [49]

$$\begin{aligned} \theta^1\theta^2 &= \tilde\theta^{12} = P^{12}{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta = \frac{1}{2}\,[\theta^1,\theta^2], \\ \theta^1\theta^3 &= \tilde\theta^{13} = P^{13}{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta = \frac{1}{2}\,[\theta^1,\theta^3] + \frac{i\epsilon}{2}\,[\theta^2,\theta^3], \\ \theta^2\theta^3 &= \tilde\theta^{23} = P^{23}{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta = \frac{1}{2}\,[\theta^2,\theta^3] - \frac{i\epsilon}{2}\,[\theta^1,\theta^3]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Недостатак базиса $\{\tilde\theta^{\alpha\beta}\}$ је то што он није хермитски. Дејство Хоџовог *-оператора на канонски базис 2-форми је

$$(^*\tilde\theta^{12})\,\theta^{12} = (^*\tilde\theta^{13})\,\theta^{13} = (^*\tilde\theta^{23})\,\theta^{23} = \theta^1\theta^2\theta^3. \tag{4.44}$$

Видимо да редослед чинилаца овде не игра никакву улогу. Из (4.44) следи да 3-форму запремине можемо да идентификујемо као

$$\widetilde{\Theta} = \theta^1\theta^2\theta^3 = (1-\epsilon^2)\Theta. \tag{4.45}$$

Али због нехермитности имамо $(*\tilde{\theta}^{13})\,\tilde{\theta}^{12} \neq 0$ заправо

$$(*\tilde{\theta}^{13})\,\tilde{\theta}^{12} + \tilde{\theta}^{12}\,(*\tilde{\theta}^{13}) = 0. \tag{4.46}$$

Испоставља се да би оваква редефиниција запреминског елемента Θ смо променила укупни члан у дејству.

4.3 Скаларно поље на закривљеном некомутативном простору

Риманова кривина за конексију (4.36) може да се израчуна из друге Картанове структурне једначине, односно

$$\Omega^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\gamma\omega^\gamma{}_\beta = \frac{1}{2}R^\alpha{}_{\beta\gamma\rho}\theta^\gamma\theta^\delta. \tag{4.47}$$

Ови коефицијенти су израчунати у [47] и на основу тога је добијен скалар кривине за конексију (4.36)

$$R = g^{\alpha\beta}R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta} = \frac{11\mu^2}{2} + 4i\epsilon\mu p_3 + 8\epsilon^2(p_1^2+p_2^2) = \frac{15\mu^2}{2} - 4\mu^3 z - 8\mu^4(x^2+y^2). \tag{4.48}$$

Рестрикција на хиперповрш $z=0$, даје

$$R = \frac{15\mu^2}{2} - 8\mu^4(x^2+y^2). \tag{4.49}$$

Овде је интересантна чињеница да упркос овој рестрикцији, Ричијев тензор на дводимензионалном потпростору $z=0$ има облик [80]

$$R_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{3\mu^2}{2} - 4\mu^4x^2 & -2\mu^4\{x,y\} + \frac{i\epsilon\mu^2}{4} & 2\mu^3y + 2i\epsilon\mu^3x \\ -2\mu^4\{x,y\} - \frac{i\epsilon\mu^2}{4} & \frac{3\mu^2}{2} - 4\mu^4y & -2\mu^3x + 2i\epsilon\mu^3y \\ 2\mu^3y - 2i\epsilon\mu^3x & -2\mu^3x - 2i\epsilon\mu^3y & \frac{9\mu^2}{2} - 4\mu^4(x^2+y^2) \end{pmatrix}, \tag{4.50}$$

што значи да котангентни простор остаје тродимензионалан.

У изразу за скалар кривине, види се да експлицитна координатна зависност има исти облик као у Гросе-Вулкенхаровом дејству (2.17)

$$S(\phi) = \int \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\, \tilde{\mathrm{x}}^\mu \phi\, \tilde{\mathrm{x}}_\mu \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{4.51}$$

с тим што је овде написано без прецизиране репрезентације. Модификовани хајзенбергов простор у зависности од репрезентације може да буде алгебра матрица, па због тога у ГВ-дејству (4.51) није посебно назначен $\star$-производ зато што се подразумева множење оператора у општем случају. Исто се односи и на интеграл, који у зависности од репрезентације може да буде траг по матрицама или интеграл. Како је у ознакама [19, 20], $\tilde{\mathrm{x}}_\mu = i p_\mu$, због цикличности производа под интегралом важи

$$\begin{aligned} \int \tilde{\mathrm{x}}^\mu \phi\, \tilde{\mathrm{x}}_\mu \phi &= - \int p^\mu \phi\, p_\mu \phi \\ &= - \int \frac{1}{2}[p^\mu, \phi][p_\mu, \phi] + p^\mu p_\mu \phi^2. \end{aligned} \tag{4.52}$$

С друге стране $\partial_\mu \phi = [p_\mu, \phi]$ за модификовану Хајзенбергову алгебру важи $\tilde{\mathrm{x}}^\mu \tilde{\mathrm{x}}_\mu = -\frac{\mu^4}{\epsilon^2}$, па ГВ дејство има облик

$$S(\phi) = \int \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\Omega^2}{2}\Big)(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\, \tilde{\mathrm{x}}^\mu \tilde{\mathrm{x}}_\mu \phi^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{4.53}$$

Дејство за скаларно поље које неминимално интерагује са позадинском кривином модификованог Хајзенберговог простора је [47]

$$S' = \int \frac{1}{2} e_\alpha \phi\, e^\alpha \phi + \frac{M^2}{2}\phi^2 - \frac{\xi}{2} R \phi^2 + \frac{\Lambda}{4!}\phi^4, \tag{4.54}$$

при чему $z = 0$, $e_\alpha = \delta_\alpha^\mu \partial_\mu$, $e_3 = 0$ и $\sqrt{g} = 1$. За модификовану Хајзенбергову алгебру додатно важи $\tilde{\mathrm{x}}^\mu \tilde{\mathrm{x}}_\mu = -\frac{\mu^4}{\epsilon^2} \tilde{x}^\mu \tilde{x}_\nu$. Заменом израза за скалар кривине (4.49), и на основу претходног у [47] је успостављена еквиваленција дејстава (4.53) и (4.54) до на рескалирање

$$S = \kappa S', \tag{4.55}$$

уз идентификацију

$$1-\frac{\Omega^2}{2}=\kappa, \qquad m^2=\kappa(M^2-\xi a), \qquad \frac{\Omega^2\mu^4}{\epsilon^2}=\kappa\xi b, \qquad \lambda=\kappa\Lambda, \tag{4.56}$$

при чему је $a=\frac{15\mu^2}{2}$, а $b=8\mu^4$.

Одавде следи геометријска интерпретација Гросе - Вулкенхаровог дејства. Ово дејство описује скаларно поље које пропагира у закривљеном простору. Координатно зависни део скалара кривине има исти облик као хармонијски члан у ГВ-дејству. Поред координатно зависног дела, скалар кривине садржи и константан члан који ренормализује масу. Ако се дејства идентификују у тачки самодуалности, $\Omega=1$, могуће је одредити константу неминималне интеракције

$$\xi=\frac{\Omega^2\mu^4}{\epsilon^2\kappa b}=\frac{1}{4\epsilon^2}. \tag{4.57}$$

У [47] је ово показано за дводимензионални еуклидски простор, а дат је и предлог како би ово могло да се уради у четвородимензионалном случају.

Испоставља се да модификовани Хајзенбергов простор, пред кривине има и торзију и у наредном поглављу ћемо испитати могућности интеракције скаларног и спинорског поља са торзијом.

5 Спинори на закривљеном некомутативном простору

У претходном поглављу је описан резултат из [47] који приказује на који начин може да се успостави веза између хармонијског потенцијала у ГВ-дејству и скалара кривине модификованог Хајзенберговог простора након димензионе редукције. Геометријски начин виђења теорије поља која има добро понашање при квантизацији је у [48] проширен са скаларног на спинорско поље. Како модификовани Хајзенбергов простор, поред кривине има и торзију, испитане су импликације неминималне интеракције спинора са торзијом. Ова интеракција резултује присуством координатно зависних чланова у дејству. Испоставило се да ови координатно зависни чланови имају исти облик као координатно зависни чланови у Вињ-Турнеровом моделу за спиноре. ВТ-модел је некомутативна верзија Грос-Невеовог модела за спиноре на Мојаловом простору. Ова теорија је ренормализабилна у случају рестрикције на оријентабилни део интеракције.

У овом поглављу ћемо, након увода који се односи на опис спинора на закривљеном комутативном простору и спинорску репрезентацију у произвољном броју димензија, дати преглед рада [48], у којем је успостављена веза између ренормализабилног Вињ-Турнеровог дејства и Дираковог дејства за спиноре на модификованом Хајзенберговом простору.

5.1 Спинори на закривљеном комутативном простору

Ако хоћемо да разматрамо фермионе у контексту гравитације, неопходно је да дефинишемо њихово понашање при локалним координатним трансформацијама на многострукости. Фермиони су у простору Минковског описани спинорима, односно пољима која се при Лоренцовим трансормацијама трансформишу по спинорској репрезентацији Лоренцове групе $SO(1,d-1)$. Ако разматрамо еуклидски простор, спинори се трансформишу по спинорској репрезентацији $SO(d)$ групе ротација. Група дифеоморфизама на d-димензионалној многострукости $SL(d,\mathbb{R})$ је превелика и није одговарајући оквир за опис фермиона у гравитационом пољу. Решење проблема је рестрикција $SL(d,\mathbb{R})$ на $SO(1,d-1)$ или $SO(d)$ локализацијом одговарајуће $SO(1,d-1)$ односно $SO(d)$ симетрије [81]. Ово се остварује увођењем тетраде и спинске конексије.

У наставку ћемо навести неке опште дефиниције и фиксирати ознаке које ћемо користити касније у некомутативном случају. Наредна два одељка се односе на дефинисање спинорске репрезентације на многострукости произвољне димензије. Преглед који следи је прилагођен потребама даљег текста (и ознакама из [33]), а опширнија разматрања могу да се нађу у стандардним текстовима [82, 83, 84].

Клифордова алгебра придружена равном d-димензионалном простору са метриком $g_{\alpha\beta}$ дата је антикомутационим релацијама

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} \tag{5.1}$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, d$. Ова алгебра може да се репрезентује $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$ матрицама γ^α, при чему угласте заграде означавају цео део броја унутар заграде. У парном броју димензија постоји једна, а у непарном две нееквивалентне иредуцибилне репрезентације Клифордове алгебре.

Нека $\Lambda \in SO(d)$, ако је одговарајући раван простор еуклидски или $\Lambda \in SO(1,d-1)$, ако је у питању простор Минковског. Спинорска репрезентација одговарајуће групе ($SO(d)$ или $SO(d-1)$) је дефинисана пресликавањем елемената $\Lambda \mapsto S(\Lambda)$, таквим да су задовољени услови:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\alpha}S(\Lambda) = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{\beta}, \quad \mathrm{det}S(\Lambda) = 1. \tag{5.2}$$

Ово пресликавање је 1-на-2 јер сваки елемент Λ одговарајуће групе симетрије може да се преслика на $S(\Lambda)$ или на $-S(\Lambda)$. Из дефиниције (5.2), види се да је димензија спинорске репрезентације $2^{[d/2]}$. Скуп свих елемената $S(\Lambda)$ је Лијева група $Spin(d)$.

Дираков спинор $\psi(x)$ је функција која се при дејству групе симетрије $SO(d)$ или $SO(1, d-1)$ трансформише као

$$\psi(x) \to \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x), \tag{5.3}$$

при чему се коњуговани Дираков спинор трасформише по инверзној трансформацији

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}(\Lambda). \tag{5.4}$$

тако да се билинеарна форма $\bar{\psi}\psi$ трансформише као скалар. Видимо на основу дефиниција (5.3) и (5.4) да Дираков спинор и коњуговани Дираков спинор могу да се репрезентују $2^{d/2}$-компонентним колонама.

При инфинитезималним $SO(1, d-1)$ ($SO(d)$) трансформацијама $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ закон трансформације за Дираков спинор постаје

$$\delta\psi(x) = \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\psi(x), \tag{5.5}$$

при чему су параметри ове трансформације $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$, а генератори

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}] = -\Sigma^{\beta\alpha}. \tag{5.6}$$

Као што се и очекује ови генератори задовољавају комутационе релације

$$[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}\Sigma_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\Sigma_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}\Sigma_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}\Sigma_{\alpha\gamma}. \tag{5.7}$$

одговарајуће $SO(1, d-1)$ ($SO(d)$) алгебре.

Да бисмо дефинисали спиноре на многострукости, потребно је да у свакој тачки простора дефинишемо базис тетраде који има равну метрику, а самим тим и одговарајућу $SO(d)$ или $SO(1, d-1)$ симетрију.

При локалним Лоренцовим трансформацијама (ротацијама) покретни базис се транформише по тензорској репрезентацији одговарајуће локалне групе

$$\theta^\alpha(x) \to \theta^{\alpha\prime}(x) = \Lambda^\alpha{}_\beta(x)\theta^\beta(x). \tag{5.8}$$

Кинетички члан у Дираковом дејству дат билинеарном формом $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ није инваријантан на ове трансформације, па се инваријантност постиже заменом извода ∂_μ коваријантним изводом

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^\alpha{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta}, \tag{5.9}$$

где је додатно уведена функција $\omega^\alpha{}_\mu{}^\beta$, векторско поље на многострукости, које се трансформише по локалној $SO(d)$ или $SO(1, d-1)$ групи симетрија, а $\Sigma_{\alpha\beta}$ генератори дате групе трансформација дефинисани једначином (5.6). Векторско поље $\omega^\alpha{}_\mu{}^\beta$ је градијентно поље одговарајуће групе, а геометријски има смисао конексије на одговарајућем $SO(d)$ или $SO(1, d-1)$ раслојењу и назива се *спинска конексија.* Индекс μ одговара координатној карти на многострукости, а индекси α, β су групни индекси на типичном слоју.

Такође је могуће дефинисати просторно зависне γ-матрице

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_\alpha(x)\gamma^\alpha, \tag{5.10}$$

које задовољавају Клифордову алгебру у координатном базису

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x), \tag{5.11}$$

и тада је одговарајући коваријантни извод

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^\nu{}_\mu{}^\rho\Sigma_{\nu\rho}. \tag{5.12}$$

5.2 Спинорска репрезентација на еуклидском простору призвољне димензије

Како смо у наставку заинтересовани пре свега за спиноре дефинисане на еуклидском простору, размотрићемо детаљније спинорску репрезентацију у овом случају. Видели смо да се спинори у d-димензионом еуклидском простору, под дејством $SO(d)$ групе трансформишу по једначини (5.5). У еуклидском простору Клифордова алгебра је

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

па γ_α могу да буду или хермитске или антихермитске матрице. Ми ћемо да их дефинишемо као хермитске

$$\gamma_\alpha^\dagger = \gamma_\alpha. \tag{5.14}$$

Због тога су генератори групе $\Sigma_{\alpha\beta}$ антихермитски. Да бисмо конструисали репрезентацију γ матрица, посматраћемо два случаја: парно и непарно d. Размотримо прво случај $d = 2n$ и уведимо:

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_i + i\gamma_{i+n}), \quad b_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_i - i\gamma_{i+n}), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.15}$$

што представља алгебру фермионских осцилатора

$$\{b_i^\dagger, b_j\} = \delta_{ij}, \quad \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = \{b_i, b_j\} = 0. \tag{5.16}$$

Ове операторе можемо да репрезентујемо на тензорском производу дводимензионалних Хилбертових простора. За сваки од тих Хилбертових простора важи

$$b|0\rangle = 0, \quad b^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad b|1\rangle = |0\rangle, \quad b^\dagger|1\rangle = 0, \tag{5.17}$$

где је $|0\rangle$ вакуум, а $|1\rangle$ побуђено стање. Укупни простор репрезентације је због грасмановске природе оператора b_i коначан скуп стања

$$|0\rangle,\, b_i^\dagger|0\rangle,\, b_{i_1}^\dagger b_{i_2}^\dagger|0\rangle, \ldots,\, b_1^\dagger \cdots b_n^\dagger|0\rangle,$$

чији је број $1 + n + n(n-1)/2 + \cdots + 1 = \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$. Инвертовањем дефиниције (5.15)

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^\dagger + b_i), \quad \gamma_{i+n} = \frac{i}{\sqrt{2}}(b_i^\dagger - b_i) \tag{5.18}$$

конструисали смо једну експлицитну репрезентацију Клифордове алгебре. Ова репрезентацијеа је јединствена до на трансформацију еквиваленције $\gamma'_\alpha = S^{-1}\gamma_\alpha S$, за неку инвертибилну матрицу S. Можемо да закључимо да су матрице γ_α и $\Sigma_{\alpha\beta}$ матрице димензије $2^{d/2}\times 2^{d/2}$. Ове матрице делују на спиноре који су у том случају колоне $\psi^T = (\psi^1, \ldots, \psi^{2^{d/2}})$.

Постоји још једна матрица коју је могуће конструисати из постојећег скупа матрица, а која је такође хермитска и чији је квадрат јединична матрица, наиме

$$\gamma_{d+1} = (-1)^{(d-1)/2}\gamma_1 \ldots \gamma_d \tag{5.19}$$

Ова матрица има важну особину, наиме

$$\{\gamma_{d+1}, \gamma_\alpha\} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, d. \tag{5.20}$$

а последица тога је да комутира са свим $SO(N)$ генераторима

$$[\gamma_{d+1}, \Sigma_{\alpha\beta}] = 0. \tag{5.21}$$

Како је $\gamma_{d+1}^2 = \mathbb{1}$ својствене вредности γ_{d+1} су ± 1, па постоје два одговарајућа својствена вектора

$$\gamma_{d+1}\psi_L = -\psi_L, \quad \gamma_{d+1}\psi_R = \psi_R \tag{5.22}$$

Под дејством $SO(N)$ трансформација, ови својствени вектори се трансформишу као

$$\delta\psi_{L,R} = \delta\gamma_{d+1}\psi = \mp\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma_{d+1}\Sigma_{\mu\nu}\psi = \mp\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\gamma_{d+1}\psi = \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\psi_{L,R} \tag{5.23}$$

па закључујемо да при овим трансформацијама нема мешања вектора са различитим својственим вредностима, односно да постоје два инваријантна својствена потпростора. Ово се лако види, јер из особине цикличности трага следи

$$\operatorname{tr}\gamma_{d+1} = 0, \tag{5.24}$$

па ће у парном броју димензија бити једнак број позитивних и негативних својствених вредности. То разлаже 2^n-димензионални простор репрезентације на два потпростора димензије 2^{n-1}. Ово разлагање важи и за спиноре, па се Дираков спинор $\psi^T = (\psi_R, \psi_L)$ разлаже на два Вајлова спинора: десни Вајлов спинор позитивне киралности ψ_R и Леви Вајлов спинор негативне киралности ψ_L.

У случају када је d непарно, Клифордову алгебру чине $2n+1$ матрице $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}, \gamma_{2n+1}$ које задовољавају дефинициону релацију (5.13). Конструкцијом матрице γ_{d+1} из парне димензије ниже, ова алгебра се затвара. Због тога у непарном броју просторних димензија нема киралности и Вајлових спинора па је ова репрезентација иредуцибилна. У непарном броју димензија постоји две нееквивалентне иредуцибилне репрезентације зато што су матрица $-\gamma_{2n+1}$ уместо γ_{2n+1} подједнако добро задовољава алгебру, а не постоји трансформација сличности која ће једну матрицу да пребаци у другу.

Конкретно, ми хоћемо да конструишемо спиноре на модификованој Хајзенберовој алгебри, која је тродимензионални некомутативни простор и да направимо димензиону редукцију на дводимензионални потпростор $z = 0$. За то нам је потребна спинорска репрезентацију у две и три димензије. У оба случаја, спинорска репрезентација је дводимензионална. Природна репрезентација γ-матрица у две димензије су Паулијеве матрице

$$\gamma_1 = \sigma_1, \qquad \gamma_2 = \sigma_2. \tag{5.25}$$

Из њих добијамо матрицу киралности

$$\gamma_3 = -i\gamma_1\gamma_2 = \sigma_3. \tag{5.26}$$

И као што је речено раније, ова репрезентација је до на унитарну еквиваленцију јединствена. Спинорска репрезентација у три димензије је

$$\gamma_\alpha = \sigma_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{5.27}$$

При томе је једна репрезентација одређена условом $\gamma_4 = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$, док је друга нееквивалентна иредуцибилна репрезентација $\tilde{\gamma}_1 = \sigma_1$, $\tilde{\gamma}_2 = \sigma_2$, $\tilde{\gamma}_3 = -\sigma_3$, а одређена је условом $\tilde{\gamma}_4 = -1$.

5.3 Дираково дејство

Коваријантни извод за спиноре (5.9) у закривљеном простору у координатно независном облику је

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{4}\omega^{\delta}{}_{\gamma}\gamma_{\delta}\gamma^{\gamma}\psi, \tag{5.28}$$

односно, развијено у базису тетраде

$$D\psi = (D_\alpha\psi)\theta^\alpha \tag{5.29}$$

са компонентама

$$D_\alpha\psi = e_\alpha\psi + \Gamma_\alpha\psi, \qquad \Gamma_\alpha = \frac{1}{4}\,\omega^\delta{}_{\alpha\beta}\gamma_\delta\gamma^\beta. \tag{5.30}$$

Из захтева да билинеарна форма $\bar\psi\psi$ буде скаларна функција, односно да се коваријантни извод редукује на обични

$$D_\alpha(\bar\psi\psi) = e_\alpha(\bar\psi\psi), \tag{5.31}$$

израз за коваријантни извод коњугованог спинора је

$$D_\alpha\bar\psi = e_\alpha\psi - \bar\psi\Gamma_\alpha. \tag{5.32}$$

При $SO(d)$ трансформацијама, коњуговани Дираков спинор се трансформише тако да његова трансформација компензује резултат (5.5). У еуклидском простору генератори $\Sigma_{\alpha\beta}$ су антихермитски, па тај услов испуњава хермитска коњугација

$$\delta\psi^\dagger = \psi^\dagger\left(\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\Sigma^\dagger_{\alpha\beta}\right) = \psi^\dagger\left(-\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right), \tag{5.33}$$

односно $\bar\psi = \psi^\dagger$. Помоћу Дираковог оператора

$$\not{D} = \gamma^\alpha D_\alpha \tag{5.34}$$

се дефинише Дираково дејство

$$S = \int \sqrt{g}\,\bar\psi\,(i\not{D} - m)\psi. \tag{5.35}$$

Ово дејство је реално ако нема торзије. Масени члан је очигледно реалан. Зато ћемо размотрити само део који садржи Дираков оператор

$$\int \sqrt{g}(\bar\psi i\gamma^\alpha D_\alpha\psi) = \int \sqrt{g}\left(\bar\psi i\gamma^\alpha e^\mu_\alpha(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi\right). \tag{5.36}$$

Ако парцијално интегралимо део са изводом уз претпоставку да поља ишчезавају на граници

$$\int \sqrt{g}\bar\psi i\gamma^\alpha e^\mu_\alpha\partial_\mu\psi = -\int i(\partial_\mu\bar\psi)\sqrt{g}e^\mu_\alpha\gamma^\alpha\psi - \int \bar\psi i\partial_\mu(\sqrt{g}e^\mu_\alpha)\gamma^\alpha\psi. \tag{5.37}$$

Ако нема торзије, комбинујући изразе за конексију без торзије (3.88) и Ричијеве коефицијенте ротације (3.13) следи

$$\omega^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(e^\mu_\gamma\sqrt{g}) \tag{5.38}$$

на основу чега (5.37) постаје

$$\int \sqrt{g}\bar{\psi}i\gamma^\alpha e^\mu_\alpha\partial_\mu\psi = -\int i(\partial_\mu\bar{\psi})\sqrt{g}e^\mu_\alpha\gamma^\alpha\psi - \int \bar{\psi}i\sqrt{g}\omega^{\beta}{}_{\beta\alpha}\gamma^\alpha\psi. \tag{5.39}$$

Део дејства без извода је

$$\int \sqrt{g}\bar{\psi}i\gamma^\alpha\Gamma_\alpha\psi = \int \sqrt{g}\bar{\psi}i\Gamma^\alpha\gamma_\alpha\psi + \int \sqrt{g}\bar{\psi}i[\gamma^\alpha,\Gamma_\alpha]\psi. \tag{5.40}$$

Уз идентитет

$$[\gamma^\delta,\Gamma_\delta] = -\omega^{\alpha}{}_{\alpha\delta}\gamma_\delta, \tag{5.41}$$

чланови (5.39) и (5.40) заједно дају

$$\int \sqrt{g}\bar{\psi}(\gamma^\alpha iD_\alpha\psi) = \int \sqrt{g}(-iD_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi. \tag{5.42}$$

Када нема торзије, Дираков оператор $\not{D}$ је хермитски у односу на скаларни производ са тежинском функцијом $\sqrt{g}$.

Ако постоји торзија, дејство за спиноре дефинишемо хермитском симетризацијом

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(S + S^*). \tag{5.43}$$

Дејство (5.35) може да запише преко форми, [85]. Ако дефинишемо матричну 1-форму $V = \theta^\alpha\gamma_\alpha$, у d димензија важи

$$\int \mathrm{tr}\,(D\psi)\bar{\psi}\,VV\ldots V\gamma_{d+1} = -i(d-1)!\int \Theta\,\bar{\psi}\gamma^\alpha(D_\alpha\psi), \tag{5.44}$$

где се траг односи на γ-матрице. Производ $VV\ldots V$ садржи $(d-1)$ фактора. На комутативним просторима 1-форме међусобно антикомутирају, па је хермитски део (5.44)

$$\mathcal{S}_{kin} = \frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\left((D\psi)\bar{\psi} - \psi(D\bar{\psi})\right)VV\ldots V\gamma_{d+1}. \tag{5.45}$$

На сличан начин може да се напише и масени члан Дираковог дејства

$$m \int \mathrm{tr}\, \psi\bar{\psi} VVV \dots V \gamma_{d+1} = -id! \int \Theta\, m\bar{\psi}\psi, \tag{5.46}$$

при чему сада производ 1-форми $VVV \dots V$ садржи d чинилаца. На тродимензионој комутативној многострукости је онда

$$\mathcal{S}_{kin} = \frac{1}{4} \int \mathrm{tr}\Big((D\psi)\bar{\psi} - \psi(D\bar{\psi})\Big) VV, \tag{5.47}$$

$$\mathcal{S}_{mass} = \frac{i}{6} m \int \mathrm{tr}\, \psi\bar{\psi}\, VVV. \tag{5.48}$$

Ово важи за репрезентацију γ-матрица у којој је $\gamma_4 = 1$.

5.4 Дираково дејство на модификованом Хајзенберговом простору

Сада желимо на анлоган начин да конструишемо Дираково дејство на некомутативном простору (4.8). Размотримо најпре кинетички члан

$$S^*_{kin} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{tr}\, \psi(D\bar{\psi})\, VV = -\frac{1}{2} \int \mathrm{tr}\ \Xi_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \theta^\alpha \theta^\beta \theta^\gamma, \tag{5.49}$$

где је

$$\Xi_\alpha = \psi(D_\alpha \bar{\psi}) = \psi\,\big((e_\alpha \bar{\psi}) - \bar{\psi}\Gamma_\alpha\big). \tag{5.50}$$

Када се узму у обзир ненулте 3-форме из (4.16), кинетички члан (5.49) постаје

$$\begin{aligned} S^*_{kin} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{tr}\, \Big(&\Xi_1(\gamma_3\gamma_1\theta^1\theta^3\theta^1 + \gamma_2\gamma_3\theta^1\theta^2\theta^3 + \gamma_3\gamma_2\theta^1\theta^3\theta^2 \\ &+ \Xi_2(\gamma_3\gamma_2\theta^2\theta^3\theta^2 + \gamma_1\gamma_3\theta^2\theta^1\theta^3 + \gamma_3\gamma_1\theta^2\theta^3\theta^1) + \Xi_3(\gamma_1\gamma_2\theta^3\theta^1\theta^2 + \gamma_2\gamma_1\theta^3\theta^2\theta^1)\Big). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Изражавајући све 3-форме преко јединствене запреминске форме Θ и коришћењем релација за γ-матрице, следи

$$S^*_{kin} = -\frac{1}{2} \int \Theta\, \mathrm{tr}\ \big(i\,\Xi_1\gamma_1 + i\,\Xi_2\gamma_2 + i(1-\epsilon^2)\,\Xi_3\gamma_3 - \epsilon\,\Xi_1\gamma_2 + \epsilon\,\Xi_2\gamma_1\big) \tag{5.52}$$

На основу (4.37) могу да се израчунају 1-форме конексије (5.30):

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{4}\omega_{\alpha 1\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta = \frac{1}{2}\omega_{213}\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4}\mu\gamma^1, \\
\Gamma_2 &= \frac{1}{4}\omega_{\alpha 2\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta = \frac{1}{2}\omega_{123}\gamma^1\gamma^3 = -\frac{i}{4}\mu\gamma^2, \\
\Gamma_3 &= \frac{1}{4}\omega_{\alpha 3\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta = \frac{1}{2}\omega_{132}\gamma^1\gamma^2 + \frac{1}{2}\omega_{133}\gamma^1\gamma^3 + \frac{1}{2}\omega_{233}\gamma^2\gamma^3 \\
&= \frac{i}{4}\mu\gamma^3 - i\mu^2(x\gamma^2 - y\gamma^1 + z\gamma^3),
\end{aligned} \tag{5.53}$$

па су компоненте (5.50):

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= \psi\left((e_1\bar\psi) + \frac{i\mu}{4}\,\bar\psi\gamma_1\right), \\
\Xi_2 &= \psi\left((e_2\bar\psi) + \frac{i\mu}{4}\,\bar\psi\gamma_2\right), \\
\Xi_3 &= \psi\left((e_3\bar\psi) - \frac{i\mu}{4}\,\bar\psi\gamma_3 + i\mu^2\bar\psi(x\gamma_2 - y\gamma_1 + z\gamma_3)\right).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Заменом (5.54) у (5.52) добија се

$$\begin{aligned}
S^*_{kin} = -\frac{1}{2}\int\Theta\Big(& i(e_1\bar\psi)\gamma_1\psi + i(e_2\bar\psi)\gamma_2\psi + i(1-\epsilon^2)(e_3\bar\psi)\gamma_3\psi \qquad (5.55)\\
&- \frac{\mu}{4}(1+\epsilon^2)\bar\psi\psi + \frac{\mu\epsilon}{2}\,\bar\psi\gamma_3\psi - \mu^2(1-\epsilon^2)\bar\psi z\psi \\
&- \epsilon(e_1\bar\psi)\gamma_2\psi + \epsilon(e_2\bar\psi)\gamma_1\psi - i\mu^2(1-\epsilon^2)\bar\psi(x\gamma_1 + y\gamma_2)\psi\Big).
\end{aligned}$$

Видимо да су чланови у последњем реду чисто имагинарни. Како конексија коју користимо има торзију, потребно је да применимо хермитску симетризацију (5.43), чиме добијамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{kin} = \frac{1}{2}\int\Theta\Big(& i\bar\psi\gamma_1(e_1\psi) + i\bar\psi\gamma_2(e_2\psi) + i(1-\epsilon^2)\bar\psi\gamma_3(e_3\psi) \\
&- i(e_1\bar\psi)\gamma_1\psi - i(e_2\bar\psi)\gamma_2\psi - i(1-\epsilon^2)(e_3\bar\psi)\gamma_3\psi \\
&- \frac{\mu}{2}(1+\epsilon^2)\bar\psi\psi + \mu\epsilon\,\bar\psi\gamma_3\psi - 2\mu^2(1-\epsilon^2)\bar\psi z\psi\Big).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

пројекцијом на потпростор $z=0,\ e_3\bar\psi = 0$, из дејства (5.56) добијамо

$$\mathcal{S}|_{kin} = \frac{1}{2}\int\Theta\Big(i\bar\psi\gamma^\alpha(e_\alpha\psi) - i(e_\alpha\bar\psi)\gamma^\alpha\psi + \frac{1}{2}\,\mu(1+\epsilon^2)\bar\psi\psi - \mu\epsilon\,\bar\psi\gamma_3\psi\Big), \tag{5.57}$$

где се сада сумира по $\alpha = 1, 2$. Овде можемо да приметимо да се, као и у скаларном случају, део компонената конексије манифестује као маса.

Ако сада напишемо и масени члан

$$S_{mass} = i\,\frac{m}{6}\int \mathrm{tr}\,\psi\bar{\psi}\,VVV = -i\,\frac{m}{6}\int \mathrm{tr}\,\psi\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\theta^\alpha\theta^\beta\theta^\gamma, \qquad (5.58)$$

опет на основу (4.16) и (4.17) следи

$$\mathcal{S}|_{mass} = -m\int \Theta\left((1-\frac{\epsilon^2}{3})\bar{\psi}\psi - \frac{2\epsilon}{3}\,\bar{\psi}\gamma_3\psi\right) \qquad (5.59)$$

Овај члан изгледа исто после и пре димензионе редукције. Међутим, то је последица тога што смо користили исте ознаке за спиноре и запреминску форму у две и у три димензије. Ако бисмо желели да будемо потпуно прецизни, означили бисмо одговарајуће запреминске форме као $\Theta^{(2)}$ и $\Theta^{(3)}$, као и спиноре са $\psi^{(2)}$ и $\psi^{(3)}$. При томе је релација између ових спинора $\psi^{(2)} = \sqrt{Z}\psi^{(3)}$, где би Z садржало комплексни број (константан спинор у једној димензији који може да се нормира на јединицу, [86]) и запремину отпројектоване треће димензије. У интеракционом случају, Z ренормализује константу интеракције.

У комутативном лимесу $\epsilon = 0$, масени члан (5.59) се своди на уобичајени масени члан за спинорско поље. Међутим некомутативни простор (4.8) није инваријантан при просторној инверзији, што за последицу има постојање чланова $\bar{\psi}\gamma_3\psi$ који нарушавају парност у (5.57) и (5.59). Због тога спинори различите киралности имају различиту масу. У матричном случају, $\epsilon = 1$, спинор ψ_R је масиван и има масу $m_L = 4/3m$, док је ψ_R безмасен. Нарушење парности је присутно и у кинетичком члану, а чак и у безмасеном случају димензиона редукција даје масе $m_{L,R} = \mu(1 \pm \epsilon)^2/4$

5.5 Интеракција спинора и торзије

У овом одељку конструисаћемо неминималну интеракцију фермиона и торзије. Наиме, чак и у случају комутативних дводимензионалних многострукости, дејство за минимално везане спиноре не може да има експлицитну зависност од конексије, па због тога ова интеракција мора да буде неминимална [87]. У четири димензије постоји више могућности да се конструише ова интеракција [88, 89]. У три димензије, могући интеракциони чланови су облика

$$S'_{tor} = \int \mathrm{tr}\, \psi\, \bar{\psi}\, T_\alpha \gamma^\alpha V, \qquad S''_{tor} = \int \mathrm{tr}\, \psi\, \bar{\psi}\, ({}^*T_\alpha)\gamma^\alpha V V. \tag{5.60}$$

Торзија је дефинисана једначином (3.81), чије су компоненте у тетрадном базису

$$T^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \theta^\beta. \tag{5.61}$$

Последња једначина изгледа потпуно исто као прва Картанова структурна једначина у комутативној геометрији (3.20), с тим што је алгебра 1-форми сада другачија. На основу (3.43) једначина за компоненте торзије је

$$T^\alpha = -\frac{1}{2} C^\alpha{}_{\beta\gamma} \theta^\beta \theta^\gamma + \omega^\alpha{}_\beta \theta^\beta. \tag{5.62}$$

Конкретно, из (4.38) и (4.36) компоненте торзије за модификовани Хајзенбергов простор су:

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{\mu}{2}(1-2\mu z)\{\theta^2,\theta^3\} = -i\,\frac{\epsilon\mu}{2}\,(1-2\mu z)\,[\theta^1,\theta^3], \\ T^2 &= -\frac{\mu}{2}(1-2\mu z)\{\theta^1,\theta^3\} = -i\,\frac{\epsilon\mu}{2}\,(1-2\mu z)\,[\theta^2,\theta^3], \\ T^3 &= -\mu^2 x\{\theta^1,\theta^3\} - \mu^2 y\{\theta^2,\theta^3\} = -i\epsilon\mu^2 x\,[\theta^2,\theta^3] + i\epsilon\mu^2 y\,[\theta^1,\theta^3]. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Хоџов дуал ових 2-форми налазимо директно применом дефиниције (4.41)

$$\begin{aligned} {}^*T^1 &= i\epsilon\mu(1-2\mu z)\,\theta^2, \\ {}^*T^2 &= -i\epsilon\mu(1-2\mu z)\,\theta^1, \\ {}^*T^3 &= -2i\epsilon\mu^2 x\,\theta^1 - 2i\epsilon\mu^2 y\,\theta^2. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Сада можемо да напишемо прво дејство из (5.60)

$$\begin{aligned} S'_{tor} &= \int \mathrm{tr}\, \psi\bar{\psi} T^\alpha \gamma_\alpha \theta^\beta \gamma_\beta \\ &= 2\epsilon \int \Theta\, \bar{\psi}\, \big((\epsilon-\gamma_3)(\mu-2\mu^2 z) + (\mu^2 x\gamma_2 - \mu^2 y\gamma_1)\big)\, \psi \end{aligned}$$

$$- 2i\epsilon^2 \int \Theta\,\bar{\psi}\left(\mu^2 x\gamma_1 + \mu^2 y\gamma_2\right)\psi. \tag{5.65}$$

Испоставља се да и друго дејство има исти облик,

$$S''_{tor} = 2iS'_{tor} \tag{5.66}$$

Због тога узимамо реалне и имагинарне делове S'_{tor} као два независна интеракциона члана. Конкретно, нека су ϑ су ϖ два произвољна реална коефицијента, хермитско дејство за интеракцију са торзијом је тада

$$\mathcal{S}_{tor} = \frac{\eta}{2}\int \Theta\mu(1-2\mu z)\,(\epsilon\,\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma_3\psi) \tag{5.67}$$

$$+\,\frac{1}{2}\int \Theta\,\bar{\psi}(\vartheta\epsilon_{\alpha\beta} + \varpi\delta_{\alpha\beta})\mu^2 x^\alpha\gamma^\beta\psi, \tag{5.68}$$

где се сумирање врши по $\alpha = 1, 2$. После пројекције на $z = 0$ имамо

$$\mathcal{S}|_{tor} = \frac{\eta}{2}\int \Theta\mu\,(\epsilon\,\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma_3\psi) + \frac{1}{2}\int \Theta\,\bar{\psi}(\vartheta\epsilon_{\alpha\beta} + \varpi\delta_{\alpha\beta})\mu^2 x^\alpha\gamma^\beta\psi. \tag{5.69}$$

5.6 Дираков оператор и еквиваленција са D_{VT}

Укупни лагранжијан који описује Диракове спиноре на модификованом Хајзенберговом простору, после редукције на Хајзенбергов простор је

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}|_{kin} + \mathcal{L}|_{mass} + \mathcal{L}|_{tor} = \qquad (5.70)\\ &= \frac{1}{2}\left(i\bar{\psi}\gamma^\alpha(e_\alpha\psi) - i(e_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi\right) + \frac{1}{2}\,\bar{\psi}(\vartheta\epsilon_{\alpha\beta} + \varpi\delta_{\alpha\beta})\,\mu^2 x^\alpha\gamma^\beta\psi\\ &\quad - \frac{m}{3}\left((3-\epsilon)\bar{\psi}\psi - 2\epsilon\,\bar{\psi}\gamma_3\psi\right) + \frac{\mu}{4}\left((1+2\vartheta\epsilon+\epsilon^2)\bar{\psi}\psi - 2(\epsilon+\eta)\,\bar{\psi}\gamma_3\psi\right).\end{aligned}$$

Ако овај лагранжијан напишемо у облику $\mathcal{L} = \bar{\psi}\not{D}\psi$ налазимо да је одговарајући Дираков оператор

$$\not{D} = i\gamma^\alpha e_\alpha - A - B\gamma_3 + \frac{1}{2}(\vartheta\epsilon_{\alpha\beta} + \varpi\delta_{\alpha\beta})\,\mu^2 x^\alpha\gamma^\beta, \tag{5.71}$$

где су

$$A = \frac{m}{3}\,(3-\epsilon^2) - \frac{\mu}{4}\,(1+2\vartheta\epsilon+\epsilon^2), \quad B = -\,\frac{2m\epsilon}{3} + \frac{\mu}{2}\,(\vartheta+\epsilon). \tag{5.72}$$

У комутативној геометрији, када нема торзије, Лихнеривичева формула даје везу између Дираковог оператора, Лаплас-Белтрамијевог оператора и скаларне кривине [90]. Ми смо овде израчунали квадрат добијеног Дираковог оператора

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= -e_\alpha e^\alpha - 2A\gamma^\alpha i e_\alpha + \frac{1}{4}(\vartheta^2 + \varpi^2)\mu^4 x_\alpha x^\alpha \\ &\quad + (A^2 + B^2) + \big(2AB - \mu^2\vartheta - \frac{1}{4}\mu^2\epsilon(\vartheta^2 + \varpi^2)\big)\gamma_3 \\ &\quad - A(\vartheta\epsilon^{\alpha\beta} + \varpi\delta^{\alpha\beta})\mu^2 x_\alpha\gamma_\beta + \frac{1}{2}(\vartheta\epsilon^{\alpha\beta} + \varpi\delta^{\alpha\beta})\{ie_\alpha, \mu^2 x_\beta\}, \end{aligned} \tag{5.73}$$

што представља уопштење обичног Лихнеровичевог лапласијана за спиноре. Добијена Лихнеровичева формула садржи додатну зависност од конексије, која је последица интеракције са торзијом. У овом $\not{D}^2$ су такође присутни и чланови индуковани димензионом редукцијом.

Еквиваленција између Дираковог дејства (5.70) са Вињ-Турнеровим моделом (2.33) се лако успоставља. Ако упоредимо нотацију и идентификујемо $\theta = -\bar{k}$ тада параметри дејства за спиноре (2.33) и (5.70) могу да се повежу на следећи начин

$$\tilde{m} = A, \qquad \kappa = B, \qquad \Omega = \frac{\eta\epsilon}{4}, \qquad \varpi = 0. \tag{5.74}$$

Као и у случају Вињ-Турнеровог дејства из (5.74) можемо да видимо да $\not{D}^2$ не може у потпуности да се идентификује са кинетичким чланом Гросе-Вулкенхаровог модела.

Када израчунамо

$$(*T_\alpha)\, T^\alpha = 2\mu^2\epsilon^2\left(2\epsilon^2(1-\mu z) - (1-2\mu z)^2 - 2\mu^2(x^2+y^2)\right)\Theta. \tag{5.75}$$

видимо да се овде појављује експлицитна координатна зависност као у скалару кривине, што одговара хармонијском члану у ГВ-моделу, али у Тако да уместо интеракције са скаларом кривине

$$\mathcal{S}_{\phi,cur} = \frac{\xi}{2}\int R\phi^2 = \frac{\xi\mu^2}{4}\int \left(15 - 16\mu^2(x^2 + \ y^2)\right)\phi^2, \tag{5.76}$$

може да се посматра интеракција са торзијом. Закључак је да у случају скаларног поља, хармонијски члан може да потиче како од неминималне интеракције са кривином, тако и од неминималне интеракције са торзијом. Одговарајући интеракциони члан, када се пројектује на две димензије је

$$\mathcal{S}_{\phi,tor} = \frac{\zeta}{2}\int T^{\alpha}({}^{*}T_{\alpha})\phi^2 = \zeta\mu^2\epsilon^2\int\left(2\epsilon^2 - 1 - 2\mu^2(x^2+y^2)\right)\phi^2. \tag{5.77}$$

Резултујући физички ефекат обе интеракције је сличан јер уводи хармонијски потенцијал и модификује масу скаларног поља.

Физички ефекти који могу да се виде у размотреном спинорском моделу су настанак масе и нарушење парности. Један извор масе је гравитационо поље које се кроз интеракцију са торзијом манифестује као инерција. Други извор масе је димензиона редукција. Нарушење парности је последица неинваријантности модификованог Хајзенберговог простора на просторну инверзију. Због тога, просторна инверзија није симертија у лагранжијану, а како масени чланови у себи задрже и компоненте које потичу из додатне димензије, нарушење парности се манифестује као разлика масе леве и десне компоненте Дираковог поља и после димензионе редукције

$$m_{R,L} = A \pm B = \frac{m}{3}(1\mp\epsilon)(3\pm\epsilon) - \frac{\mu}{4}(1\mp\epsilon)(1\mp\epsilon\mp 2\eta). \tag{5.78}$$

У комутативном лимесу $m_{R,L} = m \pm \eta\mu/2$, па видимо да је један део генерисане масе искључиво последица интеракције са торзијом.

6 Градијентно поље на закривљеном некомутативном простору

Једна могућа физичка интерпретација бољег понашања ГВ-модела у ИЦ-сектору јесте конфинирање поља у закривљеном простору хармонијског потенцијала и потискивање интеракција дугог домета, што је уобичајено у теоријама кондензоване материје [50]. Овај геометријски начин виђења проблема доводи у везу гравитацију са регуларизацијом ИЦ-дивергенција у теорији поља на некомутативном простору. И у случају спинорског поља испоставило се да гравитација, кроз интеракцију са торзијом позадинског простора, регуларизује теорију у довољној мери тако да она буде ренормализабилна. У случају Вињ-Турнеровог модела, који смо геометријски интерпретирали, то се дешава упркос чињеници да један део УВ/ИЦ мешања и даље остаје [29]. Због претходно наведеног, постојала је мотивација да се испита понашање градијентне теорије на модификованом Хајзенберговом простору у очекивању да кроз интеракцију са позадинском геометријом теорија покаже боље ИЦ-понашање, као у претходна два примера.

Додатно, теорије поља дефинисане на Лијевим алгебрама које имају коначнодимензионе репрезентације су коначне при квантизацији [47]. Модификована Хајзенбергова алгебра нема структуру Лијеве алгебре, али има коначнодимензиону матричну репрезентацију, што може да буде разлог бољег понашања скаларне и спиноске теорије. У овом контексту, матричну геометрију можемо да сматрамо неком врстом регулатора.

Модел за градијентно поље на модификованом Хајзенберговом простору конструисан у [49], после редукције на потпростор $z = 0$, има добре особине на класичном нивоу. Поред тривијалног вакуума, теорија је и БРСТ инваријантна. Такође, теорија има скаларни сектор који потиче од градијентног поља у додатној КК-димензији, па се ова два сектора комбинују у мултиплет као у суперсиметричним теоријама, што може да води поништењу једног дела дивергенција.

У наставку овог поглавља, после кратког прегледа резултата из [49, 50], представићемо наше резултате из [51]. У [49] димензионалном редукцијом на дводимензионални потпростор, је из Јанг-Милсовог дејства на модификованом Хајзенберговом простору добијено дејство за градијентно поље. Квантне поправке у првом реду су нађене у [50] и наш резултат представља наставак овог рада.

6.1 Дејство за градијентно поље на модификованом Хајзенберговом простору

Градијентна $U(1)$ симетрија може да се уведе помоћу градијентног потенцијала (конексије) A, који је антихермитска 1-форма

$$\mathsf{A} = i\mathsf{g}\mathsf{A}_\alpha \theta^\alpha, \tag{6.1}$$

где је g константа интеракције. Тада је јачина поља, односно кривина конексије A

$$\mathsf{F} = d\mathsf{A} + \mathsf{A}^2 = \frac{i}{2}\,\mathsf{F}_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta. \tag{6.2}$$

Овде се градијентна $U(1)$ група стандардно састоји од унитарних елемената $g \in \mathcal{A}$ као у (2.38), а због дефиниције диференцијала преко импулса и овде можемо да уведемо градијентно коваријантну 1-форму

$$\mathsf{X} = \mathsf{X}_\alpha \theta^\alpha = \mathsf{A} - \theta, \tag{6.3}$$

која се трансформише по придруженој репрезентацији градијентне групе. Компоненте

$$\mathsf{X}_\alpha = p_\alpha + i\mathsf{g}\mathsf{A}_\alpha \tag{6.4}$$

се називају *коваријантне координате*. Када се јачина поља изрази преко коваријантних координата X и структурних константи, добија се израз

$$\mathsf{F} = \mathsf{X}^2 - \frac{1}{2}\, F^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \mathsf{X}_{\gamma}\, \theta^{\alpha}\theta^{\beta} - \frac{1}{2i\epsilon}\, K_{\alpha\beta}\, \theta^{\alpha}\theta^{\beta}. \qquad (6.5)$$

Постојање коваријантне координате X отвара могућност конструкције опсервабли које су аутоматски градијентно инваријантне, па се тиме проширује могућност конструкције градијентно инваријантног дејства, другачијег од Јанг-Милсовог или Черн-Сајмонсовог. Ова могућност је искључиво последица некомутативности. Модел који је овде изграђен је некомутативно уопштење Јанг-Милсове теорије без екстензија. Могуће екстензије ће бити анализиране касније. За дејство векторског поља на модификованом Хајзенберговом простору је узето [49]

$$S = \frac{1}{16\mathsf{g}^2}\, \mathrm{tr}\, \big(\mathsf{F}^{*}\mathsf{F} + ({}^{*}\mathsf{F})\mathsf{F}\big). \qquad (6.6)$$

Редукција на потпростор $z = 0$ подразумева само поља $\mathsf{A}_{\alpha}(x, y, z = 0)$, при чему се формално интеграли по z и рескалира константа интеракције за градијентно поље, $\mathsf{g} \to g$. Резултат је Калуца-Клајнова редукција Јанг-Милсовог дејства на Мојалову раван. Почетно дефинисано градијентно поље и јачину поља на тродимензионалном модификованом Хајзенберговом простору означаваћемо са A_{α}, $\mathsf{F}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ док ћемо исте величине које су дефинисане на Мојаловом простору означавати са A_{α}, $F_{\alpha\beta}$. $\alpha, \beta = 1, 2$. Поља и константе интеракције немају исте масене димензије у две и три просторне димензије, али се при димензионој редукцији увек појављују уз одговарајуће градијентно поље. Тако да g и g могу да се апсорбују у A_{α} и A_{α} и да се на крају рачуна врате и прикажу у дејству.

После редукције на потпростор $z = 0$ трећа компонента импулса је константна,

$$\mathsf{g}\mathsf{A}_3 = g\phi, \qquad \mathsf{g}\mathsf{A}_1 = gA_1, \qquad \mathsf{g}\mathsf{A}_2 = gA_2. \qquad (6.7)$$

Коваријантни извод и јачина поља су у две димензије дефинисани као

$$D_{\alpha}\phi = e_{\alpha}\phi + ig[A_{\alpha}, \phi], \quad g^{-1}F_{12} = e_1 A_2 - e_2 A_1 + ig[A_1, A_2]. \qquad (6.8)$$

Компоненте јачине поља F после КК-редукције су [49]

$$\begin{aligned}
\mathsf{g}^{-1}\mathsf{F}_{12} &= g^{-1}F_{12} - \mu\phi = g^{-1}\Big(-i[\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2] + \frac{\mu^2}{\epsilon}\Big) - \mu\phi, \\
\mathsf{g}^{-1}\mathsf{F}_{13} &= D_1\phi - i\epsilon\{p_2 + igA_2, \phi\} = [\mathsf{X}_1,\phi] - i\epsilon\{\mathsf{X}_2,\phi\}, \qquad (6.9) \\
\mathsf{g}^{-1}\mathsf{F}_{23} &= D_2\phi + i\epsilon\{p_1 + igA_1, \phi\} = [\mathsf{X}_2,\phi] + i\epsilon\{\mathsf{X}_1,\phi\}.
\end{aligned}$$

Ако се дефинише

$$a = 1 - \epsilon^2 \qquad (6.10)$$

и примени дефиниција Хоџовог *-дуала (4.41)

$$\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{2\mathsf{g}^2}\,\mathrm{t}r\left(a\,\mathsf{F}_{12}\mathsf{F}^{12} + \mathsf{F}_{13}\mathsf{F}^{13} + \mathsf{F}_{23}\mathsf{F}^{23}\right), \qquad (6.11)$$

на основу дефиниција (6.7,6.8) и после враћања константе интеракције за градијентно поље, добија се

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big(&\frac{a}{g^2}\,(F_{12})^2 - \frac{2a\mu}{g}\,F_{12}\phi + (4+a)\mu^2\phi^2 - 4\epsilon F_{12}\phi^2 \qquad (6.12) \\
&+ (D_1\phi)^2 + (D_2\phi)^2 - \epsilon^2\{p_1 + igA_1,\phi\}^2 - \epsilon^2\{p_2 + igA_2,\phi\}^2\Big) \\
= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big(&-\frac{a}{g^2}\,[\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2]^2 + a\mu^2\phi^2 - \frac{2a\mu^3}{g\epsilon}\,\phi + \frac{2ia\mu}{g}\,[\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2]\,\phi \\
&+ 4i\epsilon\,[\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2]\,\phi^2 + [\mathsf{X}_1,\phi]^2 + [\mathsf{X}_2,\phi]^2 - \epsilon^2\{\mathsf{X}_1,\phi\}^2 - \epsilon^2\{\mathsf{X}_2,\phi\}^2\Big).
\end{aligned}$$

Дејства (6.6) и (6.13) су дефинисана када је дефинисан траг, односно за конкретно дату репрезентацију алгебре. Једна могућност је да се размотри коначна матрична репрезентација, $\epsilon = 1$, $a = 0$. У том случају, дејство (6.13)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big(&4\mu^2\phi^2 - 4F_{12}\phi^2 + (D_1\phi)^2 + (D_2\phi)^2 \qquad (6.13) \\
&- \{p_1 + igA_1,\phi\}^2 - \{p_2 + igA_2,\phi\}^2\Big)
\end{aligned}$$

садржи градијентна поља која не пропагирају, а интерагују са скаларом. Друга могућност, коју ћемо овде да размотримо, јесте да се испита континуални лимес и поља репрезентују на Мојаловој равни. Отежавајућа околност, када је у питању овај приступ, је релативно компликован облик дејства, што се не односи само на интеракциони члан, него и на кинетички. Ово је последица мешања скаларног и векторског поља. С друге стране, ово наговештава да ће хармонијски потенцијал да конфинира, поред скаларног и векторско поље. Ово дејство је манифестно градијентно инваријантно јер је записано помоћу коваријантних координата, међутим ЛС-статус није јасан јер дејство (6.13) није инваријантно на замену $[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2] \leftrightarrow \{\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2\}$.

Када су у питању слободни параметри, њих у овој теорији има само два. Један слободан параметар је a и он мери скалу некомутативности, док μ одговара скали простор-времена. Константе интеракције су апсорбоване у градијентна поља. Маса скаларног поља и све константе интеракције се фиксирају овим параметрима.

Дејство (6.13) има два класична вакуума:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \phi = 0, \tag{6.14}$$

$$A_1 = -\frac{\mu^2 y}{g\epsilon}, \quad A_2 = \frac{\mu^2 x}{g\epsilon}, \quad \phi = \frac{\mu}{g\epsilon}\,. \tag{6.15}$$

Први вакуум је тривијалан, док други има константну вредност јачине поља, $F_{12} = \mu^2/\epsilon$, као и ненулту вредност енергије. После развоја око тривијалног вакума (6.14), фиксирања калибрације и додавања духова, добија се следеће дејство [50]

$$S = S_{YM} + S_{gf} + S_{gh} = S_{kin} + S_{int}, \tag{6.16}$$

при чему су кинетички и интеракциони чланови редом

$$\begin{aligned} S_{kin} = -\frac{1}{2}\int & aA_\alpha \Box A^\alpha + 2a\mu\epsilon^{\alpha\beta}(\partial_a A_\beta)\phi + \phi\Box\phi \\ & -(4+a)\,\mu^2\phi^2 - 4\mu^4 x^\alpha x_\alpha \phi^2 + 2\bar{c}\Box c, \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} S_{int} = -\frac{1}{2}\int & 4\epsilon g\epsilon_{\alpha\beta}(\partial^\alpha A^\beta + igA^\alpha \star A^\beta) \star \phi^2 - 2ig(\partial_\alpha\phi)[A^\alpha \overset{\star}{,} \phi] \\ & + 2ia\mu g\epsilon_{\alpha\beta} A^\alpha \star A^\beta \phi - 2iag\epsilon_{\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta \epsilon_{\gamma\beta} A^\gamma \star A^\delta \\ & + ag^2(\epsilon_{\alpha\beta}A^\alpha \star A^\beta)^2 + g^2[A_\alpha \overset{\star}{,} \phi][A^\alpha \overset{\star}{,} \phi] - \epsilon^2 g^2\{A_\alpha \overset{\star}{,} \phi\}\{A^\alpha \overset{\star}{,} \phi\} \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$+ 2\mu^2 \epsilon g \epsilon_{\alpha\beta} \{x^\alpha \overset{\star}{,} \phi\}\{A^\beta \overset{\star}{,} \phi\} - ig\bar{c}\partial_\alpha [A^\alpha \overset{\star}{,} c].$$

Чланови (6.17) и (6.18), у збиру, представљају модел који ће у наставку бити анализиран.

6.2 Пропагатори: структура на нивоу једне петље

У овом одељку ћемо се ослонити на неке резултате из [50] и дефинисаћемо нове ознаке које ће олакшати процес рачунања. У кинетичком члану (6.17), постоји мешање скаларног и градијентног поља. Ово мешање је последица некомутативности. Да бисмо нашли пропагатор, посматраћемо ова поља као део мултиплета $\Phi^T = (A^\mu, \phi)$, па кинетички члан може да се напише у облику

$$S_{kin} = -\frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} A^\mu & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\Box\delta_{\mu\nu} & -a\mu\epsilon_{\mu\xi}\partial^\xi \\ a\mu\epsilon_{\nu\eta}\partial^\eta & K^{-1} - a\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\nu \\ \phi \end{pmatrix} + 2\bar{c}\,\Box\, c, \tag{6.19}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \Phi^T G^{-1} \Phi + 2\bar{c}\Box c \tag{6.20}$$

где је

$$K^{-1} = \Box - 4\mu^4 x_\alpha x^\alpha - 4\mu^2 \tag{6.21}$$

инверз Мелеровог кернела у импулсном простору. У две димензије, Мелеров кернел у параметарском облику је [93],

$$K(r,s) = -\frac{\pi}{4\mu^4}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\, e^{-\frac{1}{8\mu^2}\left((r+s)^2\xi + (r-s)^2\frac{1}{\xi}\right)}. \tag{6.22}$$

Маса скаларног поља је овде 2μ. За другачије вредности масе, уз фактор $(\xi-1)/(\xi+1)$, се појављује другачији експонент. У наставку ћемо користити нотацију:

$$\tilde{r}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} r_\nu, \qquad r \wedge s = \frac{\epsilon}{\mu^2}\,\epsilon_{\mu\nu} r^\mu s^\nu = \frac{\epsilon}{\mu^2}\, r \cdot \tilde{s}. \tag{6.23}$$

Кернел кинетичког оператора је у импулсном простору дат матрицом

$$G^{-1}(r,s)=\begin{pmatrix}-ar^2\delta_{\mu\nu}(2\pi)^2\delta(r+s) & -ia\mu\tilde{r}_\mu(2\pi)^2\delta(r+s)\\ \\ -ia\mu\tilde{s}_\nu(2\pi)^2\delta(r+s) & -a\mu^2(2\pi)^2\delta(r+s)+K^{-1}(r,s)\end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Инвертовањем ове матрице добијају се елементи матрице пропагатора $G(r,s)$:

$$\begin{aligned}&\underbrace{\phi(r)\phi}_{}(s)=K(r,s),\\ &\underbrace{A^\alpha(r)\phi}_{}(s)=-i\mu\frac{\tilde{r}^\alpha}{r^2}K(r,s),\\ &\underbrace{A^\alpha(r)A}_{}^\beta(s)=(-i\mu)^2\frac{\tilde{r}^\alpha\tilde{s}^\beta}{r^2s^2}K(r,s)-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{\delta^{\alpha\beta}\delta(r+s)}{r^2}.\end{aligned} \tag{6.25}$$

Како је у сваком пропагатору за векторска поља присутна контракција скалрних поља $K(r,s)$, последња два матрична елемента из (6.25) можемо да напишемо као рекурентне релације:

$$\begin{aligned}&\underbrace{A^\alpha(r)\phi}_{}(s)=-i\mu\frac{\tilde{r}^\alpha}{r^2}\underbrace{\phi(r)\phi}_{}(s),\\ &\underbrace{A^\alpha(r)A}_{}^\beta(s)=(-i\mu)^2\frac{\tilde{r}^\alpha\tilde{s}^\beta}{r^2s^2}\underbrace{\phi(r)\phi}_{}(s)-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{\delta^{\alpha\beta}\delta(r+s)}{r^2}.\end{aligned} \tag{6.26}$$

Овакав начин записа је значајан јер омогућава апсорбовање великог броја израза и води поништавању значајног дела дивергентних доприноса. Интеракциони члан садржи тровертексе и четворовертексе. У импулсном простору, тровертекси су:

$$\begin{aligned}S_{int,1}&=-\frac{2i\epsilon g}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\cos\frac{p\wedge q}{2}\,\tilde{p}^\mu A_\mu(p)\,\phi(q)\,\phi(k),\\ S_{int,2}&=\frac{2ig}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\sin\frac{p\wedge q}{2}\,p^\mu\phi(p)\,\phi(q)\,A_\mu(k),\\ S_{int,3}&=-\frac{4i\epsilon\mu^2 g}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\cos\frac{p\wedge q}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_\mu}\phi(p)\,\phi(q)\,A_\mu(k),\\ S_{int,4}&=-\frac{a\mu g}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\sin\frac{p\wedge q}{2}\,\epsilon^{\mu\nu}A_\mu(p)\,A_\nu(q)\,\phi(k),\\ S_{int,5}&=\frac{iag}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\sin\frac{p\wedge q}{2}\,\epsilon^{\mu\nu}\tilde{k}^\rho A_\mu(p)\,A_\nu(q)\,A_\rho(k),\end{aligned}$$

$$S_{int,6} = \frac{2ig}{(2\pi)^4} \int dp\, dq\, dk\, \delta(p+q+k) \sin\frac{p\wedge q}{2}\, p^\mu\, \bar{c}(p)\, c(q)\, A_\mu(k),$$

а четворовертекси:

$$\begin{aligned}
S_{int,7} &= \frac{2g^2}{(2\pi)^6} \int dp\, dq\, dp'\, dq'\, \delta(p+q+p'+q') \sin\frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{p'\wedge q'}{2} \times \\
&\qquad \times \delta^{\mu\nu} A_\mu(p)\, \phi(q)\, A_\nu(p')\, \phi(q'), \\
S_{int,8} &= \frac{2\epsilon^2 g^2}{(2\pi)^6} \int dp\, dq\, dp'\, dq'\, \delta(p+q+p'+q') \cos\frac{p\wedge q}{2} \cos\frac{p'\wedge q'}{2} \times \\
&\qquad \times \delta^{\mu\nu} A_\mu(p)\, \phi(q)\, A_\nu(p')\, \phi(q'), \\
S_{int,9} &= -\frac{2\epsilon g^2}{(2\pi)^6} \int dp\, dq\, dp'\, dq' \quad d(p+q+p'+q') \sin\frac{p\wedge q}{2} \cos\frac{p'\wedge q'}{2} \times \\
&\qquad \times \epsilon^{\mu\nu} A_\mu(p)\, A_\nu(q)\, \phi(p')\, \phi(q'), \\
S_{int,10} &= \frac{ag^2}{2(2\pi)^6} \int dp\, dq\, dp'\, dq' \quad d(p+q+p'+q') \sin\frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{p'\wedge q'}{2} \epsilon^{\mu\nu} \times \\
&\qquad \times \epsilon^{\rho\sigma} A_\mu(p)\, A_\nu(q)\, A_\rho(p')\, A_\sigma(q').
\end{aligned}$$

Ми желимо да израчунамо корекције пропагатора на нивоу једне петље, односно збир очекиваних вредности

$$P_{FF',ij}(r,s) = -\langle F(r)F'(s)\, S_{int,i}\, S_{int,j}\,\rangle, \qquad i,j = 1,\ldots,6 \tag{6.27}$$

$$P_{FF',i}(r,s) = -\langle F(r)F'(s)\, S_{int,i}\,\rangle, \qquad i = 7,\ldots,10 \tag{6.28}$$

где су F и F' поља која одговарају спољашњим линијама и која могу имати вредности ϕ или A^μ мултиплета Φ. Индекси $i,j = 1,\ldots,10$ одговарају интеракционим вертексима. Изрази (6.27) одговарају двочестичним корелационим функцијама са једном петљом. Двочестичне корелационе функције са две петље су облика (6.28). Ови доприноси неће бити разматрани у наставку. Једночестичне корелационе функције $P_{F,i}$ (тедпол дијаграми) су израчунате у [50]. Ови тедпол дијаграми су уврштени у коначни резултат како би се омогућило евентуално скраћење дивергентних доприноса у комбинацији са члановима $P_{F,ij}$. Конкретно, у компонентама, за поправке пропагатора уводимо ознаке:

$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi,ij}(r,s) &\equiv P_{\phi(r)\phi(s),ij} = -\langle\phi(r)\phi(s)(i)(j)\rangle,\\
P^{\mu}_{\phi A,ij}(r,s) &\equiv P_{\phi(r)A^{\mu}(s),ij} = -\langle\phi(r)A^{\mu}(s)(i)(j)\rangle,\\
P^{\mu}_{A\phi,ij}(r,s) &\equiv P_{A^{\mu}(r)\phi(s),ij} = -\langle A^{\mu}(r)\phi(s)(i)(j)\rangle,\\
P^{\mu\nu}_{AA,ij}(r,s) &\equiv P_{A^{\mu}(r)A^{\nu}(s),ij} = -\langle A^{\mu}(r)A^{\nu}(s)(i)(j)\rangle,
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Да бисмо нашли облик квантних корекција полазног дејства на нивоу једне петље, потребно је да израчунамо ампутиране дијаграме. Уклањање спољашњих ногу са $P(r,s)$ није у потпуности тривијално зато што се овде ради о нелокалном кинетичком члану, који у себи садржи Мелеров кернел. Ампутирани пропагатор је

$$\Pi(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int drds\, G^{-1}(p,-r)P(r,s)G^{-1}(-s,q). \tag{6.30}$$

Уклањањем спољашњих пропагатора смањује се број Мелерових кернела, а самим тим и број параметарских интеграла у коначном резултату. Ово, због смањења броја параметара, значајно олакшава анализу, али повећава број чланова које је потребно анализирати.

У току рачунања, због контракција више поља, добијамо производе више Мелерових кернела, а због рекурентних релација (6.26), све контракције поља се редукују на контракције скаларних поља. Да бисмо олакшали рачун, у наставку уводимо ознаке за производе више контракција. У најједноставнијем случају, када постоје производи само два Мелерова кернела, они се појављују у облику

$$K_2(p,q,k,l) = K(p,q)K(k,l) + K(p,k)K(q,l) + K(p,l)K(q,k). \tag{6.31}$$

Када постоје контракције са спољашњим импулсима r и s, ове импулсе одвајамо вертикалним линијама и записујемо као

$$K_2(r,s|p,q) = K(r,p)K(s,q) + K(r,q)K(s,p). \tag{6.32}$$

У општијем случају са m спољашњих и n унутрашњих импусла ($n \geq m$), циклични производ више Мелерових кернела K_{m+n} се појављује у облику

$$2^{\frac{n-m}{2}}\left(\frac{n-m}{2}\right)!\,K_{m+n}(r_1,\,\dots\,,r_m|p_1,\,\dots\,,p_n) =$$
$$= \sum_{\pi_p} K(r_1,p_{\pi_1})K(r_2,p_{\pi_2})\dots K(r_m,p_{\pi_m})K(p_{\pi_{m+1}},p_{\pi_{m+2}})\dots K(p_{\pi_{n-1}},p_{\pi_n})$$

где су π_p пермутације унутрашњих импулса. K_{m+n} је симетрично при измени било која два спољашња или унутрашња вертекса. Рачун се додатно поједностављује применом рекурзије

$$K_{m+n}(r_1,\,\dots\,,r_m|p_1,\,\dots\,,p_n) = \qquad (6.33)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} K(r_1,p_i)K_{m+n-1}(r_2,\,\dots\,,r_m|p_1,\,\dots\,,p_{i-1},p_{i+1},\,\dots\,,p_n).$$

Применом рекурентних релација за контракције (6.26) збир свих доприноса може кондензовано да се запише у облику

$$P_{\phi\phi} = \sum_{i\le j\le 6}(2-\delta_{ij})P_{\phi\phi,ij} + \sum_{7\le k\le 10} P_{\phi\phi,k} \qquad (6.34)$$

$$P^{\alpha}_{\phi A} = \sum_{i\le j\le 6}(2-\delta_{ij})P^{\alpha}_{\phi A,ij} + \sum_{7\le k\le 10} P^{\alpha}_{\phi A,k} = -i\mu\,\frac{\tilde{r}^{\alpha}}{r^2}\,P_{\phi\phi} + P'^{\alpha}_{\phi A} \qquad (6.35)$$

$$P^{\alpha\beta}_{AA} = \sum_{i\le j\le 6}(2-\delta_{ij})P^{\alpha\beta}_{AA,ij} + \sum_{7\le k\le 10} P^{\alpha\beta}_{AA,k}$$
$$= -\mu^2\frac{\tilde{r}^{\alpha}\tilde{s}^{\beta}}{r^2 s^2}\,P_{\phi\phi} - i\mu\,\frac{\tilde{r}^{\alpha}}{r^2}\,P'^{\beta}_{\phi A} - i\mu\,\frac{\tilde{s}^{\beta}}{s^2}\,P'^{\alpha}_{\phi A} + P'^{\alpha\beta}_{AA}, \qquad (6.36)$$

при чему због сличности вертекса $S_{int,4}$ и $S_{int,5}$ постоји одговарајућа релација између доприноса, што дефинише чланове

$$P_{\phi\phi i5} = -P_{\phi\phi i4} + P'_{\phi\phi i5},$$
$$P^{\alpha}_{\phi Ai5} = -P^{\alpha}_{\phi Ai4} - i\mu\frac{\tilde{r}^{\alpha}}{r^2}P'_{\phi\phi i5} + P'^{\alpha}_{\phi Ai5}, \qquad (6.37)$$
$$P^{\alpha\beta}_{AAi5} = -P^{\alpha\beta}_{AAi4} - \mu^2\frac{\tilde{r}^{\alpha}\tilde{s}^{\beta}}{r^2 s^2}P'_{\phi\phi i5} - i\mu\frac{\tilde{r}^{\alpha}}{r^2}P'^{\beta}_{\phi Ai5} - i\mu\frac{\tilde{s}^{\beta}}{s^2}P'^{\alpha}_{\phi Ai5},$$

где $i = 1,\dots,5$. Ово води ка значајном поништавању, као и међусобној апсорпцији великог броја чланова.

Постоје две врсте дивергентних доприноса на нивоу једне петље.

Четворовертекси дају једночестичне корелационе функције које су израчунате у [50] и имају облик

$$\int \phi\phi, \qquad \int A^\mu A_\mu, \qquad \int \{x^\mu \overset{\star}{,} A_\mu\}\,\phi. \tag{6.38}$$

Постоје такође дивергентни доприноси другог реда. Ове двочестичне корелационе функције, који потичу од контракција два тровертекса су израчунате у [50]. У наставку ће бити објашњени само основни кораци рачуна који је веома дуг и садржи неколико трансформација израза са више стотина чланова.

Размотримо елемент $P_{\phi\phi}$ матрице пропагатора. Овај матрични елемент уједно даје и најдивергентније нелокалне доприносе типа $\Box^{-1}$ и $\Box^{-2}$. Дијаграм који садржи два тровертекса $S_{int,1}$ има допринос

$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi 11} = &-\frac{4\epsilon^2\mu^2 g^2}{(2\pi)^8}\int dpdqdkdp'dq'k'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k')\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2} \\
&\times \epsilon^{\rho\sigma}p_\rho\epsilon^{\mu\nu}p'_\mu\Big\langle\phi(r)\phi(s)A_\sigma(p)\phi(q)\phi(k)A_\nu(p')\phi(q')\phi(k')\Big\rangle,
\end{aligned} \tag{6.39}$$

при чему је корелациона функција $\langle\phi(r)\phi(s)A_\sigma(p)\phi(q)\phi(k)A_\nu(p')\phi(q')\phi(k')\rangle$ сума свих контракција спољашњих поља са пољима која су садржана у вертексима. Међусобне контракције спољашњих поља се не узимају у обзир зато што би оне дале неповезане дијаграме. Постоји укупно деведесет чланова облика $\wick{\c1\phi(r)\c2\phi(s)\c1A_\sigma(p)\c2\phi(q)\c3\phi(k)\c3A_\nu(p')\c4\phi(q')\c4\phi(k')}$ са по четири контракције у сваком члану. Ово у збиру даје комбинацију $K_4(r,s|p,q,k,p',q',k')$, јер свака контракција скаларног поља са скаларним и градијентним даје по један Мелеров кернел. Постоји и додатних дванаест контракција $\underbracket{AA}$ од којих свака садржи по члан у којем нема Мелеровог кернела (други члан у (6.25)), што резултује комбинацијом $K_3(r,s|p,q,p',q')$ која је симетрични збир производа три Мелерова кернела. Коначни резултат је

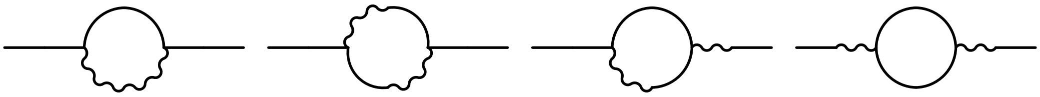
$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi 11} = &-\frac{4\epsilon^2\mu^2}{(2\pi)^8}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}K_4(r,s|p,q,k,p',q',k') \\
&+\frac{4\epsilon^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q')\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}K_3(r,s|p,q,p',q').
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Овде производи Мелерових кернела $K_3(r,s|p,q,p',q')$ и $K_4(r,s|p,q,k,p',q',k')$ имају улогу одговарајућих фактора симетрије.

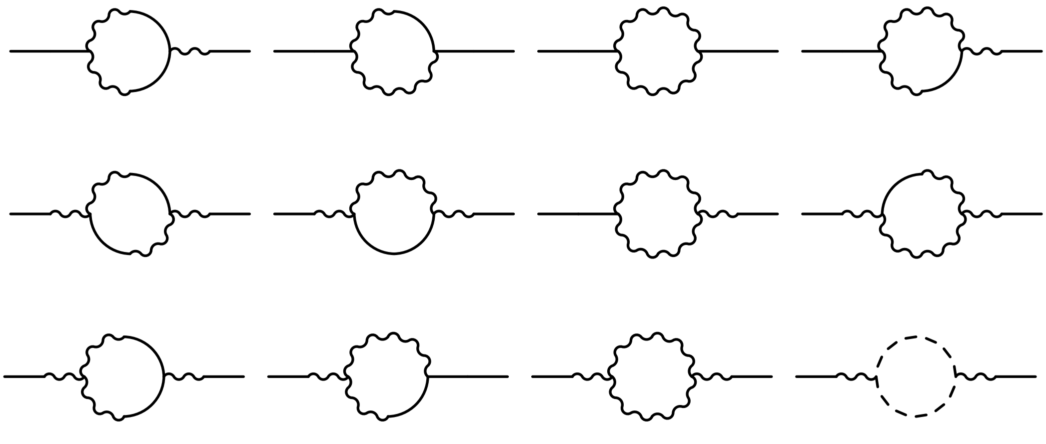
Дате контракције могу да се репрезентују и одговарајућим Фајнмановим дијаграмима. Контракције типа $\underbrace{\phi\phi}$ ћемо да репрезентујемо правим линијама, контракције $\underbrace{AA}$ таласастим линијама, а $\underbrace{\phi A}$ мешаним линијама:

$$\underbrace{\phi\phi} = \text{———}\,, \qquad \underbrace{AA} = \sim\!\sim\!\sim\,, \qquad \underbrace{\phi A} = \text{——}\!\sim\!\sim\,. \tag{6.41}$$

Тако контракције различитог типа које одговарају амплитуди $P_{\phi\phi 11}$, могу да се представе дијаграмима

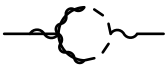


Доприноси других вертекса амплитуди $P_{\phi\phi}$ се налазе у додатку (I.1-I.11), а дијаграми који одговарају овим доприносима су



Испрекиданом линијом представљени су пропагатори за духове $\bar{c}\underset{\sqcup}{c}$. Парцијални доприноси духова су нула зато што не постоје пропагатори између мултиплета Φ и духова

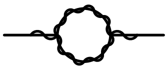
$$P_{\phi\phi i6} =$$



$$= 0 \tag{6.42}$$

за $i \neq 6$, где је дупла линија општа ознака за контракцију између два члана мултиплета Φ. Коришћењем претходно наведеног, целокупни допринос за матрични елемент $P_{\phi\phi}$ може да се сабере у облику

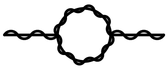
$$P_{\phi\phi} =$$



$$= \sum_{i=1,6;\, i\neq 5} P_{\phi\phi ii} + 2P_{\phi\phi 12} + 2P_{\phi\phi 13} + 2P'_{\phi\phi 15} \tag{6.43}$$
$$+ 2P_{\phi\phi 23} + 2P'_{\phi\phi 25} + 2P'_{\phi\phi 35} + P'_{\phi\phi 45} + P'_{\phi\phi 55} + \sum_{i=7,10} P_{\phi\phi i}$$

Аналогна једначина постоји и у случају када су спољашња поља градијентна или комбинација која са састоји од једног скаларног и једног градијентног. Односно, $P'^{\alpha}_{\phi A}$ је аналогни збир чланова $P'^{\alpha}_{\phi A ij}$, а $P'^{\alpha\beta}_{AA}$ одговарајући збир $P'^{\alpha\beta}_{AAij}$. Пропагатор целог мултиплета је тада матрица

$$\hat{P} =$$

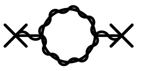


$$= \begin{pmatrix} P^{\alpha\beta}_{AA} & P^{\alpha}_{\phi A} \\ & \\ P^{\beta}_{\phi A} & P_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Квантна корекција на нивоу једне петље је збир свих поменутих израчунатих чланова. Да би се ови доприноси израчунали, потребно је изразити Мелерове кернеле (у горњем примеру K_3 и K_4) као Гаусове параметарске интеграле по импулсима p, q, k. Након тога се уради интеграција по импулсима. Резултат је дивергентни вишестуки интеграл по параметрима, који изузев у најједноставнијим случајевима, не може да се израчуна експлицитно.

Као што је раније наглашено, ампутирани пропагатори имају једноставнију структуру јер се производи Мелерових кернела редукују. Тако се на пример K_3 и K_4 редукују на више чланова који садрже K и K_2. Да би се нашли сви ампутирани пропагатори, потребно је наћи и остале матричне елементе $P_{\phi A}$ и P_{AA}, који се налазе у додатку (II.1-III.11). Ампутирани пропагатор за цео мултиплет (6.30) је репрезентован дуплим линијама које могу имати вредности чланова мултиплета (ϕ, A), при чему су уклоњени спољашњи пропагатори

$$\hat{\Pi}(p,q) =$$



$$= \begin{pmatrix} \Pi^{\mu\nu}_{AA} & \Pi^{\mu}_{\phi A} \\ & \\ \Pi^{\nu}_{\phi A} & \Pi_{\phi\phi} \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

а матрични елементи су дати изразима:

$$\Pi^{\mu\nu}(p,q) = a^2 p^2 q^2 P'^{\mu\nu}_{AA}(p,q) \tag{6.46}$$

$$\Pi^{\mu}(p,q) = -ia^2 \mu p^2 \tilde{q}_\rho P'^{\mu\rho}_{AA}(p,q) - \frac{ap^2}{(2\pi)^2} \int dk\, P'^{\mu}_{\phi A}(p,k) K^{-1}(-k,q) \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned} \Pi(p,q) = {} & -a^2 \mu^2 \tilde{p}_\rho \tilde{q}_\sigma P'^{\rho\sigma}_{AA}(p,q) \\ & + \frac{ia\mu\tilde{p}_\rho}{(2\pi)^2} \int dk\, P'^{\rho}_{\phi A}(p,k) K^{-1}(-k,q) + \frac{ia\mu\tilde{q}_\rho}{(2\pi)^2} \int dk\, P'^{\rho}_{\phi A}(q,k) K^{-1}(-k,p) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp' dq'\, K^{-1}(p,-p') P_{\phi\phi}(p',q') K^{-1}(-q',q). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Множењем ампутираног пропагатора мултиплетом класичних спољашњих поља, добија се ефективно дејство

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s\, \Phi^T(-r)\, \Pi(r,s)\, \Phi(-s). \tag{6.49}$$

Наш главни задатак је да издвојимо дивергенције у последњем изразу.

6.3 Дивергенције у $\phi\phi$-сектору

Ефективно дејство у које садржи квантне корекције на нивоу једне петље је дато једначином (6.49). У комутативном случају, двочестичне корелационе функције су облика

$$\Pi(r,s) = \Pi(r)\, \delta(r+s). \tag{6.50}$$

Последња једначина је последица транслационе инваријантности[7]. Међутим, ми овде разматрамо нелокалну теорију која није транслационо инваријантна. Због тога, да бисмо добили облик дивергенција у координатном простору уводимо *кратке* и *дуге варијабле*, u и v, респективно:

$$u = \frac{r+s}{2}, \qquad v = \frac{r-s}{2}. \tag{6.51}$$

Овде u представља разлику између улазних и излазних импулса у вертексу или дуж линије. У транслационо инваријантном случају, интеграција се врши по u, а дивергенција остаје у $\Pi(v)$, што даје корекцију у ефективном дејству облика

$$\Gamma = \int \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \Phi^T(-u-v)\, \Pi(u+v)\delta(2u)\, \Phi(-u+v) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}v\, \Phi^T(-v)\, \Pi(v)\, \Phi(v).$$

У нашем случају δ-функција је замењена експоненцијално опадајућим фактором

$$\delta(u) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}, \tag{6.52}$$

који је сакривен у параметарским интегралима. Овај експоненцијални фактор регуларизује интеграцију по импулсима у УВ-сектору. Дивергенције се појављују у ИЦ-сектору за мале вредности кратке варијабле u. Метод који користимо како бисмо израчунали ове ИЦ-дивергенције је следећи. Развијамо чланове у ефективном дејству (6.49) око $u = 0$, задржавајући притом све параметарске интеграле који потичу из Мелерових кернела и Швингерових параметризација. Резултујући интеграли су Поасоновог типа. Када се ови интеграли реше, остају интеграли по параметрима. Како би се идентификовао степен дивергенције, уводе се одговарајући регулатори, а поља се развијају по краткој варијабли u_α (погледати развој (6.59)). Након тога се интеграли члан по члан и испоставља се да је само првих неколико чланова дивергентно. Као што је напоменуто раније, разматрамо само доњу границу интеграције јер се само ту појављују дивергенције. На крају, налазимо нелокалне дивергенције облика

$$\int \phi\, \Box^{-1}\phi, \qquad \int \phi\, \Box^{-2}\phi. \tag{6.53}$$

---

[7] Овде се користи конвенција за Фуријеову трансформацију у којој су сви импулси улазни.

У наставку ћемо да размотримо детаље рачуна дивергентних доприноса $\Gamma^{(div)}_{\phi\phi}$ у ефективном дејству. Након уклањања спољашњих линија, добијају се изрази који садрже неколико стотина чланова. Већина тих израза је коначна, што може лако да се види оценом степена дивергенције. Разматрамо дивергентне чланове по растућем степену импулса, очекујући да се у најнижем реду појави само ренормализација масе и таласне функције. Међутим, пажљива анализа показује да се у најнижем степену по импулсу појављују нелокални чланови облика $\Box^{-2}$ и $\Box^{-1}$ који су нови. Због тога је фокус у овом разматрању управо на тим члановима. Означавамо те чланове израза Π и Γ истим ознакама са тилдом. Делови ампутираног пропагатора Π, у $\phi\phi$-сектору који садрже нелокалне дивергентне доприносе су:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{(1)}_{\phi\phi} =& -\frac{32a\mu^8 g^2}{(2\pi)^2\epsilon^2}\,\frac{r\wedge s}{r^2 s^2 (r+s)^2}\,\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\ &\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\,\frac{p\wedge q}{p^2}\,K(p,q),\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{(2)}_{\phi\phi} =& -\frac{8a\mu^8 g^2}{(2\pi)^2\epsilon^2}\,\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\ &\times \sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{(p\wedge r)\,(q\wedge s)}{p^2 q^2}\,K(p,q)\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{(3)}_{\phi\phi} =& \frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\ &\times \sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{(p\cdot r)(q\cdot s)}{p^2 q^2}\,K(p,q)\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{(4)}_{\phi\phi} =& -\frac{8a\mu^8 g^2}{(2\pi)^2\epsilon^2}\,\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\ &\times \sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{(p\wedge r)\,(q\wedge s)}{p^2 (p-r)^2}\,K(p,q) + (r\leftrightarrow s).\end{aligned} \tag{6.57}$$

Увођењем кратких и дугих варијабли, изражавањем Мелеровог кернела у параметарском облику и увођењем Швингерове параметризације

$$\frac{1}{p^2} = \int\limits_0^\infty d\eta\, e^{-\eta p^2}, \tag{6.58}$$

налазимо следеће доприносе у ефективном дејству:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\phi\phi} &= \frac{2ag^2}{\pi}\,\Re\!\int du\,dv\,\frac{\phi(-u-v)\phi(-u+v)}{(u+v)^2(u-v)^2u^2}\,(v\cdot\tilde{u})\tilde{u}_\alpha\,e^{-iu\wedge v}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}e^{-(\xi+\frac{1}{\xi})\frac{u^2}{2\mu^2}}\\
&\quad\times\int dp\,p^\alpha\Big(e^{-i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{u}}{\mu^2}}-e^{i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{u}}{\mu^2}}\Big)e^{-\frac{1}{\xi}\frac{p^2}{2\mu^2}+\frac{1}{\xi}\frac{p\cdot u}{\mu^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\phi\phi} &= \frac{ag^2}{2\pi\mu^2}\,\Re\!\int du\,dv\,\frac{\phi(-u-v)\phi(-u+v)}{(u+v)^2(u-v)^2}\,e^{iu\wedge v}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-(\xi+\frac{1}{\xi}+4\eta)\frac{u^2}{2\mu^2}}\\
&\quad\times\int dp\,\frac{(p\cdot(\tilde{u}+\tilde{v}))(p\cdot(\tilde{u}-\tilde{v})+2u\cdot\tilde{v})}{p^2}\,e^{-(\frac{1}{\xi}+\eta)\frac{p^2}{2\mu^2}+(\frac{1}{\xi}+2\eta)\frac{p\cdot u}{\mu^2}}\Big(e^{-i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{v}}{\mu^2}}-e^{i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{u}}{\mu^2}}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\phi\phi} &= \frac{g^2}{2\pi\mu^2}\,\Re\!\int du\,dv\,\frac{\phi(-u-v)\phi(-u+v)}{(u+v)^2(u-v)^2}\,e^{iu\wedge v}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-(\xi+\frac{1}{\xi}+4\eta)\frac{u^2}{2\mu^2}}\\
&\quad\times\int dp\,\frac{(p\cdot(u+v))((2u-p)\cdot(u-v))}{p^2}\,e^{-(\frac{1}{\xi}+\eta)\frac{p^2}{2\mu^2}+(\frac{1}{\xi}+2\eta)\frac{p\cdot u}{\mu^2}}\Big(e^{i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{u}}{\mu^2}}-e^{-i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{v}}{\mu^2}}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(4)}_{\phi\phi} &= \frac{ag^2}{2\pi\mu^2}\,\Re\!\int du\,dv\,\frac{\phi(-u-v)\phi(-u+v)}{(u+v)^2(u-v)^2}\,e^{iu\wedge v}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\\
&\quad\times\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-(\xi+\frac{1}{\xi}+\eta)\frac{u^2}{2\mu^2}-\eta\frac{v^2+2u\cdot v}{2\mu^2}}\int dp\,\frac{(p\cdot(\tilde{u}+\tilde{v}))(p\cdot(\tilde{u}-\tilde{v})+2u\cdot\tilde{v})}{p^2}\\
&\quad\times e^{-(\frac{1}{\xi}+\eta)\frac{p^2}{2\mu^2}+(\frac{1}{\xi}+\eta)\frac{p\cdot u}{\mu^2}+\eta\frac{p\cdot v}{\mu^2}}\Big(e^{-i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{v}}{\mu^2}}-e^{i\epsilon\frac{p\cdot\tilde{u}}{\mu^2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Да бисмо анализирали понашање ових интеграла, прво интегралимо по p применом Гаусових интеграла (који се налазе у додатку). За $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\phi\phi}$, који је најједноставнији, добијамо

$$
\Gamma^{(1)}_{\phi\phi} = -2a\epsilon g^2\int du\,dv\,\frac{\phi(-u-v)\phi(-u+v)}{(u+v)^2(u-v)^2u^2}(u\cdot\tilde{v})\sin(u\wedge v)\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-(1+\epsilon^2)\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}.
$$

Потребно је да проценимо овај израз на доњој граници $u=0$, тако да развијамо поље ϕ око ове тачке,

$$
\phi(-u+v) = \phi(v) - \partial_\alpha\phi(v)\,u^\alpha + \dots \tag{6.59}
$$

Члан у водећем реду је

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\phi\phi} = -\frac{2a\epsilon^2 g^2}{\mu^2} \int dv \, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2} \int du \int\limits_1^\infty d\xi \, \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \, e^{-(1+\epsilon^2)\,\xi \frac{u^2}{2\mu^2}}. \tag{6.60}$$

Лако се види да је овај израз дивергентан, односно да је резултат последње две интеграције бесконачан. Када је $u = 0$, интеграл по ξ облика $\int_1^\infty d\xi \, (\xi - 1)/(\xi + 1)$ је дивергентан за $\xi = \infty$. Ако прво применимо интеграцију по ξ, резултујући интеграл $\int du \, e^{-u^2}/u^2$ је логаритамски дивергентан у $u = 0$.

Коришћењем регуларизације описане у одељку 6.5, за дивергентни део $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\phi\phi}$ добијамо

$$\tilde{\Gamma}^{(1,div)}_{\phi\phi} = -\frac{16\pi^3 a\epsilon^2 g^2}{1 + \epsilon^2} \log \Lambda \int \phi \, \Box^{-1} \phi, \tag{6.61}$$

где је Λ регуларизациони параметар. Анализа преосталих чланова је слична, премда компликованија, јер одговарајући изрази у водећем реду, после развоја по u, садрже интеграле по два параметра ξ и η. Детаљи рачуна су дати у додатку. Систематска процедура која омогућава оцену ових интеграла је описана у одељку 6.5. Сабирањем свих дивергентних нелокалних доприноса у $\phi\phi$-сектору, добијамо

$$\tilde{\Gamma}^{(div)}_{\phi\phi} = \left(\frac{8}{\epsilon^2} - 14 + \epsilon^2\right) \pi^3 \mu^4 g^2 \log \Lambda \int \phi \, \Box^{-2} \phi + \epsilon^2 \pi^3 \mu^2 g^2 \Lambda^2 \int \phi \, \Box^{-1} \phi. \tag{6.62}$$

Додатно, $\Gamma^{(div)}_{\phi\phi}$ садржи $\displaystyle\int \phi\phi$ члан који је пронађен и у [50] са коригованим бесконачним префактором.

6.4 Дивергенције у AA-сектору

Највећа препрека у формулацији ренормализабилне некомутативне градијентне теорије на Мојаловом простору је ИЦ-квадратно дивергентни члан облика $\Pi^{\mu\nu} \propto p^\mu p^\nu/(p^2)^2$. Овај члан потиче од непланарног дела сопствене енергије градијентног поља [94, 95, 96] и до сада се испоставило да је његово присуство независно од начина на који је фиксирана калибрација. Последица је постојање нелокалног контрачлана, [66, 67]

$$\int F^{\mu\nu} \star \frac{1}{D^2\tilde{D}^2} \star F_{\mu\nu}. \tag{6.63}$$

Као што ће се показати, у теорији коју разматрамо такав члан не постоји, али постоје нелокални чланови другачијег облика.

Анализирајући облик $\Pi_{\mu\nu}$ у AA-сектору, налазимо само два члана који могу да представљају извор нелокалних дивергенција:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu}(r,s) &= \frac{4a\mu^2g^2}{(2\pi)^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{p_\mu q_\nu}{p^2q^2}\,K(p,q)\\
\tilde{\Pi}^{(2)}_{\mu\nu}(r,s) &= -\frac{8a\mu^2g^2}{(2\pi)^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{\tilde{p}_\mu \tilde{q}_\nu}{p^2q^2}\,K(p,q).
\end{aligned}$$

Ова два члана имају исти облик до на замену $p_\mu \to \tilde{p}_\mu$, $q_\nu \to \tilde{q}_\nu$. Такође, ова два члана имају и исти дивергентни део. Због тога ћемо овде да анализирамо само први. Рачунски детаљи су веома слични као и у случају $\phi\phi$-сектора. Као и раније, ми желимо да испитамо понашање интеграла за мало u.

Увођењем кратких и дугих варијабли, $\tilde{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu}(r,s)$ постаје

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{a\mu^2g^2}{\pi^2}\int dp\,\sin\frac{p\wedge(u+v)}{2}\,\sin\frac{(2u-p)\wedge(u-v)}{2}\,\frac{p_\mu(2u-p)_\nu}{p^2(2u-p)^2}\,K(p,2u-p).$$

Увођењем Швингерове параметризације и изражавајући Мелеров кернел преко параметара, добијамо

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu}(u,v) = -\frac{a}{8\pi\mu^4}&\int dp\,\big(\cos(p\wedge u+u\wedge v)-\cos(p\wedge v-u\wedge v)\big)\,\frac{2p_\mu u_\nu - p_\mu p_\nu}{p^2}\\
&\times\int_0^\infty d\eta\, e^{-\eta\frac{(2u-p)^2}{2\mu^2}}\int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\frac{1}{2\mu^2}\left(\xi u^2+\frac{1}{\xi}(p-u)^2\right)}.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Члан који желимо да издвојимо је пропорционалан $\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu/(v^2)^2$ па не морамо да разматрамо први косинус. После Гаусове интеграције, добија се

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(1)}_{AA} =& -\frac{ag^2}{8\mu^2}\,\Re\int du\,dv\,A_\mu(-u-v)A_\nu(-u+v)\,e^{iu\wedge v}\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}} \\
&\times\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-\frac{\eta}{1+\eta\xi}\frac{u^2}{2\mu^2}}\,e^{-\frac{\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}+i\epsilon\frac{1+2\eta\xi}{1+\eta\xi}\frac{u\cdot\tilde{v}}{2\mu^2}} \\
&\times\Bigg(\frac{(1+2\eta\xi)^2u^\mu u^\nu+2i\epsilon\xi\tilde{v}^\mu u^\nu}{(1+2\eta\xi)^2u^2-\xi^2\epsilon^2v^2+i\epsilon\xi(1+2\eta\xi)(u\cdot\tilde{v})}+ \\
&\quad+\frac{\xi\mu^2}{(1+2\eta\xi)^2u^2-\xi^2\epsilon^2v^2+i\epsilon\xi(1+2\eta\xi)(u\cdot\tilde{v})}\times \\
&\quad\times\Big(\delta^{\mu\nu}+\frac{2(1+2\eta\xi)^2u^\mu u^\nu-2\epsilon^2\xi^2\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+i\epsilon\xi(1+2\eta\xi)(u^\mu\tilde{v}^\nu+u^\nu\tilde{v}^\mu)}{(1+2\eta\xi)^2u^2-\xi^2\epsilon^2v^2+i\epsilon\xi(1+2\eta\xi)(u\cdot\tilde{v})} \\
&\quad+\frac{2(1+2\eta\xi)^2u^\mu u^\nu-2\epsilon^2\xi^2\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+i\epsilon\xi(1+2\eta\xi)(u^\mu\tilde{v}^\nu+u^\nu\tilde{v}^\mu)}{2\xi(1+\eta\xi)\mu^2}\Big)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Сингуларни део овог релативно дугачког израза је једноставан,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(1,div)}_{AA} =& \frac{ag^2}{8\epsilon^2}\int du\,dv\,\frac{A_\mu(-v)A_\nu(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty\frac{d\xi}{\xi}\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}} \\
&\times\int\limits_0^\infty d\eta\,\left(\delta_{\mu\nu}+2\frac{\tilde{v}_\mu\tilde{v}_\nu}{v^2}-\frac{\epsilon^2\xi}{1+\eta\xi}\frac{\tilde{v}_\mu\tilde{v}_\nu}{\mu^2}\right),
\end{aligned}
$$

тако да се у водећем реду по регулатору Λ добија

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(1,div)}_{AA} &= \frac{ag^2}{8\epsilon^2}\int du\,dv\,\frac{A^\mu(-v)A_\mu(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty\frac{d\xi}{\xi}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty d\eta & (6.65) \\
&= \frac{a\pi^3\mu^2g^2}{\epsilon^2}\,\beta\Lambda\log\Lambda\int A^\mu\,\Box^{-1}A_\mu. & (6.66)
\end{aligned}
$$

Додајући $\Gamma^{(2,div)}_{AA}$, који је истог облика, налазимо

$$
\Gamma^{(div)}_{AA} = -\frac{a\pi^3\mu^2g^2}{\epsilon^2}\,\beta\Lambda\log\Lambda\int dx\,A^\mu(x)\,\Box^{-1}A_\mu(x), \tag{6.67}
$$

Ако ставимо да је $\beta=1$ добијамо

$$
\Gamma^{(div)}_{AA} = -\frac{a\pi^3\mu^2g^2}{\epsilon^2}\,\Lambda\log\Lambda\int A^\mu\,\Box^{-1}A_\mu. \tag{6.68}
$$

6.5 Опис метода регуларизације

Сви чланови из израза (IV.1-IV.3) садрже два типа параметарских интеграла. Један тип интеграла по параметру ξ, који потиче од Мелеровог кернела и други тип по параметру η, који потиче од Швингерове параметризације.

Интеграли по параметру ξ су облика

$$\int\limits_{1}^{\infty} d\xi\, f(\xi)\, e^{-\frac{u^2}{2\mu^2}\xi} \tag{6.69}$$

и они су конвергентни на горњој граници. Међутим, ова регуларизација се губи ако прво посматрамо лимес $u^2 = 0$. У том случају се дивергенција по краткој варијабли u, манифестује као дивергенција по параметру ξ из Мелеровог кернела[8]. Ако прво посматрамо лимес $u \to 0$, то представља потешкоћу у праћењу узрока и врсте дивергенције у крајњој анализи добијених резултата.

Проблем преласка дивергенције која потиче од u на дивергенцију по параметру може да се илуструје једним једноставним примером. Показаћемо како се квадратна ИЦ-дивергенција испољава као дивергенција по параметру, облика

$$\int\limits_{1}^{\infty} d\xi\, \frac{\xi - 1}{\xi + 1}.$$

Један израз који се добија након уклањања спољашњих линија, а у којем је могуће извршити све интеграције експлицитно, је

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int dp \cos\frac{p \wedge u}{2} K(p, -p + u) \\ &= -\frac{\pi}{4\mu^4} \int dp \int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \cos\frac{p \wedge u}{2} e^{-\frac{1}{8\mu^2}\left(u^2\xi + (2p-u)^2\frac{1}{\xi}\right)}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

---

[8] Ову појаву је први уочио Драган Прекрат и демонстрирао примером који следи.

Сви чланови које ћемо анализирати имају сличан, али компликованији облик због присуства додатног параметарског интеграла. Ако прво посматрамо лимес $u^2 = 0$, интеграција по унутрашњем импулсу p резултује дивергентним параметарским интегралом

$$\mathcal{I} = -\frac{\pi^2}{2} \int\limits_1^\infty d\xi \, \frac{\xi - 1}{\xi + 1}. \tag{6.71}$$

С друге стране, ако прво интегралимо по параметру ξ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -\frac{\pi}{2\mu^2} \int\limits_1^\infty d\xi \, \frac{\xi - 1}{\xi + 1} e^{-\xi\alpha^2} \qquad (6.72) \\ &= -\frac{\pi}{2\mu^2} \Big(\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^2} + 2e^{\alpha^2} \big(\operatorname{Chi}(2\alpha^2) - \operatorname{Shi}(2\alpha^2) \big) \Big), \end{aligned}$$

где је $\alpha^2 = (1 + \epsilon^2) u^2 / 8\mu^2$, а након тога посматрамо лимес $u^2 = 0$, имамо квадратну дивергенцију

$$\mathcal{I}|_{\alpha \to 0} = \frac{1}{\alpha^2} - 1 + 2\gamma + 2 \ln 2 + 4 \ln \alpha + o(\alpha^2), \tag{6.73}$$

где је γ Ојлер-Маскеронијева константа.

У последњем примеру постоји само један параметарски интеграл. Чланове из којих је потребно издвојити водеће дивергенције садрже два параметарска интеграла и по правилу није могуће извршити експлицитно све интеграције. Постоји неколико типова ових интеграла и овде ћемо приказати основне кораке и логику регуларизације коју смо користили за издвајање водећих нелокалних дивергенција.

Први израз који ћемо анализирати је облика

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1 - 3a}{\epsilon^2} \mu^2 g^2 \int dudv \frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \int_0^\infty d\eta \, e^{-\frac{\epsilon^2 \xi}{1 + \eta\xi} \frac{v^2}{2\mu^2}} \tag{6.74}$$

и садржи два различита параметарска интеграла од којих је сваки дивергентан. Интеграл по параметру ξ је дивергентан на горњој граници, а као што можемо да закључимо из претходног разматрања ова дивергенција је манифестација ИЦ-дивергенције по u. У [51] је систематски остављан фактор $\exp(-\xi u^2/2\mu^2)$ како би се ова дивергенција пратила. У наставку ћемо изоставити писање овог фактора, али ћемо имати у виду његово присуство. Интеграл по η је дивергентан на на обе границе у зависности од степена параметра η.

Регуларизацију ћемо извршити на следећи начин. За све интеграле користимо исти велики параметар рагуларизације Λ. У интегралима по импулсу, како нас интересује само доња граница, узећемо реципрочну вредност овог параметра уз димензионо усаглашавање помоћу масеног параметра μ. За различите параметарске интеграле користимо различите коефицијенте уз Λ за горње и доње границе. Конкретно, за интеграл по краткој варијабли узимамо

$$\int\limits_0 d(u^2) \longrightarrow \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2), \tag{6.75}$$

где смо претходно дводимензиону меру интеграције по краткој варијабли $\int du = \int du u d\phi = \pi \int d(u^2)$ прилагодили сферној симетрији подинтегралне функције. Слично, за параметарски интеграл по η узимамо

$$\int\limits_0^\infty d\eta \longrightarrow \int\limits_{\beta_2/\Lambda}^{\beta_1\Lambda} d\eta. \tag{6.76}$$

Када у (6.74) развијемо експонент по v^2 изостављамо чланове $O\left((v^2)^2\right)$ зато што ће ови чланови после Фуријеове трансформације дати позитивне степене $\Box$. Нас примарно интересују чланови облика

$$\int dv\, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2}, \qquad \int dv\, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}, \tag{6.77}$$

односно њихове Фуријеове трансформације

$$\int \phi\, \Box^{-2}\phi, \qquad \int \phi\, \Box^{-1}\phi, \tag{6.78}$$

које дају нелокалне доприносе у ефективном дејству. После равоја по v^2, (6.74) постаје

$$\mathcal{I}_1 = \pi \int dv \frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2} \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2) \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1} \int\limits_0^{\beta_1\Lambda} d\eta \left(1 - \frac{\epsilon^2\xi}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}\right). \tag{6.79}$$

Интеграл по η није дивергентан у нули, па у овом конкретном случају нема потребе за регуларизацијом на доњој граници. После интеграције по η, у координатном простору имамо

$$I_1 = 4\pi^3 \Bigg(\beta_1 \Lambda \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-2} \phi(x) \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2) \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} - \frac{\epsilon^2}{2\mu^2} \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-1} \phi(x) \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2) \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \ln(\beta_1 \Lambda \xi + 1) \Bigg).$$

Интеграција по параметру ξ није проблематична на доњој граници, док је на горњој граници могуће издвојити водећи дивергентни допринос. Како је

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \Big(1 - \frac{1}{\xi + 1} \Big), \tag{6.80}$$

видимо да је дивергентни допринос у лимесу на горњој граници ($\xi \to \infty$) облика $\int d\xi/\xi$. Ова дивергенција је ИЦ-дивергенција по u. Као и у претходном примеру, дивергенција по ξ је манифестација дивергенције по u. У овом случају, то је логаритамска дивергенција

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} e^{-\frac{u^2}{2\mu^2}\xi} = -\ln\left(\frac{2\mu^2}{u^2}\right) - \gamma + O\left(\frac{u^2}{2\mu^2}\right). \tag{6.81}$$

Узимајући у обзир претходне аргументе и задржавајући само водећу дивергенцију по ξ, добијамо

$$\mathcal{I}_1 = 4\pi^3 \Bigg(\beta_1 \Lambda \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-2} \phi(x) \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2) \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} - \frac{\epsilon^2}{2\mu^2} \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-1} \phi(x) \int\limits_{\mu^2/\Lambda} d(u^2) \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi} \big(\ln \Lambda + \ln \xi \big) \Bigg).$$

Коришћењем (6.81) и интеграцијом по u, коначно

$$\mathcal{I}_1 = 8\pi^3 \mu^2 \Bigg(-\frac{\beta_1}{2} \ln \Lambda \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-2} \phi(x) + \frac{3\epsilon^2}{8\mu^2} \frac{\ln^2 \Lambda}{\Lambda} \int dx \, \phi(x) \, \Box^{-1} \phi(x) \Bigg),$$

а како за $\Lambda \to \infty$ други члан тежи нули, овај интеграл даје нелокалну логаритамску ИЦ-дивергенцију облика

$$\mathcal{I}_1 = -4\pi^3 \mu^2 \beta_1 \ln \Lambda \int dx\, \phi(x)\, \Box^{-2} \phi(x). \tag{6.82}$$

Облик интеграла који следе је нешто сложенији и регуларизација захтева додатне кораке. Поменути кораци подразумевају регуларизацију у случају када постоји пол подинтегралне функције у параметарском интегралу по η, као на пример у интегралу

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{(\eta - \epsilon)^2}. \tag{6.83}$$

Видимо да овај интеграл има двоструки пол у тачки $\eta = \epsilon$. У овом случају користили смо за околину пола исти регулатор са новим коефицијентом γ_1,

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_0^{\epsilon - \gamma_1/\Lambda} \frac{d\eta}{(\eta - \epsilon)^2} + \int\limits_{\epsilon + \gamma_1/\Lambda}^\infty \frac{d\eta}{(\eta - \epsilon)^2} = \frac{2\Lambda}{\gamma_1} + \text{коначни део}. \tag{6.84}$$

Постоје случајеви када параметарски интеграл по η има засек у простору параметара, односно када место пола у подинтегралној функцији интеграла по η зависи од вредности параметра ξ. Међутим, испоставило се да у свим случајевима та зависност при гореописаној регуларизационој прескрипцији нестаје,

$$\int\limits_0^{1/2(\epsilon - 1/\xi) - \gamma_2/\Lambda} \frac{d\eta}{((1 + 2\eta\xi)^2 - \epsilon^2\xi^2)^2} + \int\limits_{1/2(\epsilon - 1/\xi) + \gamma_2/\Lambda}^\infty \frac{d\eta}{((1 + 2\eta\xi)^2 - \epsilon^2\xi^2)^2} = \frac{\epsilon\Lambda}{2\gamma_2}, \tag{6.85}$$

до на коначни допринос.

Када регуларизујемо све интеграле, добијамо корекцију пропагатора у водећем реду ефективног дејства (на нивоу једне петље) облика,

$$-4\pi^3 \mu^4 \left(\frac{1 - 3a}{\epsilon^2} \beta + \frac{a}{\beta_2} - \frac{a}{\gamma} + \frac{1 + a}{4\gamma_2} \right) \log \Lambda \int \phi\, \Box^{-2} \phi \tag{6.86}$$

и

$$-\frac{\epsilon^2\pi^3\mu^2}{2\gamma_2}\Lambda\log^2\Lambda\int\ \phi\,\Box^{-1}\phi. \tag{6.87}$$

Додатни дивергентни члан облика $\Box^{-1}$ потиче из вертекса са чисто градијентним пољима у којима не фигурише Мелеров кернел, наиме

$$\frac{16\mu^2}{(r^2)^2}\delta(r+s)\int\frac{(p^2)^2}{(p-\frac{r}{2})^2(p+\frac{r}{2})^2}\sin^2\frac{p\wedge r}{2}. \tag{6.88}$$

Ова дивергенција је квадратна по Λ и њена вредност је

$$\frac{\epsilon^2\pi^3\mu^2}{\beta_2^2}\Lambda^2\int\phi\,\Box^{-1}\phi. \tag{6.89}$$

Наши резултати садрже још недефинисане параметре β, β_2, γ, γ_2. Ови параметри су уведени како би се испитала могућност да се дивергенције пониште погодним избором регулатора. Ова врста метода је, наравно, нека врста руком уведеног подешавања јер не желимо да уведемо велики број различитих регулатора. Упркос постојању неколико различитих параметара, налазимо да није могуће да се уклони дивергенција облика $\Box^{-1}$. Како је $\beta_2 \neq \infty$, дивергенција у (6.89) увек остаје. С друге стране, дивергентни члан облика $\Box^{-2}$ у (6.86) може да се уклони за извесне вредности a погодним избором β, β_2, γ, γ_2. У непропагирајућем случају $a = 0$, овај члан остаје.

Ако изаберемо најједноставније вредности ових параметара

$$\beta = \beta_2 = \gamma = \gamma_2 = 1,$$

водеће дивергенције $\phi\phi$-пропагатора на нивоу једне петље постају

$$\left(\frac{8}{\epsilon^2} - 14 + \epsilon^2\right)\pi^3\mu^4g^2\log\Lambda\int\phi\,\Box^{-2}\phi,$$

и

$$\epsilon^2\pi^3\mu^2g^2\Lambda^2\int\phi\,\Box^{-1}\phi.$$

6.6 Анализа и екстензије модела

У [51], израчунали смо корекције пропагатора на нивоу једне петље за димензионо редуковану Јанг-Милсову градијентну теорију дефинисану на модификованом Хајзенберговом простору. Класично дејство је дато једначинама (6.17-6.18), а теорија је пертурбативно квантизована у околини вакуумског решења $\phi = 0$, $A_\mu = 0$. У чланку који претходи [50], нађене су две врсте дивергенција на нивоу једне петље у првом реду. Једна врста потиче од тедпол дијаграма

$$\int \phi, \qquad \int \epsilon^{\mu\nu} x_\mu A_\nu, \tag{6.90}$$

а друга од четворовертексних пропагатора и она даје корекцију масе, облика

$$\int \phi\phi, \qquad \int A_\mu A^\mu, \qquad \int \epsilon^{\mu\nu} x_\mu A_\nu \phi. \tag{6.91}$$

У корекцијама другог реда за $\phi\phi$ и AA пропагаторе и пронашли смо нелокалне корекције следећег облика :

$$\int \phi \Box^{-2} \phi, \qquad \int \phi \Box^{-1} \phi, \qquad \int A_\mu \Box^{-1} A^\mu. \tag{6.92}$$

Корекције на нивоу једне петље у ϕA-сектору нисмо рачунали, али се из симетрије очекују нелокалне корекције и у овом сектору.

Почетна претпоставка је била да ће због геометријске конструкције теорије и укључивања одговарајућих геометријских величина у дејство, резултат бити одсуство поменутих нелокалних корекција. У претходним радовима, геометријском конструкцијом су добијени модели за скаларно и спинорско поље, који су ренормализабилни, па је било природно очекивати да ренормализабилност може да се доведе у везу са позадинском геометријом као у [48]. Са друге стране, познато је да у случају комутативног закривљеног простора, да су скаларне и спинорске теорије ренормализабилне само ако је материја неминимално везана са позадинском кривином и торзијом [89]. Ова шема је егзактно примењена у случају Гросе-Вулкенхаровог и Вињ-Турнеровог модела. Слично понашање смо очекивали и за $U(1)$-градијентни модел. Насупрот томе, резултат нашег рачуна је показао супротно.

Градијентне теорије на некомутативним просторима имају додатну слободу која има везе са постојањем коваријантних координата. То значи да градијентни потенцијали могу да се укључе директно у дејство преко коваријантних координата X и на тај начин конструише класична теорија. На пример, $(\mathsf{X}_\mu \mathsf{X}^\mu)^n$ или $\exp(\alpha_\mu \mathsf{X}^\mu)$. Чак, ако се избор теорија сузи само на оне које су геометријски записане, односно на оне теорије код којих су чланови пропорционални елементу запремине, јављају се нове градијентно инваријантне величине. У тродимензионом случају, ове могућности су:

$$\mathrm{tr}\mathsf{X}({}^*\mathsf{X}), \quad \mathrm{tr}\mathsf{X}^3, \quad \mathrm{tr}\mathsf{X}F, \quad \mathrm{tr}\mathsf{X}^2({}^*F). \tag{6.93}$$

Међутим, нису сви ови изрази независни. Релција (6.5) за модификовани Хајзенбергов простор је

$$\mathsf{X}^2 = \mathsf{F} + \mu({}^*\mathsf{X}) - \frac{i\mu^2}{4\epsilon}\,[\theta^1, \theta^2]. \tag{6.94}$$

Рачунањем прва два члана (6.93) добијамо

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathsf{X}({}^*\mathsf{X}) &= \mathrm{tr}\Big(\mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2 + (1-\epsilon^2)\mathsf{X}_3^2\Big) \qquad (6.95)\\ &= \mathrm{tr}\left(\frac{(1-\epsilon^2)\mu g}{\epsilon}\,\phi + \frac{2\mu^2 g}{\epsilon}\,\epsilon^{\mu\nu}x_\mu A_\nu - (1-\epsilon^2)g^2\phi^2 - g^2 A_\mu A^\mu\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathsf{X}^3 &= \mathrm{tr}\Big((3-\epsilon^2)[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2]\mathsf{X}_3 + 2i\epsilon\mathsf{X}_3(\mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2)\Big) \qquad (6.96)\\ &= \mathrm{tr}\Bigg(\frac{(3-\epsilon^2)\mu^2 g}{\epsilon}\,\phi + \frac{2\mu^4 g}{\epsilon}\,x_\mu x^\mu\phi + \frac{2\mu^3 g}{\epsilon}\,\epsilon^{\mu\nu}x_\mu A_\nu\\ &\quad - (3-\epsilon^2)g\phi F_{12} - 2\mu^2 g^2\epsilon^{\mu\nu}(x_\mu A_\nu + A_\nu x_\mu)\phi - \mu g^2 A_\mu A^\mu\\ &\quad + 2\epsilon g^3 A_\mu A^\mu\phi\Bigg), \end{aligned}$$

до на границу и космолошки члан. Друга два члана су:

$$\mathrm{tr}\mathsf{X}\mathsf{F} = \mathrm{tr}\mathsf{X}^3 - \mu\,\mathrm{tr}\mathsf{X}(*\mathsf{X}) - \mathrm{tr}\frac{(1-\epsilon^2)\mu^2 g}{2\epsilon}\,\phi, \tag{6.97}$$

$$\mathrm{tr}\mathsf{X}^2(*\mathsf{F}) = \mathrm{tr}\mathsf{F}(*\mathsf{F}) + \mu\,\mathrm{tr}\mathsf{X}\mathsf{F} - \mathrm{tr}\frac{(1-\epsilon^2)\mu^3 g}{2\epsilon}\,\phi. \tag{6.98}$$

Видимо да би теорија била ренормализабилна да су присутне само дивергенције (6.90-6.91), јер бисмо могли да проширимо теорију тако што бисмо додавали само чисто геометријске чланове. Запажамо такође, да би додавање нових чланова произвољно транслирало класични вакуум $\phi = 0$, $A_\mu = 0$, што је ситуација коју би додатно требало схватити.

Додатно, видели смо да је немогуће поништити нелокалне дивергенције (6.92) на овај начин додавањем само полиномијалних израза који садрже коваријантне координате. Такође и у овом моделу наилазимо на појави УВ/ИЦ-мешања, па закључујемо да чак ни ова геометријска конструкција не резултира ренормализабилном градијентном теоријом.

Могући путеви за проналажење ренормализабилне градијентне теорије би могли да буду разматрање неполиномијалних интеракција или додавање нелокалних чланова који би реализовали неку верзију ЛС-дуалности, односно симетрију на замену $\Box \leftrightarrow \Box^{-1}$. Ово последње је примењено у случају скаларне теорије поља [26]. Неколико уопштења за градијентна поља је разматрано у [66, 67] и [97, 98]. Међутим, комплексност дејстава донекле представља препреку за подробнију анализу ових теорија. Тако још увек није јасно каква форма нелокалних оператора би укључењем у дејство резултирала ренормализабилном градијентном теоријом. Наш последњи резултат показује да се чланови облика $\Box^{-1}$ појављују при квантизацији чак и у локалној верзији градијентне теорије. Други правац истраживања би било испитивање матричне верзије нашег градијентног модела или испитивање непертурбативних својстава, као што је постојање Грибовљевих копија и њихових импликација [46].

Коначно, могуће објашњење за нееренормализабилност градијентних теорија на некомутативним просторима лежи у чињеници да су у овом контексту оне у блиској вези са гравитацијом. То се не види само у чињеници да у том случају импулси $p_\alpha \in \mathcal{A}$ могу да се комбинују заједно са градијентним потенцијалима у јединствен коваријантни објекат. Градијентне и координатне трансформације у некомутативном случају не могу јасно да се раздвоје [99]. Заправо, инфинитезималне локалне трансформације

$$\delta\phi = a^{\alpha}[p_{\alpha}, \phi] \tag{6.99}$$

имају исти облик као и инфинитезималне $U(1)$ трансформације

$$\delta\phi = \epsilon^{\alpha}[A_{\alpha}, \phi], \tag{6.100}$$

односно, (6.99) је специјални случај (6.100). Ако су градијентне теорије део гравитације и обрнуто, тада је исправан начин да се разуме ренормализабилност градијентних теорија, у првом реду покушај разумевања некомутативне гравитације.

7 Закључак

Као што је до сада више пута речено, једна од основних мотивација за увођење некомутативности је побољшање ренормализационих својстава теорије поља. Предност увођења некомутативности у односу на дискретизацију простор-времена на Планковој скали у облику круте решетке, јесте могућност постојања целуларне структуре која не нарушава симетрије [4, 91]. Са друге стране, формулација теорије поља на некомутативном простору је један од начина да се виде могући ефекти квантне гравитације која модификује класично простор-време [5]. Постојање бесконачности у виду сингуларних решења у класичној теорији гравитације и дивергенција у квантној теорији поља је индикација да на малим скалама простор-времена не можемо да имамо појам непрекидности у стандардном смислу. Алгебарске модификације простор-времена у виду некомутативности су додатно мотивисане резултатима из теорије струна, где се у одређеном лимесу ефективне теорије поља редукују на теорије поља на Мојаловом простору [11].

Други аспект могућих модификација простор-времена на малим скалама дужине је нелокалност. Како су и саме фундаменталне струне нелокални (распрострти) објекти, ова нелокалност уводи у теорију струна топологију и омогућава постојање других распростртих објеката као што су бране. Исто тако, у некомутативној геометрији, као резултат релација неодређености између координата, појам тачке губи смисао, а самим тим и појам локалности у класичном операционалном смислу. На пример, нелокалност алгебарски уведена кроз θ-деформисани производ на Мојаловом простору се манифестује постојањем тополошки нееквивалентних дијаграма, односно УВ/ИЦ-мешањем у непланарном сектору [18]. Нелокалност обезбеђује избегавање сингуларитета повезаног са интеракцијом у тачки, али као што смо на више примера видели, квантизацију теорија поља због УВ/ИЦ-мешања чини веома нетривијалним задатком. Додатно, нелокалност је концептуално веома проблематична и контраинтуитивна јер наизглед није у складу са уобичајеним појмом каузалности. Чак и када је сама ренормализабилност теорија поља у питању, постоји принципијелна немогућност доследне примене ренормализационих шема, јер су оне такође засноване на појму локалности [56]. Ипак, остаје нада да ће се инхерентна нелокалност испољити у резултујућим теројама у контролисаном обиму, не одступајући од феноменолошке релевантности.

На основу изнетих примера теорија поља формулисаних на Мојаловом простору и увида у особине постојећих ренормализабилних модела, можемо да закључимо да за сада постоји само неколико прескрипција које резултују формулацијом теорија које имају добре особине при квантизацији и то у случају скаларног и спинорског поља. Једна значајна особина је Лангман-Сабо дуалност. У теоријама које су ЛС-дуалне симетрија између УВ и ИЦ-сектора, због модификације пропагатора у Мелеров кернел, за последицу има регуларизацију ИЦ-дивергенција и уклањање УВ/ИЦ-мешања. Али на примеру оријентабилног ВТ-модела, видели смо да постоје и друге карактеристике које би могле да утичу на ренормализабилност као што су, на пример, тополошке особине графова [29].

На основу досадашњег искуства међутим, може само да се претпостави које од карактеристика до сада испитиваних модела би биле кључне за решење проблема у градијентном сектору. Предуслов за пертурбативну квантизацију градијентних теорија је постојање тривијалног вакуума који би имао извесну стабилност при квантизацији и БРСТ-инваријантност. Сама реализација градијентне инваријантности је различита у односу на комутативне теорије и може се постићи записом дејства као функције коваријантних координата, што након квантизације на неки начин доводи у везу квантне флуктуације градијентног поља са квантним флуктуацијама самог позадинског некомутативног простора. Због тога проблем некомутативних градијентних теорија није у потпуности могуће одвојити од некомутативне гравитације [99].

Сврха нашег и разматрања на која смо се надовезали је била потреба да се испитају могућности примене тетрадног формализма за опис гравитације у некомутативној геометрији, са крајњим циљем да се размотре физичке импликације теорија поља дефинисаних на закривљеном простору. У остварењу овог задатка као позадинску некомутативну геометрију размотрили смо модификовни Хајзенбергов простор. Начињени избор је омогућио да се испита веза између ренормализабилних некомутативних модела и некомутативне гравитације. Ово је успешно урађено на примеру Гросе-Вулкенхаровог [47] и Вињ-Турнеровог [48] модела, где се поменуте теорије могу видети као теорије поља у гравитационом потенцијалу, а интеракција са гравитационим пољем реализована кроз неминималну интеракцију са кривином и торзијом закривљеног некомутативног простора. Ренормализабилност оба модела је у сагласности са ренормализационим својствима поља које пропагира на четвородимензионалном закривљеном позадинском простору [88]. Додатно, то би могло да представља једну форму тврђења да ако доња граница мерења дужине има везе са гравитацијом, онда се очекује да гравитација регуларизује квантне теорије поља [92]. Ова веза у случјевима које смо разматрали може да се конкретизује и демонстрира на примеру матричне геометрије. Наиме, квантизација теорије која је репрезентована коначним матрицама је добро дефинисана и коначна, али се поставља питање смисла континуалног лимеса. Први доказ ренормализабилности ГВ-модела је урађен у матричној бази, а континуални лимес се налази у доказу ренормализабилности [20]. Модификована Хајзенбергова алгебра има коначнодимензионе матричне репрезентације, а континуални лимес је дат Инону-Вигнеровом контракцијом, што може да се интерпретира димензионом редукцијом на потпростор $z = 0$.Ова хиперповрш је закривљена, али је и даље у алгебарском смислу Мојалов простор [47]. То је представљало мотивацију да се испита овакав лимес за градијентне теорије јер су на основу претходна два примера постојале индиције да ће матрична геометрија бити нека врста ИЦ-регулатора. Кључно и веома нетривијално питање је да ли квантизација и овај континуални лимес комутирају.

У свим примерима који су размотрени примењена је некомутативна верзија тетрдног формализма која омогућава геометријску конструкцију дејства, а прилагођена је матричним геометријама. Јанг-Милсово дејство на модификованом Хајзенберговом простору, геометријски формулисано језиком некомутативних форми у тетрадном формализму [49], димензионом редукцијом на закривљени потпростор дало је Јанг-Милсову теорију на Мојаловом простору која додатно интерагује са скаларним пољем. Скаларно поље се јавља као последица КК-редукције јер се почетни степени слободе градијентног потенцијала у три димензије манифестују као мултиплет скаларног и градијентног поља у две димензије. Дејство садржи и друге геометријске чланове који су генерисани димензионом редукцијом, а додатно је и БРСТ-инваријантно. Интеракција поља са позадинском гравитацијом је остварена тако што се експлицитна координатна зависност појављује у коваријантним изводима где се градијентни потенцијали множе координатно зависним компонентама конексије. Иако је облик дејства после димензионе редукције прилично сложен, ово дејство има тривијалан класични вакуум који омогућава пертурбативну квантизацију. Додатно, као и у слуцхају скаларног и спинорског поља, ова експлицитна координатна зависност модификује облик кинетичког члана што за последицу има присуство Мелеровог кернела у пропагаторима. Претпоставка је била да ће овакав облик пропагатора у довољној мери да умањи или елиминише УВ/ИЦ-мешање.

Показало се да после квантизације постоје ИЦ-дивергенције [50], као и да постоје ИЦ-дивергентни тедпол дијаграми, што значи да почетни вакуум показује неку врсту нестабилности при квантним флуктуацијама. Упркос томе, очекивало се да ће у наставку рачуна доћи до поништавања ових дивергенција, као што се то десило са нелокалним $\Box^{-1}$ члановима у [50], услед мешања градијентног и скаларног сектора. То је била мотивација да се започети рачун на нивоу једне петље доведе до краја [51]. Анализирана теорија је са техничког аспекта веома комплексна. Модел садржи десет вертекса и рачунање поправки пропагатора је подразумевало сложен процес систематизације доприноса и класификације дивергенција. Ово је представљало велики изазов, посебно ако се има у виду да су крајњи резултати изражени у облику вишепараметарских интеграла, који су сви дивергентни и за које се испоставило да мешају дивергенције, јер су се у лимесима које смо посматрали дивергенције по краткој варијабли манифестовале као дивергенције по параметрима. Резултат спроведеног рачуна је постојање нелокалних $\Box^{-1}$ и $\Box^{-2}$ ИЦ-дивергенција у скаларном и $\Box^{-1}$ ИЦ-дивергенција у градијентном сектору. Овакав исход значи да теорија не може да се ренормализује додавањем нових градијентно инваријантних чланова који би били генерисани коваријантним координатама. Наш крајњи закључак је да чисто геометријска формулација није довољна како би анализирана градијентна теорија била ренормализабилна.

Модел који смо анализирали је ЛС-дуалан у скаларном, али не и у градијентном сектору. Извесна побољшања теорије би могла да се постигну на још неколико начина. Један је уношење руком нелокалних чланова у градијентном сектору како би се постигла ЛС-дуалност $\Box \leftrightarrow \Box^{-1}$, као у транслационо инваријантним моделима. Друга могућност коју смо раније навели је додавање неполиномијалних функција коваријантних координата. Чињеница да у некомутативним $U(1)$ моделима на Мојаловом простору постоје Грибовљеве копије [46], наводе на још једну могућност која се своди на примену Грибов-Званзингеровог приступка локализације увођењем додатних поља. Тренутно међутим, још није јасно да ли овај приступ омогућава исторвремено решење проблема УВ/ИЦ-мешања и Грибовљевог проблема. Како је у питању проблем локализације, могуће је да би гравитационо конфинирање поља у координатно зависном потенцијалу могло да одигра значајну улогу у решењу оба проблема.

На крају бисмо могли да поновимо претпоставку из [51], да ако градијентне теорије у некомутативној геометрији не могу да се одвоје од гравитације, могуће решење проблема ренормализације градијентних теорија мора да сачека дубље разумевање некомутативне гравитације.

Додатак

I $\phi\phi$-чланови

$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi,12} =& -\frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^8}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\sin\frac{p\wedge q}{2}\,\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\,K_4(r,s|p,q,k,p',q',k') \\
&+ \frac{8\mu^2 g^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\sin\frac{p\wedge q}{2}\,\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q')
\end{aligned} \tag{I.1}$$

$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi,13} =& \frac{8\epsilon^2\mu^4 g^2}{(2\pi)^8}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\,\cos\frac{p'\ \wedge q'}{2}\frac{(p+q)^\mu}{(p+q)^2}\,\frac{\partial}{\partial p^\mu}K_4(r,s|p,q,k,p',q',k') \\
&- \frac{8\epsilon^2\mu^2 g^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q')\cos\frac{p\wedge q}{2} \\
&\times \cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p+q)^\mu}{(p+q)^2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}K_3(r,s;p,q,p',q')
\end{aligned} \tag{I.2}$$

$$\begin{aligned}
P'_{\phi\phi,15} =& \frac{4\mu^4 g^2}{(2\pi)^6}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\sin\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p^2 q^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q'),
\end{aligned} \tag{I.3}$$

$$\begin{aligned}
P_{\phi\phi,22} =& -\frac{16\mu^6 g^2}{(2\pi)^8\epsilon^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p\wedge q)\,(p'\wedge q')}{4(p+q)^2(p'+q')^2}\,K_4(r,s|p,q,k,p',q',k')
\end{aligned} \tag{I.4}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4g^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{p\cdot p'}{(p+q)^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\phi\phi,23}=&\frac{16\mu^6 g^2}{(2\pi)^8}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p'\wedge q')\,(p+q)^\mu}{2(p+q)^2(p'+q')^2}\,\frac{\partial}{\partial p^\mu}K_4(r,s|p,q,k,p',q',k') \\
&-\frac{8\epsilon\mu^2 g^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{\tilde{p}'^\mu}{(p+q)^2}\,\frac{\partial}{\partial p^\mu}K_3(r,s|p,q,p',q'),
\end{aligned}
\tag{I.5}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_{\phi\phi,25}=&\frac{8\mu^6 g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p\wedge q)\,(p'\wedge q')}{4(p+q)^2p'^2q'^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q'),
\end{aligned}
\tag{I.6}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\phi\phi,33}=&-\frac{16\epsilon^2\mu^6 g^2}{(2\pi)^8}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'dk'\delta(p+q+k)\delta(p'+q'+k') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p+q)_\mu(p'+q')_\nu}{(p+q)^2(p'+q')^2}\,\frac{\partial^2}{\partial p_\mu\partial p'_\nu}K_4(r,s|p,q,k,p',q',k') \\
&-\frac{16\epsilon^2\mu^4 g^2}{(2\pi)^6 a}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial p^\mu\partial p'_\mu}K_3(r,s|p,q,p',q'),
\end{aligned}
\tag{I.7}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_{\phi\phi,35}=&\frac{8\mu^6 g^2}{(2\pi)^6}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\sin\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{(p\wedge q)\,(p+q)_\mu}{2p^2q^2(p+q)^2}\,\frac{\partial}{\partial p'_\mu}K_3(r,s|p,q,p',q')
\end{aligned}
\tag{I.8}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_{\phi\phi,45}=&-\frac{8a\mu^8 g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p\wedge q)\,(p'\wedge q')}{4p^2q^2p'^2(p'+q')^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q') \\
&+\frac{2\mu^2 g^2}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,\sin^2\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2q^2}\,K_2(r,s|p+q,-p-q)
\end{aligned}
\tag{I.9}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_{\phi\phi,55} =& \frac{8a\mu^8 g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q')\sin\frac{p\wedge q}{2} \\
&\times \sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p\wedge q)\,(p'\wedge q')}{4p^2q^2p'^2(p'+q')^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q') \\
&+ \frac{4a\mu^8 g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+p'+q') \\
&\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{(p\wedge q)\,(p'\wedge q')}{4p^2q^2p'^2q'^2}\,K_3(r,s|p,q,p',q') \\
&+ \frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,\sin^2\frac{p\wedge q}{2} \\
&\times\left(-\frac{1}{p^2q^2}+\frac{p\cdot q}{p^2q^2(p+q)^2}-\frac{1}{(p+q)^4}+\frac{(p\cdot q)^2}{p^2q^2(p+q)^4}\right)K_2(r,s|p+q,-p-q)
\end{aligned}
\tag{I.10}
$$

$$
P_{\phi\phi,66} = -\frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,\sin^2\frac{p\wedge q}{2}\left(\frac{1}{(p+q)^4}-\frac{(p\cdot q)^2}{p^2q^2(p+q)^4}\right)K_2(r,s|p+q,-p-q).
\tag{I.11}
$$

II ϕA-чланови

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,11} =& -\frac{8i\epsilon^2\mu g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,K_3(r,p,q,k,p',q'),
\end{aligned} \tag{II.1}$$

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,12} =& -\frac{8i\mu^3 g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q') \\
&-\frac{4i\epsilon\mu g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}p'^\mu\,K_3(r,p,q,k,p',q'),
\end{aligned} \tag{II.2}$$

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,13} =& \frac{8i\epsilon^2\mu^3 g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{(p+q)^\rho}{(p+q)^2}\,\frac{\partial}{\partial p^\rho}K_3(r,p,q,k,p',q') \\
&+\frac{8i\epsilon^2\mu^3 g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{\partial}{\partial\tilde{p}'^\mu}K_3(r,p,q,k,p',q'),
\end{aligned} \tag{II.3}$$

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,15} =& -\frac{4i\mu^5 g^2}{(2\pi)^6}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times\frac{p'\wedge q'}{2}\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p'^2q'^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q') \\
&+\frac{8i\mu^3 g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k)\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2} \\
&\times\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{1}{(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&-\frac{4i\epsilon\mu g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{k^\mu}{k^2}\,K_2(r,p,q,k),
\end{aligned} \tag{II.4}$$

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_{\phi A,22} =& -\frac{16i\mu^3 g^2}{(2\pi)^6\epsilon a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{p'^{\mu}}{(p+q)^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q'), \end{aligned} \tag{II.5}$$

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_{\phi A,23} =& \frac{16i\mu^5 g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}'_{\mu}}K_3(r,p,q,k,p',q') \\ &+\frac{8i\epsilon\mu^3 g^2}{(2\pi)^6 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\ &\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{(p+q)^{\rho}p'^{\mu}}{(p+q)^2}\frac{\partial}{\partial p^{\rho}}K_3(r,p,q,k,p',q'), \end{aligned} \tag{II.6}$$

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_{\phi A,25} =& -\frac{8i\mu^7 g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\frac{\tilde{s}^{\mu}}{s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\ &\times\frac{p\wedge q}{2}\frac{p'\wedge q'}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{(p+q)^2p'^2q'^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q') \\ &-\frac{8i\mu^3 g^2}{(2\pi)^4\epsilon a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\ &\times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{k^{\mu}}{(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k) \\ &-\frac{4i\mu g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{\tilde{s}^{\mu}}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\ &\times\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{p\cdot k}{(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k), \end{aligned} \tag{II.7}$$

$$\begin{aligned} P'^{\mu}_{\phi A,35} =& \frac{8i\mu^7 g^2}{(2\pi)^6}\frac{\tilde{s}^{\mu}}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\ &\times\frac{p'\wedge q'}{2}\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{(p+q)^{\rho}}{(p+q)^2p'^2q'^2}\frac{\partial}{\partial p^{\rho}}K_3(r,p,q,k,p',q') \\ &-\frac{8i\epsilon\mu^3 g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{\tilde{s}^{\mu}}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\ &\times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{\tilde{k}^{\rho}}{(p+q)^2k^2}\frac{\partial}{\partial p^{\rho}}K_2(r,p,q,k) \\ &+\frac{8i\epsilon\mu^3 g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \end{aligned} \tag{II.8}$$

$$\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{(p+q)^\rho k^\mu}{(p+q)^2k^2}\,\frac{\partial}{\partial p^\rho}K_2(r,p,q,k),$$

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,45} =&\frac{4ia\mu^9g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\frac{p'\wedge q'}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p^2q^2p'^2q'^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q') \\
&-\frac{4i\mu^5g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{(p+q)^\mu}{p^2q^2(p+q)^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&-\frac{8i\mu^5g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{k^\mu}{p^2(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&+\frac{4i\mu^3g^2}{(2\pi)^4}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{p\cdot k}{p^2k^2(p+q)^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&+\frac{6i\mu g^2}{(2\pi)^2a}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}K(r,s)\int dp\,\frac{\sin^2\frac{p\wedge s}{2}}{(p-\frac{s}{2})^2(p+\frac{s}{2})^2},
\end{aligned} \tag{II.9}$$

$$\begin{aligned}
P'^{\mu}_{\phi A,55} =&-\frac{4ia\mu^9g^2}{(2\pi)^6\epsilon^2}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,dp'dq'\delta(p+q+k)\delta(-s+p'+q') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\frac{p'\wedge q'}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p^2q^2p'^2q'^2}\,K_3(r,p,q,k,p',q') \\
&+\frac{16i\mu^7g^2}{(2\pi)^4\epsilon^2}\frac{\tilde{s}^\mu}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\,\frac{(p+q)\wedge k}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{1}{p^2q^2(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&-\frac{8i\mu^5g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{(p+q)\wedge k}{2}\frac{k^\mu}{p^2(p+q)^2k^2}\,K_2(r,p,q,k) \\
&-\frac{8i\mu^5g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{1}{s^2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(-s+p+q+k)
\end{aligned} \tag{II.10}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{(p+q)\wedge k}{2} \frac{k^\mu}{p^2 q^2 k^2}\, K_2(r,p,q,k) \\
&+ \frac{4i\mu^5 g^2}{(2\pi)^4\epsilon} \frac{1}{s^2} \int dp\, dq\, dk\, \delta(-s+p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{(p+q)\wedge k}{2} \frac{(p+q)^\mu}{p^2 q^2 (p+q)^2}\, K_2(r,p,q,k) \\
&- \frac{4i\mu^3 g^2}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}^\mu}{s^2} \int dp\, dq\, dk\, \delta(-s+p+q+k) \\
&\times \sin\frac{p\wedge q}{2} \sin\frac{(p+q)\wedge k}{2} \frac{p\cdot k}{p^2 (p+q)^2 k^2}\, K_2(r,p,q,k) \\
&- \frac{8i\mu^3 g^2}{(2\pi)^2 \epsilon a} \frac{1}{s^4} K(r,s) \int dp\, \frac{\sin^2 \frac{p\wedge s}{2}}{(p-\frac{s}{2})^2 (p+\frac{s}{2})^2}\, (p\wedge s) p^\mu \\
&- \frac{10 i\mu g^2}{(2\pi)^2 a} \frac{\tilde{s}^\mu}{s^2} K(r,s) \int dp\, \frac{\sin^2 \frac{p\wedge s}{2}}{(p-\frac{s}{2})^2 (p+\frac{s}{2})^2} \\
&- \frac{8i\mu g^2}{(2\pi)^2 a} \frac{\tilde{s}^\mu}{s^2} K(r,s) \int dp\, \frac{\sin^2 \frac{p\wedge s}{2}}{p^2 r^2},
\end{aligned}
$$

$$
P'^{\mu}_{\phi A,66} = - \frac{8i\mu^3 g^2}{(2\pi)^2 \epsilon a} \frac{1}{s^4} K(r,s) \int dp\, \frac{\sin^2 \frac{p\wedge s}{2}}{(p-\frac{s}{2})^2 (p+\frac{s}{2})^2} (p\wedge s) p^\mu. \tag{II.11}
$$

III AA-чланови

$$\begin{aligned}P'^{\mu\nu}_{AA,11} =&\frac{8\epsilon^2 g^2}{(2\pi)^4 a^2}\frac{\tilde{r}^\mu \tilde{s}^\nu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\, K_2(p,q,p',q'),\end{aligned} \tag{III.1}$$

$$\begin{aligned}P'^{\mu\nu}_{AA,12} =&\bigg(\frac{4\epsilon g^2}{(2\pi)^4 a^2}\frac{\tilde{s}^\nu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2} p^\mu\, K_2(p,q,p',q')\bigg) + \big((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\big),\end{aligned} \tag{III.2}$$

$$\begin{aligned}P'^{\mu\nu}_{AA,13} =&\bigg(-\frac{8\epsilon^2 \mu^2 g^2}{(2\pi)^4 a^2}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{\partial}{\partial\tilde{p}'_\nu} K_2(p,q,p',q')\bigg) + \big((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\big),\end{aligned} \tag{III.3}$$

$$\begin{aligned}P'^{\mu\nu}_{AA,15} =&\bigg(\frac{4\mu^4 g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{\tilde{r}^\mu \tilde{s}^\nu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \frac{p'\wedge q'}{2}\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p'^2 q'^2}\, K_2(p,q,p',q')\bigg) + \big((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\big) \\ &- \frac{4\epsilon\mu^2 g^2}{(2\pi)^4 a}\frac{(r+s)^\mu \tilde{s}^\nu - (r+s)^\nu \tilde{r}^\mu}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\, dq\, dk\, \delta(p+q+k) \\ &\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\, K_2(p,q,k,r+s) \\ &+ \frac{4\epsilon g^2}{(2\pi)^2 a^2}\frac{(r+s)^\mu \tilde{s}^\nu - (r+s)^\nu \tilde{r}^\mu - (r+s)^2 \epsilon^{\mu\nu}}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2} \\ &\times \int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q)\cos\frac{p\wedge q}{2}\, K(p,q),\end{aligned} \tag{III.4}$$

$$\begin{aligned}P'^{\mu\nu}_{AA,22} =&\frac{8 g^2}{(2\pi)^4 a^2}\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\ &\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2} p^\mu p'^\nu\, K_2(p,q,p',q'),\end{aligned} \tag{III.5}$$

$$P'^{\mu\nu}_{AA,23} =\bigg(-\frac{8\epsilon\mu^2 g^2}{(2\pi)^4 a^2}\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \tag{III.6}$$

$$
\times \cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}p'^{\nu}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_{\mu}}\,K_2(p,q,p',q')\biggr)+\bigl((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\bigr),
$$

$$
\begin{aligned}
P'^{\mu\nu}_{AA,25} = & \biggl(\frac{4\mu^4g^2}{(2\pi)^4\epsilon a}\frac{\tilde{r}^{\mu}}{r^2s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\
& \times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{p'^{\nu}}{p^2q^2}\,K_2(p,q,p',q') \\
& +\frac{4g^2}{(2\pi)^2a^2}\frac{\tilde{r}^{\mu}}{r^2s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\
& \times\sin\frac{p\wedge q}{2}\tilde{p}^{\nu}\,K(p,q)\biggr)+\bigl((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\bigr) \\
& -\frac{8\mu^4g^2}{(2\pi)^4\epsilon a}\frac{(r+s)^{\mu}\tilde{s}^{\nu}-(r+s)^{\nu}\tilde{r}^{\mu}}{r^2s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k) \\
& \times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{(p+q)^2}\,K_2(p,q,k,r+s) \\
& -\frac{8\mu^2g^2}{(2\pi)^2\epsilon a^2}\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{r^2s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2} \\
& \times\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\,K(p,q),
\end{aligned}
\tag{III.7}
$$

$$
\begin{aligned}
P'^{\mu\nu}_{AA,33} = & \frac{32\epsilon^2\mu^4g^2}{(2\pi)^4a^2}\frac{1}{r^2s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\
& \times\cos\frac{p\wedge q}{2}\cos\frac{p'\wedge q'}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\tilde{p}_{\mu}\partial\tilde{p}'_{\nu}}K_2(p,q,p',q'),
\end{aligned}
\tag{III.8}
$$

$$
\begin{aligned}
P'^{\mu\nu}_{AA,35} = & \biggl(-\frac{8\mu^6g^2}{(2\pi)^4a}\frac{\tilde{s}^{\nu}}{r^2s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\
& \times\cos\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p'^2q'^2}\,\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_{\mu}}K_2(p,q,p',q') \\
& +\frac{8\epsilon\mu^2g^2}{(2\pi)^2a^2}\frac{\tilde{r}^{\mu}}{r^2s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q) \\
& \times\cos\frac{p\wedge q}{2}\,\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}K(p,q)\biggr)+\bigl((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\bigr) \\
& +\frac{8\epsilon\mu^4g^2}{(2\pi)^4a}\frac{(r+s)^{\mu}\tilde{s}^{\nu}-(r+s)^{\nu}\tilde{r}^{\mu}}{r^2s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k) \\
& \times\cos\frac{p\wedge q}{2}\frac{(p+q)^{\rho}}{(p+q)^2}\,\frac{\partial}{\partial p^{\rho}}K_2(p,q,k,r+s)
\end{aligned}
\tag{III.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{8\epsilon\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a^2}\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\\
&\times\cos\frac{p\wedge q}{2}(p+q)^\rho\,\frac{\partial}{\partial p^\rho}K(p,q),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P'^{\mu\nu}_{AA45} =&\Big(-\frac{4\mu^6 g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q')\\
&\times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{p'^\nu}{p^2 q^2 p'^2}\,K_2(p,q,p',q')\\
&+\frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\\
&\times\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{(p-r)^\mu q^\nu}{(p-r)^2 q^2}K(p,q)\\
&-\frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\\
&\times\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{\tilde{p}^\nu}{p^2}\,K(p,q)\\
&-\frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\\
&\times\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{\tilde{p}^\nu}{p^2(p-r)^2}K(p,q)\Big)+\big((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\big)\\
&+\frac{4\mu^6 g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{(r+s)^\mu\tilde{s}^\nu-(r+s)^\nu\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\\
&\times\int dp\,dq\,dk\,\delta(p+q+k)\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2 q^2}\,K_2(p,q,k,r+s)\\
&+\frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^2\epsilon a}\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\\
&\times\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\,\mathrm{sinx}\,\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2}\,K(p,q),
\end{aligned}
\tag{III.10}
$$

$$
\begin{aligned}
P'^{\mu\nu}_{AA,55} =&\Big(\frac{4\mu^6 g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,dp'dq'\delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q')\\
&\times\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{p'^\nu}{p^2 q^2 p'^2}\,K_2(p,q,p',q')\\
&-\frac{16\mu^4 g^2}{(2\pi)^2\epsilon a}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\,dq\,\delta(-r-s+p+q)\\
&\times\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{q^\nu}{p^2 q^2 (p-r)^2}K(p,q)
\end{aligned}
\tag{III.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a} \frac{1}{r^2 s^2} \int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q) \\
&\times \sin\frac{p\wedge r}{2} \sin\frac{q\wedge s}{2} \frac{(p-r)^\mu q^\nu}{(p-r)^2 q^2} K(p,q) \\
&- \frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a} \frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2 (r+s)^2} \sin\frac{r\wedge s}{2}\frac{p\wedge r}{2} \int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q) \\
&\times \sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{\tilde{p}^\nu}{p^2} K(p,q) \\
&+ \frac{4\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q) \\
&\times \sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\frac{\tilde{p}^\nu}{p^2(p-r)^2}K(p,q)\Big) + \big((r,\mu)\longleftrightarrow(s,\nu)\big) \\
&+ \frac{8\mu^8 g^2}{(2\pi)^4\epsilon^2}\frac{\tilde{r}^\mu \tilde{s}^\nu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, dp' dq' \delta(-r+p+q)\delta(-s+p'+q') \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\frac{p'\wedge q'}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p'\wedge q'}{2}\frac{1}{p^2 q^2 p'^2 q'^2}K_2(p,q,p',q') \\
&- \frac{4\mu^6 g^2}{(2\pi)^4\epsilon}\frac{(r+s)^\mu\tilde{s}^\nu-(r+s)^\nu\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\, dq\, dk\, \delta(p+q+k) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2 q^2}K_2(p,q,k,r+s) \\
&- \frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^2\epsilon a}\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{r^2 s^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2 q^2}K(p,q) \\
&- \frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^2\epsilon a}\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{r^2 s^2 (r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2}\int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q) \\
&\times \frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2}K(p,q) \\
&+ \frac{8\mu^4 g^2}{(2\pi)^2\epsilon a}\frac{(r+s)^\mu\tilde{s}^\nu-(r+s)^\nu\tilde{r}^\mu}{r^2 s^2(r+s)^2}\sin\frac{r\wedge s}{2} \\
&\times \int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q)\frac{p\wedge q}{2}\sin\frac{p\wedge q}{2}\frac{1}{p^2 q^2}K(p,q) \\
&- \frac{8\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{1}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q)\sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\frac{\tilde{p}^\mu\tilde{q}^\nu}{p^2 q^2}K(p,q) \\
&+ \frac{8\mu^2 g^2}{(2\pi)^2 a}\frac{\tilde{r}^\mu\tilde{s}^\nu}{r^2 s^2}\int dp\, dq\, \delta(-r-s+p+q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sin\frac{p\wedge r}{2}\sin\frac{q\wedge s}{2}\,\frac{p\cdot q}{p^2q^2(p-r)^2}K(p,q)\\
&+\frac{16g^2}{a^2}\frac{\tilde{r}^\mu\tilde{s}^\nu}{r^2s^2}\delta(r+s)\int dp\,\frac{\sin^2\frac{p\wedge r}{2}}{(p-\frac{r}{2})^2(p+\frac{r}{2})^2}\\
&-\frac{2g^2}{a^2}\frac{r^\mu s^\nu}{r^2s^2}\delta(r+s)\int dp\,\frac{\sin^2\frac{p\wedge r}{2}}{(p-\frac{r}{2})^2(p+\frac{r}{2})^2}\\
&-\frac{8g^2}{a^2}\frac{1}{r^2s^2}\delta(r+s)\int dp\,\sin^2\frac{p\wedge r}{2}\frac{p^\mu p^\nu}{(p-\frac{r}{2})^2(p+\frac{r}{2})^2}\\
&-\frac{8g^2}{a^2}\frac{\delta^{\mu\nu}}{r^2s^2}\delta(r+s)\int dp\,\frac{\sin^2\frac{p\wedge r}{2}}{p^2}.
\end{aligned}
$$

IV Чланови са дивергентним доприносима у $\phi\phi$-сектору

Дивергентни доприноси у ефективном дејству који потичу из $\phi\phi$-сектора после развоја око $u = 0$ су:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{\phi\phi} = &-\frac{3\mu^2 a g^2}{\epsilon^2}\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-\frac{\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}} \qquad \text{(IV.1)}\\
&- a g^2\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta\xi}\,e^{-\frac{\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}}\\
&+\frac{a g^2}{2}\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{(1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2}\\
&\qquad\times\left(2-\frac{1+\epsilon^2\xi^2}{1+\eta\xi}-\frac{2\epsilon^2\xi^3}{(1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2}\frac{\epsilon^2\xi+\eta}{1+\eta\xi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}_{\phi\phi} = &\frac{\mu^2 g^2}{\epsilon^2}\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2}\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-\frac{\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}} \qquad \text{(IV.2)}\\
&+\mu^2 g^2\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty d\eta\,\frac{(1+2\eta\xi)^2+\epsilon^2\xi^2}{((1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2)^2}\\
&-2\epsilon^2\mu^2 g^2\int \frac{du}{u^2}\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\xi^3\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{((1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2)^2}\\
&-g^2\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty d\eta\,\frac{(1+2\eta\xi)^2}{(1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2}\\
&+\frac{g^2}{2}\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta\xi}\frac{(1+2\eta\xi)^2+\epsilon^2\xi^2}{(1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2}\\
&+\epsilon^2 g^2\int du\,dv\,\frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2}\int\limits_1^\infty d\xi\,\xi^3\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\,e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}}\int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta\xi}\frac{\epsilon^2\xi+\eta}{((1+2\eta\xi)^2-\epsilon^2\xi^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}_{\phi\phi} &= a\mu^2 g^2 \int du\, dv\, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2} \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\, e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}} \int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^2}\, e^{-\frac{\eta}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}} \qquad \text{(IV.3)} \\
&- a\mu^2 g^2 \int du\, dv\, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{(v^2)^2} \int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi}\,\frac{\xi-1}{\xi+1}\, e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}} \int\limits_0^\infty d\eta\, \frac{\eta^2+\epsilon^2}{(\eta^2-\epsilon^2)^2}\, e^{-\frac{\eta+\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}} \\
&+ a\epsilon^2 g^2 \int du\, dv\, \frac{\phi(-v)\phi(v)}{v^2} \int\limits_1^\infty d\xi\, \frac{\xi-1}{\xi+1}\, e^{-\xi\frac{u^2}{2\mu^2}} \int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{(\eta^2-\epsilon^2)(1+\eta\xi)}\, e^{-\frac{\eta+\xi\epsilon^2}{1+\eta\xi}\frac{v^2}{2\mu^2}}
\end{aligned}$$

V Помоћне формуле

Неки Гаусови интеграли у две димензије:

$$\int dp\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{\pi}{a}\, e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, p_\alpha\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{\pi b_\alpha}{2a^2}\, e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, p_\alpha p_\beta\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{\pi}{2a^2}\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{b_\alpha b_\beta}{2a}\right) e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, p^2\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{\pi}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{4a}\right) e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, (p^2)^2\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{\pi}{a^3}\left(2 + \frac{b^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{16a^2}\right) e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, \frac{p_\alpha}{p^2}\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{2\pi b_\alpha}{b^2}\, e^{b^2/4a}$$

$$\int dp\, \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}\, e^{-ap^2+b\cdot p} = \frac{2\pi}{b^2}\left(\frac{b^2\delta_{\alpha\beta} - 2b_\alpha b_\beta}{b^2} + \frac{b_\alpha b_\beta}{2a}\right) e^{b^2/4a}$$

Прелазак са интеграције по u на интеграцију по u^2:

$$\int du\, f(u^2)\, \frac{u_\alpha u_\beta}{u^2} = \frac{\pi}{2}\delta_{\alpha\beta} \int d(u^2)\, f(u^2)$$

$$\int du\, f(u^2)\, \frac{u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta}{(u^2)^2} = \frac{\pi}{8}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int d(u^2)\, f(u^2)$$

Формуле употребљене за рачунање ампутираних пропагатора:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int du\, K_2(p,q,k,u)K^{-1}(-u,r) =$$
$$= \delta(p+r)K(q,k) + \delta(q+r)K(p,q) + \delta(k+r)K(p,q)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int du\, K_3(p,q,k,p',q',u)K^{-1}(-u,r) = \delta(p+r)K_2(q,k,p',q')$$
$$+ \delta(q+r)K_2(q,k,p',q') + \delta(k+r)K_2(p,q,p',q') + \delta(p'+r)K_2(p,q,k,p')$$

$$+\,\delta(q'+r)K_2(p,q,k,p')$$

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\int du\,dv\,K^{-1}(r,-u)K_3(u,v|p,q,p',q')K^{-1}(-u,r)=$$
$$=\delta(p+r)\delta(q+s)K(p',q')+\delta(p+r)\delta(p'+s)K(q,q')+\delta(p+r)\delta(q'+s)K(q,p')$$
$$+\,\delta(q+r)\delta(p+s)K(p',q')+\delta(q+r)\delta(q'+s)K(p,p')+\delta(q+r)\delta(p'+s)K(p,q)$$
$$+\,(r\leftrightarrow s).$$

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\int du\,dv\,K^{-1}(r,-u)K_4(u,v|p,q,k,p',q',k')K^{-1}(-u,r)$$
$$=\big(\delta(p+r)\delta(q+s)K_2(k,p',q',k')+\delta(p+r)\delta(k+s)K_2(q,p',q',k')$$
$$+\,\delta(p+r)\delta(p'+s)K_2(q,k,q',k')+\delta(p+r)\delta(q'+s)K_2(q,k,p',k')$$
$$+\,\delta(p+r)\delta(k'+s)K_2(q,k,p',q')+(p\longleftrightarrow q)+(p\longleftrightarrow k)\big)+\big(r\longleftrightarrow s\big)$$

Литература

[1] M. Grana and F. Orsi, "N=1 vacua in Exceptional Generalized Geometry," JHEP **1108**, 109 (2011) doi:10.1007/JHEP08(2011)109 [arXiv:1105.4855 [hep-th]].

[2] Schrödinger, E., Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen, Naturwiss. **22** (1934), 518-520.

[3] Heisenberg, W. (1938), Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge. Ann. Phys., 424: 20–33.

[4] H. S. Snyder, "Quantized space-time," Phys. Rev. **71**, 38 (1947). PhysRev.71.38

[5] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, "The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields," Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995) doi:10.1007/BF02104515 [hep-th/0303037].

[6] G. Skandalis, "Géométrie non commutative d'après Alain Connes : la notion de triplet spectral," SMF-Gazette - 94, Octobre 2002.

[7] A. Connes, "Noncommutative geometry,"**1994.**

[8] J. Madore, "An introduction to noncommutative geometry," Lect. Notes Phys. **543**, 231 (2000).

[9] J. Madore, "Noncommutative geometry for pedestrians," gr-qc/9906059.

[10] J. Madore and J. Mourad, "Noncommutative Kaluza-Klein theory," hep-th/9601169.

[11] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909**, 032 (1999) [hep-th/9908142].

[12] A. Connes, M. R. Douglas and A. S. Schwarz, "Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori," JHEP **9802**, 003 (1998) doi:10.1088/1126-6708/1998/02/003 [hep-th/9711162].

[13] V. Schomerus, "D-branes and deformation quantization," JHEP **9906**, 030 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/06/030 [hep-th/9903205].

[14] A. Ashtekar, "Gravity, geometry and the quantum," AIP Conf. Proc. **1140**, 32 (2009). doi:10.1063/1.3183525.
A. Ashtekar, "Introduction to loop quantum gravity and cosmology," PoS QGQGS **2011**, 001 (2011) [Lect. Notes Phys. **863**, 31 (2013)] doi:10.1007/978-3-642-33036-02 [arXiv:1201.4598 [gr-qc]].

[15] A. Connes and J. Lott, "Particle Models and Noncommutative Geometry (Expanded Version)," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B**, 29 (1991). doi:10.1016/0920-5632(91)90120-4

[16] M. Dubois-Violette, J. Madore and R. Kerner, "Gauge Bosons in a Noncommutative Geometry," Phys. Lett. B **217**, 485 (1989). doi:10.1016/0370-2693(89)90083-X

[17] A. H. Chamseddine and A. Connes, "The Spectral action principle," Commun. Math. Phys. **186**, 731 (1997) doi:10.1007/s002200050126 [hep-th/9606001].

[18] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," JHEP **0002**, 020 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/02/020 [hep-th/9912072].

[19] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of phi**4 theory on noncommutative R**2 in the matrix base," JHEP **0312**, 019 (2003) [arXiv:hep-th/0307017].

[20] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of phi**4 theory on noncommutative R**4 in the matrix base," Commun. Math. Phys. **256**, 305 (2005) [arXiv:hep-th/0401128],

[21] E. Langmann and R. J. Szabo, "Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces," Phys. Lett. B **533** (2002) 168 [hep-th/0202039].

[22] R. Gurau, J. Magnen, V. Rivasseau and F. Vignes-Tourneret, "Renormalization of non-commutative phi(4)**4 field theory in x space," Commun. Math. Phys. **267** (2006) 515 [hep-th/0512271].

[23] V. Rivasseau, F. Vignes-Tourneret, R. Wulkenhaar "Renormalization of nn-commutative phi**4 theory by multi-scale analysis, Commun. Math. Phys. **262** (2006) 565-594

[24] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "The beta function in duality covariant noncommutative phi**4 theory," Eur. Phys. J. C **35** (2004) 277 [hep-th/0402093].

[25] M. Disertori, R. Gurau, J. Magnen and V. Rivasseau, "Vanishing of Beta Function of Non Commutative Phi**4(4) Theory to all orders," Phys. Lett. B **649** (2007) 95 [hep-th/0612251].

[26] R. Gurau, J. Mangen, V. Rivasseau and A.Tanasa "A translation-invariant non-commutative scalar model" Commun. Math. Phys. **287**, (2009) 275-290, [arXiv:0802.0791].

[27] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "8D-spectral triple on 4D-Moyal space and the vacuum of noncommutative gauge theory," J. Geom. Phys. **62** (2012) 1583 [arXiv:0709.0095 [hep-th]].

[28] D. J. Gross and A. Neveu, "Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories," Phys. Rev. D **10** (1974) 3235.

[29] F. Vignes-Tourneret, "Renormalization of the Orientable Non-commutative Gross-Neveu Model," Annales Henri Poincare **8** (2007) 427 [math-ph/0606069].

[30] A. Lakhoua, F. Vignes-Tourneret and J. C. Wallet, "One-loop Beta Functions for the Orientable Non-commutative Gross-Neveu Model," Eur. Phys. J. C **52** (2007) 735 [hep-th/0701170].

[31] F. Vignes-Tourneret, “Renormalisation des théories de champs non commutatives,” thése de doctorat de l’Université Paris 11, math-ph/0612014.

[32] M. Dubois-Violette, J. Madore and R. Kerner, “Gauge Bosons In A Noncommutative Geometry,” Phys. Lett. B **217** (1989) 485.
M. Dubois-Violette, J. Madore and R. Kerner, “CLASSICAL BOSONS IN A NONCOMMUTATIVE GEOMETRY,” Class. Quant. Grav. **6** (1989) 1709.
M. Dubois-Violette, R. Kerner and J. Madore, “Noncommutative Differential Geometry and New Models of Gauge Theory,” J. Math. Phys. **31** (1990) 323,

[33] J. Madore, “An Introduction To Noncommutative Differential Geometry And Its Physical Applications,” Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **257** (2000) 1.

[34] H. Grosse and M. Wohlgenannt, “Induced Gauge Theory on a Noncommutative Space,” Eur. Phys. J. C **52**, 435 (2007) [arXiv:hep-th/0703169].

[35] A. de Goursac, J. C. Wallet and R. Wulkenhaar, “Noncommutative Induced Gauge Theory,” Eur. Phys. J. C **51** (2007) 977 [hep-th/0703075 [HEP-TH]].

[36] D. N. Blaschke, H. Grosse and M. Schweda, “Non-commutative U(1) gauge theory on R**4(Theta) with oscillator term and BRST symmetry,” Europhys. Lett. **79** (2007) 61002 [arXiv:0705.4205 [hep-th]].

[37] D. N. Blaschke, F. Gieres, E. Kronberger, M. Schweda and M. Wohlgenannt, “Translation-invariant models for non-commutative gauge fields,” J. Phys. A **41**, 252002 (2008) [arXiv:0804.1914 [hep-th]].

[38] D. N. Blaschke, A. Rofner, M. Schweda and R. I. P. Sedmik, “One-Loop Calculations for a Translation Invariant Non-Commutative Gauge Model,” Eur. Phys. J. C **62**, 433 (2009) [arXiv:0901.1681 [hep-th]].

[39] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative field theory,” Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 977 doi:10.1103/RevModPhys.73.977 [hep-th/0106048].

[40] D. N. Blaschke, T. Garschall, F. Gieres, F. Heindl, M. Schweda and M. Wohlgenannt, “On the Renormalization of Non-Commutative Field Theories,” Eur. Phys. J. C **73**, no. 1, 2262 (2013) [arXiv:1207.5494 [hep-th]].

[41] P. Martinetti, P. Vitale and J. C. Wallet, “Noncommutative gauge theories on $\mathbb{R}^2_\theta$ as matrix models,” JHEP **1309** (2013) 051 [arXiv:1303.7185 [hep-th]].

[42] D. N. Blaschke, “Gauge Fields on Non-Commutative Spaces and Renormalization,” Fortsch. Phys. **62**, 820 (2014) [arXiv:1402.5980 [hep-th]].

[43] D. N. Blaschke, F. Gieres, F. Heindl, M. Schweda and M. Wohlgenannt, “BPHZ renormalization and its application to non-commutative field theory,” Eur. Phys. J. C **73**, 2566 (2013) [arXiv:1307.4650 [hep-th]].

[44] L. C. Q. Vilar, O. S. Ventura, D. G. Tedesco and V. E. R. Lemes, “On the Renormalizability of Noncommutative U(1) Gauge Theory - an Algebraic Approach,” J. Phys. A **43**, 135401 (2010) doi:10.1088/1751-8113/43/13/135401 [arXiv:0902.2956 [hep-th]].

[45] L. C. Q. Vilar, V. E. R. Lemes, O. S. Ventura and D. G. Tedesco, “Renormalizable noncommutative U(1) gauge theory without IR/UV mixing,” PoS ISFTG , 071 (2009).

[46] F. Canfora, M. Kurkov, L. Rosa and P. Vitale, “The Gribov problem in Noncommutative QED,” JHEP **1601**, 014 (2016) doi:10.1007/JHEP01(2016)014 [arXiv:1505.06342 [hep-th]].

[47] M. Buric and M. Wohlgenannt, “Geometry of the Grosse-Wulkenhaar Model,” JHEP **1003** (2010) 053 [arXiv:0902.3408 [hep-th]].

[48] M. Buric, J. Madore and L. Nenadovic, “Spinors on a curved noncommutative space: coupling to torsion and the Gross-Neveu model,” arXiv:1502.00761 [hep-th].

[49] M. Buric, H. Grosse and J. Madore, “Gauge fields on noncommutative geometries with curvature,” JHEP **1007** (2010) 010 [arXiv:1003.2284 [hep-th]].

[50] M. Buric, M. Dimitrijevic, V. Radovanovic and M. Wohlgenannt, “Quantization of a gauge theory on a curved noncommutative space,” Phys. Rev. D **86** (2012) 105024 [arXiv:1203.3016 [hep-th]].

[51] M. Burić, L. Nenadović and D. Prekrat, "One-loop structure of the U(1) gauge model on the truncated Heisenberg space," Eur. Phys. J. C **76**, no. 12, 672 (2016) doi:10.1140/epjc/s10052-016-4522-x

[52] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," Phys. Rept. **378**, 207 (2003) doi:10.1016/S0370-1573(03)00059-0 [hep-th/0109162].

[53] A. de Goursac, "On the origin of the harmonic term in noncommutative quantum field theory," SIGMA **6**, 048 (2010) doi:10.3842/SIGMA.2010.048 [arXiv:1003.5788 [math-ph]].

[54] D. N. Blaschke, E. Kronberger, R. I. P. Sedmik and M. Wohlgenannt, "Gauge Theories on Deformed Spaces," SIGMA **6**, 062 (2010) doi:10.3842/SIGMA.2010.062 [arXiv:1004.2127 [hep-th]].

[55] D. N. Blaschke, "Aspects of perturbative quantum field theory on noncommutative spaces," PoS CORFU **2015**, 104 (2016) [arXiv:1601.03109 [hep-th]].

[56] D. N. Blaschke, E. Kronberger, A. Rofner, M. Schweda, R. I. P. Sedmik and M. Wohlgenannt, "On the Problem of Renormalizability in Non-Commutative Gauge Field Models: A Critical Review," Fortsch. Phys. **58**, 364 (2010) doi:10.1002/prop.200900102 [arXiv:0908.0467 [hep-th]].

[57] D. N. Blaschke, T. Garschall, F. Gieres, F. Heindl, M. Schweda and M. Wohlgenannt, "On the Renormalization of Non-Commutative Field Theories," Eur. Phys. J. C **73**, no. 1, 2262 (2013) doi:10.1140/epjc/s10052-012-2262-0 [arXiv:1207.5494 [hep-th]].

[58] J. C. Varilly and J. M. Gracia-Bondia, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. 2. Topologies on the Moyal algebra," J. Math. Phys. **29**, 880 (1988). doi:10.1063/1.527984

[59] D. Bigatti and L. Susskind, "Magnetic fields, branes and noncommutative geometry," Phys. Rev. D **62**, 066004 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.066004 [hep-th/9908056].

[60] T. Filk, "Divergencies in a field theory on quantum space," Phys. Lett. B **376**, 53 (1996). doi:10.1016/0370-2693(96)00024-X

[61] R. Gurau, V. Rivasseau and F. Vignes-Tourneret, "Propagators for noncommutative field theories," Annales Henri Poincare **7**, 1601 (2006) doi:10.1007/s00023-006-0296-2 [hep-th/0512071].

[62] A. Tanasa, "Translation-Invariant Noncommutative Renormalization," SIGMA **6**, 047 (2010) doi:10.3842/SIGMA.2010.047 [arXiv:1003.4877 [hep-th]].

[63] A. Tanasa and P. Vitale, "Curing the UV/IR mixing for field theories with translation-invariant $\star$ products," Phys. Rev. D **81**, 065008 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.81.065008 [arXiv:0912.0200 [hep-th]].

[64] M. Wohlgenannt, "Induced Gauge Theory on a Noncommutative Space," J. Phys. Conf. Ser. **103**, 012008 (2008) doi:10.1088/1742-6596/103/1/012008 [arXiv:0804.1259 [hep-th]].

[65] D. N. Blaschke, H. Grosse, E. Kronberger, M. Schweda and M. Wohlgenannt, "Loop Calculations for the Non-Commutative U(*)(1) Gauge Field Model with Oscillator Term," Eur. Phys. J. C **67**, 575 (2010) doi:10.1140/epjc/s10052-010-1295-5 [arXiv:0912.3642 [hep-th]].

[66] D. N. Blaschke, F. Gieres, E. Kronberger, M. Schweda and M. Wohlgenannt, "Translation-invariant models for non-commutative gauge fields," J. Phys. A **41**, 252002 (2008) [arXiv:0804.1914 [hep-th]].

[67] D. N. Blaschke, A. Rofner, M. Schweda and R. I. P. Sedmik, "One-Loop Calculations for a Translation Invariant Non-Commutative Gauge Model," Eur. Phys. J. C **62** (2009) 433 doi:10.1140/epjc/s10052-009-1031-1 [arXiv:0901.1681 [hep-th]].

[68] D. N. Blaschke, A. Rofner, R. I. P. Sedmik and M. Wohlgenannt, "On Non-Commutative U*(1) Gauge Models and Renormalizability," J. Phys. A **43**, 425401 (2010) doi:10.1088/1751-8113/43/42/425401 [arXiv:0912.2634 [hep-th]].

[69] P. G. Frè, “Gravity, a Geometrical Course : Vol. 1: Development of the theory and Basic Physical Applications”, Springer, 2013 doi:10.1007/978-94-007-5361-7

[70] M. Nakahara, “Geometry, topology, and physics,” Institute of Physics, Bristol, 2003.

[71] M. Buric and J. Madore, “Noncommutative frames, an insight to the geometry of the Grosse-Wulkenhaar model,” PoS QGQGS **2011**, 010 (2011).

[72] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Mourad, “Linear connections on the quantum plane,” Lett. Math. Phys. **35**, 351 (1995) doi:10.1007/BF00750842 [hep-th/9410199].

[73] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Mourad, “Curvature in non-commutative geometry,” J. Math. Phys. **37**, 4089 (1996). doi:10.1063/1.531618

[74] J. Madore, J. Mourad and A. Sitarz, “Deformations of differential calculi,” Mod. Phys. Lett. A **12**, 975 (1997) doi:10.1142/S0217732397000996 [hep-th/9601120].

[75] J. Madore and A. Dimakis, “Differential Calculi and Linear Connections,” J. Math. Phys. **37**, 4647 (1996) doi:10.1063/1.531645 [q-alg/9601023].

[76] J. Madore and J. Mourad, “Quantum space-time and classical gravity,” J. Math. Phys. **39**, 423 (1998) doi:10.1063/1.532328 [gr-qc/9607060].

[77] G. Fiore and J. Madore, “Leibniz Rules and Reality Conditions,” Eur. Phys. J. C **17**, 359 (2000) doi:10.1007/s100520000470 [math/9806071 [math.QA]].

[78] M. Buric and J. Madore, “Noncommutative 2-dimensional models of gravity,” hep-th/0406232.

[79] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Mourad, J. Math. Phys. **37**, 4089 (1996). doi:10.1063/1.531618

[80] M. Buric, H. Grosse and J. Madore, “Gauge fields on truncated Heisenberg space,” PoS CNCFG **2010**, 012 (2010).

[81] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)

[82] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, “Supergravity,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (2012)

[83] P. West, “Introduction to strings and branes,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (2012)

[84] L. E. Parker and D. Toms, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime : Quantized Field and Gravity,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (2009)

[85] P. Aschieri and L. Castellani, “Noncommutative gravity coupled to fermions: second order expansion via Seiberg-Witten map,” JHEP **1207** (2012) 184 [arXiv:1111.4822 [hep-th]].

[86] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, “Kaluza-Klein Supergravity,” Phys. Rept. **130**, 1 (1986). doi:10.1016/0370-1573(86)90163-8

[87] M. Nakahara, “Geometry, topology, and physics,” Institute of Physics, Bristol, 2003.

[88] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov and I. L. Shapiro, “Effective action in quantum gravity,” Bristol, UK: IOP (1992).

[89] I. L. Shapiro, “Physical aspects of the space-time torsion,” Phys. Rept. **357** (2002) 113 [hep-th/0103093].

[90] J. M. Bismut, “Le laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle,” Comptes Rendus Mathematique **338** 7 (2004), 555-559.

[91] J. Madore, “Fuzzy physics,” Annals Phys. **219**, 187 (1992). doi:10.1016/0003-4916(92)90316-E

[92] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, “Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation,” Phys. Rev. D **52** (1995) 1108 [hep-th/9412167].

[93] E. Kronberger, "Models with Oscillator Terms in Noncommutative Quantum Field Theory", Ph.D. Thesis, Technical University of Vienna, 2010.

[94] M. Hayakawa, “Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on R**4,” hep-th/9912167, M. Hayakawa, “Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R**4,” Phys. Lett. B **478** (2000) 394 doi:10.1016/S0370-2693(00)00242-2 [hep-th/9912094].

[95] F. R. Ruiz, “Gauge fixing independence of IR divergences in noncommutative U(1), perturbative tachyonic instabilities and supersymmetry,” Phys. Lett. B **502** (2001) 274 doi:10.1016/S0370-2693(01)00145-9 [hep-th/0012171].

[96] M. Attems, D. N. Blaschke, M. Ortner, M. Schweda, S. Stricker and M. Weiretmayr, “Gauge independence of IR singularities in non-commutative QFT: And interpolating gauges,” JHEP **0507**, 071 (2005) [hep-th/0506117].

[97] D. N. Blaschke, A. Rofner, R. I. P. Sedmik and M. Wohlgenannt, “On Non-Commutative U*(1) Gauge Models and Renormalizability,” J. Phys. A **43** (2010) 425401 doi:10.1088/1751-8113/43/42/425401 [arXiv:0912.2634 [hep-th]].

[98] D. N. Blaschke, “A New Approach to Non-Commutative U*(N) Gauge Fields,” Europhys. Lett. **91** (2010) 11001 doi:10.1209/0295-5075/91/11001 [arXiv:1005.1578 [hep-th]].

[99] H. Steinacker, “Emergent gravity and gauge theory from matrix models,” Int. J. Mod. Phys. A **24**, 2866 (2009).