

UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIČKI FAKULTET

Nikola Konjik

FENOMENOLOGIJA NEKOMUTATIVNOG
SKALARNOG POLJA U RAVNOM I
ZAKRIVLJENOM PROSTORU

doktorska disertacija



Beograd, 2019.

UNIVERZITET U BEOGRADU

FIZIČKI FAKULTET

Nikola Konjik

FENOMENOLOGIJA
NEKOMUTATIVNOG SKALARNOG
POLJA U RAVNOM I ZAKRIVLJENOM
PROSTORU

doktorska disertacija



Beograd, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF PHYSICS

Nikola Konjik

NONCOMMUTATIVE SCALAR FIELD
PHENOMENOLOGY IN FLAT
AND CURVED SPACE

Doctoral Dissertation



Belgrade, 2019

Mentor:

- Prof. dr Marija Dimitrijević Ćirić, vanredni profesor, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

-
-
-

Datum odbrane:

Zahvalnica

Zahvalnost za uspešan završetak ove disertacije, pre svih, dugujem mentorki prof. dr Mariji Dimitrijević Ćirić koja me je uvela u nekomutativni svet nauke i upoznala sa vodećim stručnjacima iz oblasti nekomutativne geometrije na velikom broju međunarodnih konferencija. Zahvaljujem joj se na uloženom ogromnom trudu, savetima, diskusijama, ali i velikom strpljenju kada sam malo sporije radio.

Zahvalio bih se i svim saradnicima: prof. dr Voji Radovanoviću, dr Anđelu Samsarovu, prof. dr Fedeleu Liciju (Fedele Lizzi), prof. dr Patriciji Vitale (Patrizia Vitale), dr Maksu Kurkovu (Max Kurkov) i Dragoljubu Gočaninu na zajedničkom radu i kolaboraciji kroz koje sam mnogo naučio i napredovao.

Zahvaljujem se prof. dr Maji Burić kao šefu projekta „Fizičke implikacije modifikovanog prostora vremena”, koji je finansiran od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, koja mi je pomogla i pružila priliku da postanem deo tog projekta i Grupe za gravitaciju, čestice i polja.

Bez pomoći SEENET-MTP mreže koja mi je pomogla da više puta posetim Institut Ruđer Bošković u Zagrebu, kome se ovim putem zahvaljujem na gostoprimstvu, i Erasmus Plus projekta koji mi je omogućio da provedem tri nezaboravna meseca na Univerzitetu Federiko II (Universita Federico II) u Napulju, kome se takođe zahvaljujem na gostoprimstvu, ne bi bilo moguće uraditi ovu disertaciju.

Zahvaljujem se svojim roditeljima, sestri, prijateljima, kolegama iz kancelarije, rodbini koji su mi pružali podršku tokom istraživanja i pisanja ove disertacije.

Rezime

U radu je predstavljena nekomutativna teorija skalarnog polja dobijena angularnim tvistom. Vektorska polja koja grade angularni tvist su generatori vremenske translacije i rotacije oko z -ose. Kvantna teorija nekomutativnog skalarnog polja je razmatrana na nivou jedne petlje. Izračunati su doprinosi planarnog i neplanarnog dijagrama kvantnim popravkama propagatora u ϕ_\star^4 teoriji. Na osnovu toga je razmatrano UV/IC mešanje. Pokazuje se da je zakon održanja impulsa deformisan na ovakvim prostorima zbog pojave \star -sume koja je posledica deformisanog (tvistovanog) koproizvoda generatora impulsa. Deformisani zakon sabiranja impulsa je iskorišten za analizu kinematike raspada čestica. U nastavku je razmatrana klasična nekomutativna teorija skalarnog polja koja je invarijantna na $U(1)_\star$ gradijentnu simetriju u zakrivljenom prostoru. Rešavanjem klasične jednačine kretanja u geometriji Rajsner-Nordstromove crne rupe dobijen je spektar nekomutativnih skalarnih kvazinormalnih moda. Za razliku od komutativnog slučaja, dobijeno je cepanje spektralnih linija koje su bile degenerisane po magnetnom kvantnom broju m . Rezultati su dobijeni korištenjem tri različita metoda: WKB metodom, metodom verižnih razlomaka i analitičkim metodom. Dobijeni rezultati su međusobno upoređeni i pokazano je dobro kvalitativno slaganje.

Ključne reči: nekomutativna geometrija, tvist formalizam, skalarno polje, gradijentna teorija, UV/IC mešanje, Rajsner-Nordstromova crna rupa, kvazinormalne mode.

Naučna oblast: Fizika

Uža naučna oblast: Teorijska fizika visokih energija

UDK broj: 539.120.226 (043.3)

Abstract

In this thesis a noncommutative deformation of scalar field theory is introduced by an angular twist. The angular twist is an Abelian twist, defined by two commuting vector fields: the generator of the time translations and the generator of rotations around the z -axis. The noncommutative ϕ_\star^4 quantum field theory is analyzed at the one-loop level and contributions to the propagator of both planar and non-planar diagrams are calculated. Using these results, UV/IR mixing is discussed. Noncommutative deformation induces a deformation of the momentum conservation law. This deformation can be expressed in terms of \star -sums of momenta. The \star -sum is a direct consequence of the deformed (twisted) coproduct of momenta. In the second part of this thesis a noncommutative scalar field in curved space is discussed. In particular, the dynamics of a noncommutative charged scalar field in the Reissner-Nördstrom black hole background is analyzed. Solving the scalar field equation of motion with appropriate boundary conditions, the quasinormal mode spectrum is obtained. Noncommutativity induces a splitting of spectral lines with respect to the magnetic quantum number m . Different methods are used to calculate the quasinormal mode spectrum: WKB method, continued fraction method and an analytic method. The results obtained by these methods are compared and a good qualitative agreement is shown.

Key words: noncommutative geometry, twist formalism, scalar field, gauge theory, UV/IR mixing, Reissner-Nördstrom black hole, quasinormal modes.

Scientific field: Physics

Research area: Theoretical high energy physics

UDC number: 539.120.226 (043.3)

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Nekomutativna geometrija	8
2.1	Vajlova kvantizacija	8
2.1.1	\star -proizvod	10
2.2	Nekomutativna kvantna teorija polja	12
2.2.1	Planarni Fajnmanovi dijagrami	13
2.2.2	Neplanarni Fajnmanovi dijagrami	14
2.3	UV/IC mešanje	15
2.4	Lokalnost, unitarnost i renormalizabilnost u kvantnim nekomutativnim teorijama	18
3	Tvist formalizam	21
3.1	Hopfove algebre	21
3.1.1	Hopfove algebre kao funkcije na grupi	21
3.1.2	Algebre	23
3.1.3	Koalgebre	24
3.1.4	Bialgebre	25
3.1.5	Hopfove algebre	25
3.1.6	Kocikli i kolanci	26
3.2	Tvist	27
3.2.1	Deformacija tvistom	28
3.3	Primeri deformacija	31
3.3.1	Moyal-Vajl	31
3.3.2	κ -Minkovski	33

4	Angularna nekomutativnost	36
4.1	Tvistovani diferencijalni račun	37
4.2	Hodžov dual	39
4.3	Angularni tvist u zakrivljenim koordinatama	40
4.4	\star -proizvod ravnih talasa	41
4.5	Poenkare Hopfova algebra tvistovana angularnim tvistom	43
4.6	Kinematika raspada čestica	46
5	Nekomutativno kvantno skalarno polje - UV/IC mešanje	50
5.1	Deformisani zakon održanja impulsa	50
5.2	UV/IC mešanje i propagator na nivou jedne petlje	51
5.3	Trodimenzijski slučaj	57
6	Nekomutativno klasično skalarno polje u zakrivljenom prostoru	60
6.1	Sajberg-Vitenovo preslikavanje	62
6.2	Razvijeno dejstvo i jednačine kretanja	63
6.3	Skalarno polje u Rajsner-Nordstromovoj geometriji	64
7	Nekomutativne skalarne kvazinormalne mode	67
7.1	WKB metod	67
7.1.1	Modifikovana kornjačina koordinata	67
7.1.2	Spektar kvazinormalnih moda	70
7.1.3	WKB rezultati	74
7.2	Metod verižnih razlomaka	76
7.2.1	Verižni razlomci - rezultati	84
7.3	Kvazinormalne mode približno ekstremalne Rajsner-Nordstromove crne rupe	93
7.3.1	Ekstremalni analitički slučaj - rezultati	98

8 Zaključak	103
Dodaci	107
A Proizvod ravnih talasa	107
B Dobijanje šestočlanih rekurentnih relacija	109
C Gausov metod eliminacije	114
D Mathematica fajl za računanje frekvencija i crtanje grafika	115

1 Uvod

Najveće otvoreno pitanje teorijske fizike današnjice je kako ujediniti kvantnu teoriju polja i opštu teoriju relativnosti. Arena događaja kvantne teorije polja je prostor Minkovskog (Minkowski), dok je arena događaja opšte teorije relativnosti Rimanov (Riemann) prostor. Suštinska razlika u ovim dvema teorijama je to što opisuju fizičke fenomene na različitim skalama. Dok kvantna teorija polja dobro opisuje fenomene na malim rastojanjima, opšta teorija relativnosti dobro opisuje fenomene na rastojanjima koja su reda veličine Sunčevog sistema. Da bi se opisala gravitaciona interakcija na malim rastojanjima, potrebno je formulisati kvantnu teoriju gravitacije. Međutim, do sada nije formulisana odgovarajuća teorija kvantne gravitacije. Neki od pokušaja da se opiše kvantna teorija gravitacije su teorija struna [1], teorija supergravitacije [2], kvantna gravitacija na petljama [3], kao i nekomutativna geometrija. Osnovna ideja teorije struna je da se tačkasti objekti iz kvantne teorije polja zamene jednodimenzionalnim objektima, strunama. Spektar vibracija struna sadrži sve poznate čestice i prenosiocje interakcija. Neki od problema teorije struna su problem kompaktifikacije dimenzija ili beskonačan broj čestica u spektru. Teorija supergravitacije predviđa da pored bozonskih stepeni slobode, gravitona, u teoriji postoje i fermionski stepeni slobode, gravitina, čiji divergentni dijagrami bi trebalo da se ponište sa gravitonskim divergentnim dijagramima i na taj način daju renormalizabilnu teoriju. U praksi, stepen divergencije se smanji, ali je teorija i dalje nerenormalizabilna. Kvantna gravitacija na petljama podrazumeva da je mnogostrukost diskretna. Problemi ovog pristupa su nepostojanje dobrog klasičnog limesa, problem konstrukcije interagujuće teorije gravitacije, tehnički veoma zahtevan račun i jako mali broj pronađenih rešenja do sada. Osnovna ideja nekomutativne geometrije je da na visokim energijama koordinate formiraju asocijativnu i nekomutativnu algebru.

Prva ideja o nekomutativnosti prostora potiče još iz vremena tridesetih godina XX veka kada je Hajzenberg (Heisenberg) predložio da se pored nenultog komutatora koordinate i impulsa u kvantnoj mehanici postuliraju i nenulte komutacione relacije operatora koordinata [4]. Uvođenje nekomutativnih koordinata

je bio pokušaj da se eliminišu ultravioletne divergencija u kvantnoj teoriji polja. Pošto je teorija renormalizacije dala izuzetne rezultate po pitanju otklanjanja divergencija u teoriji kada je broj divergencija konačan, odustalo se od ideje nekomutativnosti. Prvi model nekomutativne geometrije dao je Snajder (Snyder) [5], koji je pokazao da je moguće imati očuvanu Lorencovu (Lorentz) simetriju iako prostorvreme nije kontinualno. Veće interesovanje za nekomutativnu geometriju se javilo krajem osamdesetih godina XX veka kada se shvatilo da opšta teorija relativnosti nije renormalizabilna. U opštoj teoriji relativnosti postoje singularna rešenja Ajnštajnovih jednačina, kod kojih je singularnost od posmatrača zaklonjena horizontom događaja. Karakterističan primer su crne rupe. Može se zaključiti da, ako je velika energija smeštena u malom delu prostora, prirodno je da će doći do formiranja horizonta događaja oko tog dela prostora. Zbog pojave horizonta, mora da postoji izvesna neodređenost pri merenju koordinata, čime pojam tačke gubi smisao. Ako bi komutator dve koordinate bio različit od nule, prema Hajzenbergovim relacijama neodređenosti bi sledila neodređenost koordinata. Kada je otkrivena veza između teorije struna i nekomutativne geometrije, teorija polja na nekomutativnim prostorima je ušla u žižu interesovanja u fizici visokih energija. Naime, u nenultom Kalb-Ramonovom (Kalb-Ramond) B -polju krajevi bozonske strune na D -brani ne komutiraju [6]. Primer kada je Poasonova (Poisson) zagrada koordinata različita od nule postoji i u klasičnoj mehanici. Kada se naelektrisanja q i mase m kreće u xy -ravni u konstantnom magnetnom polju koje je usmereno duž z -ose, u limesu kada je magnetno polje B veliko, kinetička energija može da se zanemari u odnosu na član koji je proporcionalan magnetnom polju. Kao posledica ove aproksimacije dobija se nenulta Poasonova zagrada između x i y koordinata. Prelaskom na kvantnu mehaniku, Poasonova zagrada prelazi u komutator pa se nakon kvantovanja dobija $[x, y] \sim 1/B$.

Pošto na nekomutativnim prostorima pojam tačke gubi smisao, koordinate nisu dobar kandidat kojim bi se dati nekomutativni prostor opisao. Stoga treba naći druge elemente definisane na takvim prostorima kojima bi se nekomutativni prostor opisao. U radovima Gelfanda (Gelfand) i Najmarka (Naimark) [7, 8] je pokazana ekvivalentnost između Hausdorfovih (Hausdorff) topoloških prostora i komutativnih C^* -algebri. Ovo zapravo znači da se osobine prostora ne definišu posmatrajući prostor kao skup tačaka, već koristeći algebru funkcija (polja) definisanih na prostoru. Nekomutativan prostor onda odgovara nekomutativnoj algebri funkcija (polja). Postoji više pristupa, to jest načina uvođenja nekomutativnosti. Neki od njih su: spektralni triplet [9], NK tetradni formalizam [10], \star -proizvod [11, 12], matrični modeli [13]. Neki od ovih formalizama su zapravo ekvivalentni, pa je tako algebra nekomutativnih Švarcovih (Schwartz) funkcija definisana Moja-

lovim (Moyal) \star -proizvodom zapravo nekomutativni spektralni triplet [14]. Spektralni triplet, koji čine Hilbertov (Hilbert) prostor, algebra definisana na Hilbertovom prostoru i Dirakov (Dirac) operator, je osnova Konovog (Connes) pristupa nekomutativnosti. Ova disertacija će biti bazirana na formalizmu \star -proizvoda.

Nekomutativna teorija skalarnog polja je najviše proučavana nekomutativna teorija. Skalarno polje je fizičko polje koje u fizičkoj tački ima istu vrednost za sve posmatrača. To su u klasičnoj mehanici temperatura, pritisak, gustina... U relativističkoj kvantnoj mehanici, skalarno polje opisuje česticu spina nula. Skalarna teorija je prirodno uopštenje nerelativističke kvantne mehanike, sa relativističkom disperzionom relacijom. Pošto je po svojoj strukturi najjednostavnije, skalarno polje je pogodan model na kome mogu da se pokažu mnoge osobine koje bi potencijalno mogle da imaju komplikovanije teorije, kao što su fermioni ili gradijentne teorije. Pored toga, postoje i detektovane masene (kratkodometne) čestice u okviru Standardnog modela koje su skalari. Među njima su skalarni mezoni, kao i Higsov (Higgs) bozon. Higsov bozon se javlja kao posledica spontanog narušenja gradijentne simetrije u Standardnom modelu. Sličan mehanizam se sreće u fizici superprovodnika, gde su dve različite faze povezane sa dva različita skalarna polja, što eksplicitno narušava gradijentnu simetriju Ginzburg-Landauovog (Ginzburg-Landau) hamiltonijana [15]. U kosmološkom standardnom modelu, u periodu neposredno posle velikog praska, svemir se veoma brzo raširio. Ovaj fenomen je poznat kao inflacija, a za njega je odgovoran izvor energije koji se može modelirati bezmasenim (dugodometnim) skalarnim poljem koje se naziva inflaton [16]. Ovaj fenomen je usko povezan sa nenultom kosmološkom konstantom u kosmologiji. Veoma zanimljiv fenomen su i skalarne kvazinormalne mode, prigušene oscilacije materije u blizini crne rupe [17, 18, 19, 20] koje mogu da budu dobar kandidat za određivanje strukture prostorvremena.

Veliki broj publikacija je objavljen na temu formulacije nekomutativne teorije skalarnog polja. Neke od implikacija nekomutativnosti na teoriju polja su: narušenje Lorencove invarijantnosti nekomutativnih teorija sa deformacijom spektra hamiltonijana [21], promena sile kod Kazimirovog (Casimir) efekta gde nekomutativnost povećava odbojni karakter sile [22], deformisana Kac-Mudijeva (Kac-Moody) algebra. Takođe, nekomutativnost utiče i na spektar zračenja apsolutnog crnog tela [23] i teoriju inflacije [24]. U slučaju Boze-Ajnštajnovog (Bose-Einstein) kondenzata u nekomutativnom prostoru [25], nekomutativnost modifikuje termodinamičke veličine. Specifična toplota u okolini kritične temperature ima veći međuprostor, što može da ima uticaj na visokotemperaturnu superprovodnost. Pokazana je i deformacija kvazinormalnih moda u nekomutativnim prostorima

[26, 27]. Pokazuje se da kvantne teorije polja (prvo je pokazano za skalarnu teoriju) na Mojalovom nekomutativnom prostoru nisu renormalizabilne [12, 28, 29] na više od jedne petlje. Razlog za takvo ponašanje teorije leži u činjenici da su neplanarni dijagrami konačni, osim za male vrednosti spoljašnjih impulsa. Kada takvi dijagrami postanu deo većeg dijagrama, po tim impulsima se integrišu. Tako dijagram postaje divergentan, nezavisno od spoljašnjih linija velikog dijagrama. Ova osobina je poznata kao mešanje doprinosa visokih i niskih energija virtuelnih čestica, koje se naziva UV/IR (ultravioletno/infracrveno) mešanje. Pokazano je da se ovo mešanje pojavljuje kada je nekomutativnost translaciono invarijantna [30], dok u modelu [31] koji eksplicitno narušava translacionu invarijantnost tog mešanja nema, pa je teorija renormalizabilna.

Veoma važan aspekt nekomutativnog skalarnog polja je kako ono interaguje sa gravitacionim poljem. Kao posledica interakcije, nekomutativne korekcije utiču na samo prostor-vreme [32]. Detektovanje ovih posledica je moguće merenjem prigušenih oscilacija materije koja se nalazi u okolini neke crne rupe. Ove oscilacije se zovu kvazinormalne mode. Veoma su dobro ispitane za veliki skup geometrija, kako u komutativnom [20, 19], tako i u nekomutativnom slučaju [26, 27]. Poređenjem spektara, može se utvrditi kako nekomutativnost utiče na samo prostorvreme.

Veliki broj fizičkih sistema svoj potpis ostavlja preko specifičnih vibracija. Na osnovu spektra nekog gasa moguće je precizno odrediti njegov sastav. Na isti način je moguće na osnovu frekvencija zvuka bubnja tačno odrediti njegov geometrijski oblik. Značaj specifičnih moda oscilovanja za prepoznavanje određenih fizičkih procesa je od velike važnosti u seizmologiji, astroseizmologiji, meteorologiji, građevinarstvu. . . Crne rupe, kao i materija u okolini crnih rupa takođe poseduju karakteristične vibracije. Do ekscitacije crne rupe, koja dovodi do zračenja putem specifičnih vibracija može da dođe spajanjem dveju crnih rupa, ili upadom materije koja se nalazi oko horizonta u datu crnu rupu. Nakon ekscitovanja, crne rupe, kao odgovor na promenu stanja, prolaze kroz period odzvanjanja (ring-down phase). Tokom tog perioda, crna rupa zrači gravitacione talase, dok materija oko horizonta takođe zrači. Period odzvanjanja može da se podeli u tri celine. Prvi deo je kratki period intenzivne radijacije, za kojim sledi duži period praćen prigušenim talasima. Takvi talasi se zovu kvazinormalne mode. Poslednji deo zračenja se emituje kada se kvazinormalne mode dovoljno priguše i naziva se kasnim repovima (late tails). Ovaj period zračenja je praćen poljima koja opadaju po stepenom zakonu u zavisnosti od vremena. Period u kome dominiraju kvazinormalne mode je najduži period i najznačajniji je za proučavanje prostorvremena

u okolini crnih rupa jer kvazinormalne mode ne zavise od vrste perturbacije nego samo od parametara crnih rupa. Klasične crne rupe se mogu opisati sa samo tri parametra: masom, naelektrisanjem i ugaonim momentom. Ovaj izraz je poznat kao „no hair theorem” [33]. Pokazuje se da spektar kvazinormalnih moda zavisi samo od ta tri parametra i polja koja su u okolini crne rupe. Merenje spektra može da da značajne informacije o samom prostorvremenu. Na taj način, potvrda nekomutativnosti prostorvremena može potencijalno da se dobije iz ovih spektara.

Većina makroskopskih idealnih sistema nema disipativne efekte. Za razliku od njih, perturbovane crne rupe zbog prisustva horizonta događaja prirodno poseduju disipativni karakter. Zbog takvog karaktera crnih rupa, nemoguće je razmatrati normalne mode u njihovoj blizini. Sistem ne poseduje simetriju na vremensku inverziju, pa samim tim ni granični uslovi koji podrazumevaju da je talas u okolini horizonta čisto upadni, dok je u prostornoj beskonačnosti čisto odlazni. Ovi granični uslovi nisu hermitski. Na osnovu svega iznetog, svojstvene frekvencije će imati diskretne kompleksne vrednosti, gde će imaginarna vrednost frekvencije odgovarati prigušenju. Sistematičan pregled o kvazinormalnim modama se može pronaći u [34, 20, 35]. Otkrićem gravitacionih talasa [17], kvazinormalne mode su postale jedan od važnijih fenomena današnjice. Pored toga što se gravitacione kvazinormalne mode mogu direktno povezati sa gravitacionim talasima, treba napomenuti da se spektar kvazinormalnih moda crnih rupa nameće kao očigledan kandidat za interpretaciju semiklasične slike crne rupe kao kvantnog sistema sa diskretnim energijskim nivoima. Semiklasična slika pretpostavlja da se crna rupa kao kvantni sistem deekscituje iz pobuđenog stanja i pri tome emituje zračenje. Pri tome bi gravitacione perturbacije i odgovarajuće kvazinormalne mode opisivale gravitaciono zračenje, a skalarne i fermionske perturbacije bi odgovarale Hokin-govom zračenju. Na osnovu toga je predloženo da se realni deo frekvencija u semiklasičnom limesu velikih kvantnih brojeva n interpretira kao elementarni kvant mase/energije koju je crna rupa emitovala [36].

Proučavanje kvazinormalnih moda je započelo radom Redžea (Regge) i Vilerera (Wheeler) 1957. godine [37]. Oni su proučavali jednu klasu gravitacionih perturbacija Švarcšildove (Schwarzschild) geometrije. Njihovu analizu je dopunio Zerili (Zerilli) 1970. godine za opšti slučaj perturbacija [38]. Ker (Kerr) je 1963. godine pronašao rešenje Ajuštajnovih jednačina koje odgovara rotirajućoj crnoj rupi [39], a iste godine je Šmit (Schmidt) prvi put detektovao kvazar. Kvazare danas razumemo kao veoma masivne rotirajuće crne rupe. Prvo X-zračenje koje potiče od akrecije materije oko crne rupe je detektovano 1964. godine na orbitnoj stanici UHURU. Višvešvara (Vishveshwara) je 1970. godine [19] numerički

proučavao rasejanje gravitacionih talasa u Švarcšildovoj geometriji. Kao rezultat je dobio da nakon nekog vremena talas dobije prigušeni sinusni oblik koji odgovara fazi odzvanjanja. Početkom 70-ih godina Pres (Press) je odzvanjajuće talase okarakterisao kao slobodne oscilacije crnih rupa, dok su Dejvis (Davis), Teukolski (Teukolsky), Čandrasekar (Chandrasekhar) i mnogi drugi razvijali analitičke i numeričke metode za računanje karakterističnih prigušenih frekvencija oscilovanja crnih rupa [40, 41, 42]. Prvi pokušaj povezivanja kvazinormalnih moda sa kvantnom gravitacijom potiče od Jorka (York). On je uporedio spektar kvazinormalnih moda sa Hokingovim zračenjem [43]. Mašun (Mashhoon) je 1983. predložio da se WKB tehnike iskoriste za računanje spektra kvazinormalnih moda [44], što su Šuc (Schutz) i Vil (Will) sprovedli 1985. godine [45]. Iste godine, Liver (Leaver) je za računanje spektra kvazinormalnih moda primenio jedan od najtačnijih metoda korišćenjem verižne razlomke [46, 47]. Kvazinormalne mode velike D -dimenzionalne AdS asimptotske crne rupe su pretpostavljene kao polovi retardovane Grinove (Green) funkcije u dualnoj konformnoj teoriji polja u $(D - 1)$ dimenzioniji [48], što je eksplicitno pokazana u slučaju $2 + 1$ dimenzije [49]. Spektar nekomutativnih kvazinormalnih moda prvi put je izračunat u radovima Gupte (Gupta), Jurića i Samsarova [26, 27]. Analiza skalarnih nekomutativnih kvazinormalnih moda u Rajsner-Nordstromovoj geometriji je urađena u [50, 51].

Tema ove disertacije su fenomenološki aspekti nekomutativne geometrije dobijene deformacijom angularnim tvistom. Takav pristup nekomutativnoj geometriji je deo \star -proizvod pristupa, koji se prirodno pojavljuje u kvantnim teorijama koje su dobijene Vajlovom (Weyl) kvantizacijom. Detaljan opis formalizma Vajlove kvantizacije i \star -proizvoda se može pronaći u [12], dok će kratak opis ovog formalizma biti dat u poglavlju 2. Nakon toga će biti analizirane neke od osobina nekomutativne kvantne teorije polja deformisane \star -proizvodom kao što su UV/IC mešanje, nelokalnost, neunitarnost, kao i renormalizacione osobine. Iako ideja \star -proizvod formalizma potiče iz Vajlove kvantizacije, \star -proizvod pristup može da se primeni i preko tvist formalizma. Osnovna ideja tvist formalizma je da se 2-kociklom, koji se naziva tvist, deformiše Hopfova (Hopf) algebra simetrija fizičke teorije, koja kao takva deluje na algebre funkcija, formi, tenzora i slično. Detaljan formalizam Hopfovih algebri se može naći u [52], dok se primeri teorija koje su deformisane tvistom mogu naći u [53, 54, 55, 56]. Zbog svog značaja u \star -proizvod pristupu, Hopfove algebre i primeri Mojalove i κ -Minkovski nekomutativnosti, dobijene tvist formalizmom, će biti razmatrane u poglavlju 3. Zbog problema koji se sreću kod κ -Minkovski nekomutativnosti, za potrebe ove teze je konstruisan model angularne nekomutativnosti [50, 57] koji je tipa Lijeve algebre u Dekartovim koordinatama. Angularna nekomutativnost je dobijena iz angularnog tvista koji jednostavno može

da se adaptira na sferne ili cilindrične koordinate, što je veoma značajno za fenomenologiju teorija sa takvim simetrijama. Nakon definisanja angularnog tvista i analiziranja posledica deformacije angularnim tvistom na diferencijalnu geometriju, Poenkareovu Hopfov algebru i kinematiku raspada čestica u poglavlju 4, u poglavlju 5 će biti razmatrane osobine kvantne teorije nekomutativnog skalarnog polja dobijene deformacijom angularnim tvistom. Akcenat će biti na deformisanom zakonu održanja impulsa i na UV/IC mešanju u tri i četiri dimenzije. Rezultati koji će biti dati u ovom poglavlju su proizašli iz ove teze i publikovani su u [57]. Nakon kvantne teorije, klasična teorija nekomutativnog skalarnog polja dobijena deformacijom angularnim tvistom će biti predstavljena u poglavlju 6 i rezultati koji će biti dati su publikovani u [50]. Definisaće se dejstvo za skalarno polje koje interaguje sa $U(1)$ gradijentnim poljem. Dejstvo će se deformisati angularnim tvistom uz pomoć rezultata dobijenih u poglavlju 4, uz uslov da su samo polja materije i gradijentna polja deformisana, dok gravitacija ostaje klasična (semiklasični pristup). Nakon toga će dejstvo biti razvijeno uz pomoć Sajberg-Vitenovog (Seiberg-Witten) preslikavanja i biće izračunate jednačine kretanja. Jednačina za skalarno polje će biti posebno izračunata u Rajsner-Nordstromovoj geometriji. Dobijena jednačina će biti rešena u poglavlju 7, koristeći granične uslove za kvazinormalne mode. U slučaju neekstremalne crne rupe biće primenjeni WKB metod i metod verižnih razlomaka, dok se u slučaju približno ekstremalne crne rupe može potražiti rešenje u analitičkom obliku. Rezultati koji će biti predstavljeni u ovom poglavlju su publikovani u [50, 51]. Sumiranje dobijenih rezultata, njihov značaj i mogućnosti za nastavak istraživanja biće dati u poglavlju 8.

2 Nekomutativna geometrija

Mnoge ideje i osnovi nekomutativne geometrije potiču iz kvantne mehanike. Jedna od tih osnova je i Vajlova kvantizacija iz koje, kao posledica, sledi \star -proizvod. Osnovna ideja ovog formalizma je da se odgovarajući kvantni operatori prepisu na jezik klasičnih funkcija nad faznim prostorom [58]. Ovaj formalizam može da opiše proizvoljnu nekomutativnu geometriju [59], ali u ovom poglavlju će akcenat biti na Mojalovoj nekomutativnosti gde je $\theta^{\mu\nu}$ konstantna antisimetrična matrica. Biće razmotren i primer kvantne teorije nekomutativnog skalarnog polja na Mojalovom prostoru. Na ovom primeru, biće diskutovane osnovne osobine nekomutativne kvantne teorije polja: UV/IC mešanje, renormalizabilnost, lokalnost i unitarnost.

2.1 Vajlova kvantizacija

Kako je ranije napomenuto, u nekomutativnoj geometriji, pojam tačke gubi smisao, pa se nekomutativni prostori opisuju funkcijama koje zadovoljavaju određene uslove. Da bi se konzistentno konstruisala nekomutativna algebra tih funkcija, za početak treba krenuti od komutativne algebre, u opštem slučaju kompleksnih Švarcovih funkcija, na D -dimenzionalnom Euklidskom prostoru \mathbb{R}^D sa običnim proizvodom funkcija. Švarcove funkcije zadovoljavaju uslov da su beskonačno diferencijabilne i da izvodi funkcija proizvoljnog reda u beskonačnosti teže nuli [60] i u konfiguracionom i u impulsnom prostoru. Švarcova funkcija $f(x)$ treba da ima odgovarajući Furijeov (Fourier) razvoj

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) , \quad (2.1)$$

gde je $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ ispunjeno za sve realne funkcije $f(x)$. Zamenom lokalnih koordinata x^μ iz \mathbb{R}^D hermitskim operatorima \hat{x}^μ konstruiše se nekomutativna algebra operatora \hat{x}^μ , definisana sa

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\hbar\theta^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

gde je $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ konstantna antisimetrična matrica. U literaturi se često mali parametar \hbar apsorbuje u matrice elemente $\theta^{\mu\nu}$, $\hbar\theta^{\mu\nu} \sim \theta^{\mu\nu}$, pa se za mali parametar nekomutativnosti uzima $\theta^{\mu\nu}$. Za datu funkciju $f(x)$ i njenu Furijeovu transformaciju (2.1), uvodi se Vajlov simbol (operator) kao

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} , \quad (2.3)$$

gde je izabrano simetrično uređenje operatora \hat{x}^μ . Vajlov operator $\hat{\mathcal{W}}[f]$ je hermitski ako je $f(x)$ realna funkcija.

Izraz (2.3) može da se eksplicitno izrazi preko operatora $\hat{\Delta}(x)$ koji povezuje funkciju sa odgovarajućim Vajlovim operatorom korištenjem (2.1) kao

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x) \quad (2.4)$$

gde je

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} . \quad (2.5)$$

Operator (2.5) je hermitski, $\hat{\Delta}(x)^\dagger = \hat{\Delta}(x)$ i predstavlja bazis u prostoru operatora i u konfiguracionom prostoru u isto vreme. U tom smislu, funkcija $f(x)$ predstavlja koordinatnu reprezentaciju Vajlovog operatora $\hat{\mathcal{W}}[f]$. U komutativnom slučaju $\theta^{\mu\nu} = 0$, preslikavanje (2.5) se svodi na δ -funkciju $\delta^D(\hat{x} - x)$ i Vajlov operator postaje $\hat{\mathcal{W}}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$.

Izvodi operatora mogu da se uvedu kao linearni antihermitski operatori $\hat{\partial}_\mu$ koji su definisani kao

$$\left[\hat{\partial}_\mu , \hat{x}^\nu \right] = \delta_\mu^\nu \quad , \quad \left[\hat{\partial}_\mu , \hat{\partial}_\nu \right] = 0 . \quad (2.6)$$

Iz (2.6) sledi

$$\left[\hat{\partial}_\mu , \hat{\Delta}(x) \right] = -\partial_\mu \hat{\Delta}(x) , \quad (2.7)$$

a uz parcijalnu integraciju (2.4) postaje

$$\left[\hat{\partial}_\mu , \hat{\mathcal{W}}[f] \right] = \int d^D x \partial_\mu f(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f] . \quad (2.8)$$

Ako se normalizacija operatora (2.4) izabere da važi $\text{Tr} \hat{\Delta}(x) = 1$, onda direktno sledi

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) . \quad (2.9)$$

Jednačina (2.9) predstavlja definiciju integrala u nekomutativnom prostoru.

Proizvod operatora $\hat{\Delta}(x)$ u određenoj tački može da se izračuna korištenjen Bejker-Kembel-Hausdorfove (BCH) formule

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\mu \hat{x}^\mu} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} , \quad (2.10)$$

gde drugi eksponent potiče od komutativnog dela, dok je prvi eksponent posledica nenulte vrednosti komutatora koordinata koji se pojavljuju u BCH formuli. Koristeći definiciju (2.4), jednostavno se izračunava da je

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_\mu z^\mu} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ako je θ invertibilna matrica, onda se direktnom integracijom izraza (2.12) po impulsima k i k' dobija da je

$$\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu} (x-z)^\mu (y-z)^\nu} . \quad (2.12)$$

Iz ovoga jasno sledi da operatori $\hat{\Delta}(x)$ za $x \in \mathbb{R}^D$ čine ortonormiran skup,

$$\text{Tr} \left(\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) \right) = \delta^D(x - y) , \quad (2.13)$$

što znači da je transformacija $f(x) \xrightarrow{\hat{\Delta}(x)} \hat{\mathcal{W}}[f]$ invertibilna, a da je njen inverz dat kao

$$f(x) = \text{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\Delta}(x) \right) . \quad (2.14)$$

Funkcija $f(x)$ koja je na ovaj način dobijena iz Vajlovog operatora se zove Vignerova (Wigner) funkcija distribucije [61].

2.1.1 \star -proizvod

Treba videti šta je proizvod dva Vajlova operatora $\hat{\mathcal{W}}[f]$ i $\hat{\mathcal{W}}[g]$ koji odgovaraju funkcijama $f(x)$ i $g(x)$. Iz relacija (2.4), (2.12) i (2.13) sledi da je koordinatna reprezentacija ovog proizvoda jednaka

$$\text{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] \hat{\Delta}(x) \right) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \iint d^D y d^D z f(y) g(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu} (x-y)^\mu (x-z)^\nu} . \quad (2.15)$$

Koristeći (2.3), (2.1) i (2.10) dobija se

$$\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g] , \quad (2.16)$$

gde je \star -proizvod dat kao

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{ik'_\mu x^\mu} \\ &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x) . \end{aligned} \quad (2.17)$$

što je zapravo Mojal-Vajlov proizvod definisan u [62, 63]. \star -proizvod (2.18) je nekomutativan i asocijativan i definisan je za konstantnu vrednost matrice θ . Za $\theta = 0$, \star -proizvod (2.18) postaje običan proizvod funkcija. Ovo je samo jedan primer opštijeg \star -proizvoda definisanog deformacionom kvantizacijom [64]. Treba napomenuti da se ovim formalizmom prelazi sa nekomutativnih operatora koji imaju standardno pravilo množenja na komutativne funkcije sa deformisanim pravilom množenja.

Mojalov \star -komutator komutativne lokalne koordinate x^μ sa funkcijom $f(x)$ može da generiše parcijalne izvode jer je

$$[x^\mu \star, f(x)] = i \theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x) . \quad (2.18)$$

Formula (2.18) može da se uopšti na \star -proizvod n funkcija

$$f_1(x_1) \star \dots \star f_n(x_n) = \prod_{a < b} \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} \frac{\partial}{\partial x_b^\nu}\right) f_1(x_1) \dots f_n(x_n) . \quad (2.19)$$

Nekomutativnost može da se izrazi na dva načina: kao običan proizvod nekomutativnih Vajlovih operatora koji su elementi C^* -algebre, ili ekvivalentno preko deformisanog \star -proizvoda komutativnih C^* -funkcija. Pošto je

$$\text{Tr}\left(\hat{\mathcal{W}}[f_1] \dots \hat{\mathcal{W}}[f_n]\right) = \int d^D x f_1(x) \star \dots \star f_n(x) \quad (2.20)$$

invarijantno na ciklične permutacije, to znači da su pod integralom dozvoljene

takođe ciklične permutacije funkcija f_i . U specijalnom slučaju važi

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x) , \quad (2.21)$$

što je sa jedne strane posledica cikličnosti traga, a sa druge strane parcijalnih integracija i osobina Švarcovih funkcija.

U opštem slučaju, komutacione relacije $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]$, $[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]$ i $[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu]$ mogu da budu proizvoljne funkcije definisane u faznom prostoru. Ovakve komutacione relacije definišu algebru pseudodiferencijalnih operatora na nekomutativnom prostoru, što odgovara teoriji koja opisuje kvantovanu otvorenu strunu u promenljivom polju B [65]. Jedna od prvih takvih konstruisanih nekomutativnih teorija je Snajderova teorija [66, 5]. U slučaju kada je polje B zatvorena 2-forma, tj. $dB = 0$, odgovarajući \star -proizvod je asocijativan i dat je Konstevičevom (Konstevich) formulom [59] dobijenom deformacionom kvantizacijom Poasonove strukture.

2.2 Nekomutativna kvantna teorija polja

Da bi se komutativna teorija transformisala u odgovarajuću nekomutativnu, jedan od mogućih načina je da se iskoristi procedura Vajlove kvantizacije. Dejstvo za maseno skalarno polje sa ϕ^4 interakcijom u D -dimenzionom Euklidskom prostoru može da se napiše preko Vajlovog operatora $\hat{\mathcal{W}}[\phi]$ kao

$$S_{(4)}[\phi] = \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \left[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[\phi] \right]^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^2 + \frac{g^2}{4!} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^4 \right) , \quad (2.22)$$

gde je m masa polja ϕ i g konstanta interakcije. Dato dejstvo može da se prepíše u konfiguracionom prostoru korištenjem preslikavanja (2.4) i osobine (2.16) kao

$$S_{(4)}[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi(x) \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{g^2}{4!} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right] . \quad (2.23)$$

Da bi se analizirala kvantna teorija koja odgovara klasičnom nekomutativnom dejstvu (2.23), biće primenjen standardni formalizam perturbativne kvantne teorije polja preko Fajnmanovih (Feynman) dijagrama.

Osobina (2.21) obezbeđuje da kvadratični članovi nemaju nekomutativnu korekciju, što znači da je propagator isti kao u komutativnom slučaju. Sa druge

strane, interakcioni član je u nekomutativnom slučaju jednak

$$\text{Tr}\left(\hat{\mathcal{W}}[\phi]^4\right) = \prod_{a=1}^4 \int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_a) (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{a=1}^4 k_a\right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.24)$$

gde je vrednost verteksa

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \wedge k_b}, \quad (2.25)$$

a antisimetrična bilinearna forma

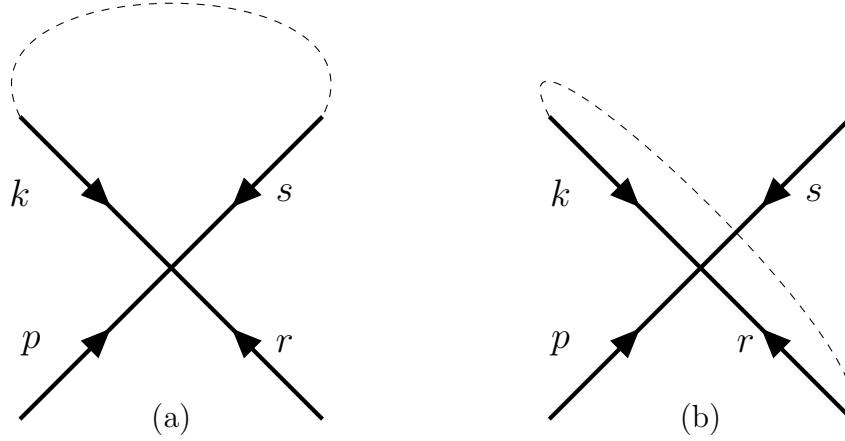
$$k_a \wedge k_b = k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu} = -k_b \wedge k_a, \quad (2.26)$$

koja je proporcionalna matrici nekomutativnosti θ . Ovaj član je posledica Furijeovog razvoja \star -proizvoda (2.18), koji u impulsnom prostoru ima oblik (2.25). Biće pretpostavljeno da je matrica θ invertibilna, što znači da mora da je parne dimenzije. Iz (2.25) se vidi da je vrednost verteksa u Mojalovoj nekomutativnoj kvantnoj teoriji polja proporcionalna faznom faktoru koji zavisi od impulsa. Ovaj fazni faktor ima veliki značaj za neke osobine koje nekomutativna teorija poseduje, a koji se ne ispoljavaju u odgovarajućim komutativnim teorijama.

2.2.1 Planarni Fajnmanovi dijagrami

U ovom delu biće analizirani planarni dijagrami opšte kvantne teorije, nezavisno od $\phi^{\star 4}$ teorije definisane ranije. Iz zakona održanja impulsa sledi da je verteks (2.25) jedino invarijantan na ciklične permutacije impulsa k_a , dok su u komutativnom slučaju dozvoljene proizvoljne permutacije. Zbog ove osobine treba odrediti koji od datih impulsa se međusobno kontrahuju u petlje, a koji predstavljaju spoljašnje čestice ili propagatore bez petlji. Identična situacija se javlja kod $U(N)$ gradijentnih teorija polja ili $N \times N$ matičnih modela [67] za veliko N . Planarni Fajnmanovi dijagrami su oni koji mogu da se nacrtaju u ravni bez međusobnih presecanja linija. Kada su dozvoljene samo ciklične permutacije, da bi dijagram bio planaran, moguće je u petlju kontrahovati samo susedne impulse. U komutativnom slučaju su dozvoljene proizvoljne permutacije, pa je uvek moguće proizvoljne impulse dovesti jedan do drugoga i kontrahovati ih u petlju tako da se dobije planarni dijagram.

Na osnovu ovoga, ukupan fazni faktor koji odgovara planarnom Fajnmanovom



Slika 1: Kontrahovanje susednih impulsa (a) u planarni dijagram i nesusednih (b) u neplanarni dijagram na primeru nekomutativne skalarne ϕ^4 teorije.

dijagramu jednak je [68]

$$V_p(p_1, \dots, p_n) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} p_a \wedge p_b} \quad (2.27)$$

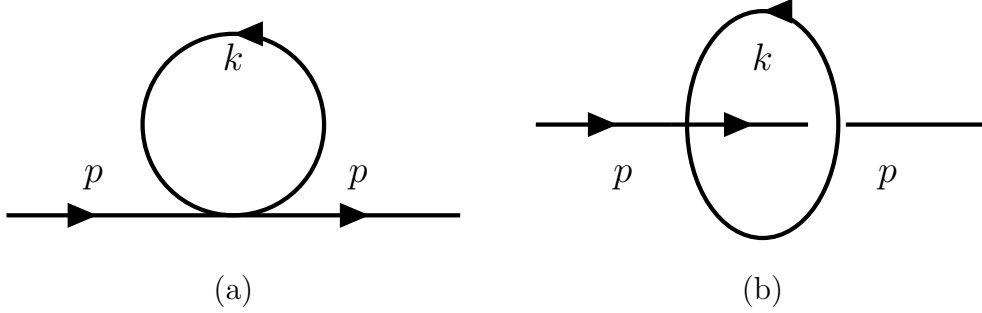
gde su p_1, \dots, p_n ciklično uređeni spoljašnji impulsi koji ulaze u verteks. Fazni faktor (2.27) je potpuno nezavistan od unutrašnje strukture dijagrama i samo zavisi od spoljašnjih impulsa.

Doprinos planarnih dijagrama nekomutativnoj kvantnoj teoriji jednak je doprinosu odgovarajućih dijagrama iz komutativne teorije koji su pomnoženi faznim faktorom (2.27). U komutativnom slučaju $\theta = 0$, divergentni članovi u perturbativnom razvoju su određeni proizvodom lokalnih polja. Fazni faktor (2.27) menja takve divergentne članove do na \star -proizvod između lokalnih polja, tako da planarne divergencije za $\theta \neq 0$ mogu da se utope u redefinisane gole parametre odgovarajuće komutativne teorije, ako je ona renormalizabilna [69]. Na osnovu ovoga se vidi da nema smisla očekivati da nekomutativne teorije imaju bolje UV ponašanje u odnosu na odgovarajuće komutativne teorije [70]. Zaključak je da planarni dijagrami ne menjaju renormalizacione osobine skalarne teorije i da su one iste kao što su bile i u odgovarajućoj komutativnoj teoriji.

2.2.2 Neplanarni Fajnmanovi dijagrami

U slučaju da se u petlju kontrahuju nesusedni impulsi, takav dijagram nije moguće nacrtati u ravni a da se takva petlja ne preseče sa nekom od linija koje se nalaze između linija koje odgovaraju kontrahovanim impulsima. Zbog toga se

ovakvi dijagrami nazivaju neplanarni, što je prikazano na slici 2. Kod ovakvih dijagrama ne važe zaključci koji su doneseni za planarne dijagrame.



Slika 2: Planarni (a) i neplanarni (b) ireducibilni dvotačkasti Fajnmanovi dijagrami sa jednom petljom u nekomutativnoj skalarnoj ϕ^4 teoriji.

Može da se pokaže [68] da je rezultat u tom slučaju dat sa

$$V_{\text{np}}(p_1, \dots, p_n) = V_{\text{p}}(p_1, \dots, p_n) \prod_{a,b} e^{-\frac{i}{2} \cap_{ab} k_a \wedge k_b}, \quad (2.28)$$

gde \cap_{ab} označava broj koliko je puta a -ta (unutrašnja ili spoljašnja) linija preseklala b -te linije, slika 2. Iz zakona održanja impulsa sledi da je \cap_{ab} jedinstveno. Članovi koji zavise od nekomutativnog parametra θ , u neplanarnom slučaju daju komplikovaniji doprinos jer zavise i od unutrašnjih impulsa. Zbog toga se može se očekivati da će doprinos ovakvih dijagrama da se bitno razlikuje u odnosu na planarni i komutativni slučaj. Zbog prisustva impulsa po kome se integrali unutar faznog faktora, može da se očekuje da će UV divergencije biti drugačije. Kada unutrašnja linija obiđe neku od linija u divergentnom dijagramu, pojavom faznog faktora koji uključuje neki od unutrašnjih impulsa, efektivna konstanta odsecanja¹ postaje $\Lambda_{\text{eff}} = \|\theta\|^{-1/2}$ što čini ovakav dijagram UV konačnim.

2.3 UV/IC mešanje

U ovom potpoglavlju biće dat eksplicitan račun planarnog i neplanarnog dijagrama kvantne korekcije propagatora na nivou jedne petlje u slučaju ϕ^{*4} nekomutativne skalarne teorije definisane u (2.23) za slučaj $D = 4$. Rezultat koji dobija predstavlja jedan zanimljiv efekat koji se javlja u nekomutativnim teorijama polja i naziva se UV/IC mešanje. Jednočestična dvotačkasta ireducibilna funkcija na

¹Konstanta odsecanja je parametar regularizacije u metodu odsecanja (cut off).

nivou jedne petlje je data sa

$$\Pi(p) = \left\langle \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) \right\rangle_{\text{1PI}} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} \Pi^{(n)}(p), \quad (2.29)$$

gde je gola dvotačkasta funkcija data sa $\Pi^{(0)}(p) = p^2 + m^2$. Na nivou jedne petlje, topološki gledano, mogu da se dobiju jedan planarni i jedan neplanarni Fajnmanov dijagram koji su prikazani na slici 2. Faktor simetrije planarnog dijagrama je dva puta veći od faktora simetrije neplanarnog dijagrama. Odgovarajući Fajnmanovi integrali su

$$\Pi_{\text{p}}^{(1)}(p) = \frac{1}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (2.30)$$

$$\Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) = \frac{1}{6} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 + m^2}. \quad (2.31)$$

Vidi se da je doprinos planarnog dijagrama (2.30) do na faktor simetrije jednak kao u komutativnom slučaju, koji je u slučaju $D = 4$ kvadratno UV divergentan². Doprinos neplanarnog dijagrama bi trebalo da bude UV konačan zbog brzih oscilacija faznog faktora $e^{ik \wedge p}$ u UV sektoru. Međutim, $k \wedge p = 0$ kada je $p_i \theta^{ij} = 0$ ili $\theta = 0$. U tom slučaju fazni faktor u izrazu (2.31) se anulira i dijagram postaje proporcionalan planarnom dijagramu (2.30) pa važi

$$\Pi_{\text{p}}^{(1)} = 2 \Pi_{\text{np}}^{(1)}(p = 0). \quad (2.32)$$

Neplanarni dijagram je singularan za male $p_i \theta^{ij}$, pa je efektivna konstanta odsecanja na nivou jedne petlje u impulsnom prostoru $1/\sqrt{|p \bullet p|}$, gde je proizvod \bullet dat kao

$$p \bullet q = -p_\mu (\theta^2)^{\mu\nu} q_\nu = q \bullet p, \quad (2.33)$$

gde je $(\theta^2)^{\mu\nu} = \delta_{\rho\sigma} \theta^{\mu\rho} \theta^{\sigma\nu}$. Dakle, za male vrednosti spoljašnjeg impulsa, nekomutativni fazni faktor ne doprinosi vrednosti dijagrama, pa neplanarni dijagram ima uobičajenu UV divergenciju. Može da se zaključi da parametar nekomutativnosti θ^{ij} pretvara standardnu UV divergenciju u IC singularnost za male vrednosti ulaznog impulsa p . Ovo mešanje ultravioletnih i infracrvenih divergencija u nekomutativnoj kvantnoj teoriji polja se zove UV/IC mešanje [69].

Za izračunavanje Fajnmanovih integrala (2.30) i (2.31), uvodi se standardna

² $\Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) = \frac{1}{48\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + O(1)$.

Švingerovaova parametrizacija

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)} . \quad (2.34)$$

Zamenom (2.34) u (2.30), (2.31) i Gausovom integracijom, dobija se

$$\Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) = \frac{1}{6(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{D/2}} e^{-\alpha m^2 - \frac{p \bullet p}{4\alpha} - \frac{1}{\Lambda^2 \alpha}} . \quad (2.35)$$

Integral (2.35) postaje

$$\Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) = \frac{m^{\frac{D-2}{2}}}{6(2\pi)^{D/2}} \left(p \bullet p + \frac{4}{\Lambda^2} \right)^{\frac{2-D}{4}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(m \sqrt{p \bullet p + \frac{4}{\Lambda^2}} \right) , \quad (2.36)$$

gde je $K_\nu(x)$ iregularna modifikovana Beselova funkcija reda ν . Ukupan renormalizovani propagator na nivou jedne petlje je dat sa

$$\Pi(p) = p^2 + m^2 + 2g^2 \Pi_{\text{np}}^{(1)}(0) + g^2 \Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) + O(g^4) \quad (2.37)$$

gde je iskorišteno (2.32).

Sada treba analizirati vodeću divergenciju funkcije (2.37) za slučaj kada je $D = 4$. U asimptotskom razvoju se dobija $K_\nu(x) \simeq 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) x^{-\nu} + \dots$ za $x \rightarrow 0$ i $\nu \neq 0$. Razvojem (2.36) u stepeni red po $\frac{1}{\Lambda^2}$ dobija se vodeći singularni doprinos

$$\Pi_{\text{np}}^{(1)}(p) = \frac{1}{96\pi^2} \left(\Lambda_{\text{eff}}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\text{eff}}^2}{m^2} \right) + O(1) , \quad (2.38)$$

gde je efektivna konstanta odsecanja data kao

$$\Lambda_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + p \bullet p} . \quad (2.39)$$

U limesu $\Lambda \rightarrow \infty$, neplanarni dijagram sa jednom petljom (2.38) postaje konačan, jer je efektivno regularizovan nekomutativnim doprinosom $\Lambda_{\text{eff}}^2 \rightarrow \frac{1}{p \bullet p}$ za $\Lambda \rightarrow \infty$. Prisustvo UV divergencije se vidi u komutativnom limesu $\theta \rightarrow 0$ ili u IC limesu $p \rightarrow 0$, kada je $\Lambda_{\text{eff}} \simeq \Lambda$ i kada se dobija standardna renormalizacija mase u ϕ^4 skalarnoj teoriji u $D = 4$ [71]

$$m_{\text{ren}}^2 = m^2 + \frac{1}{32} \frac{g^2 \Lambda^2}{\pi^2} - \frac{1}{32} \frac{g^2 m^2}{\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + O(g^4) . \quad (2.40)$$

Sa druge strane, u UV limesu $\Lambda \rightarrow \infty$, važi $\Lambda_{\text{eff}}^2 \simeq \frac{1}{p \bullet p}$ i modifikovani propagator postaje komplikovaniji, pa se zbog nelokalnih članova ne može povezati ni na koji način sa renormalizacijom mase. Takav renormalizovani propagator ima i pol za multi spoljašnji impuls i logaritamsku singularnost $\ln(p \bullet p)$. Iz ove analize se vidi da limesi $\Lambda \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$ ne komutiraju, kao i da nekomutativna kvantna teorija polja poseduje mešanje UV divergencije ($\Lambda \rightarrow \infty$) i IC divergencije ($p \rightarrow 0$). Na nivou jedne petlje ovo ne predstavlja veliki problem, međutim kada ovakvi dijagrami postanu deo nekog većeg dijagrama, tada čestica impulsa p postaje virtuelna. Integracijom po tom impulsu u IC sektoru se proizvede divergenciju u narednoj petlji u UV sektoru, što je zapravo mešanje UV i IC divergencija. Nekomutativnost dovodi do neočekivanih pojava: efekti na malim rastojanjima uslovljeni su pojavama na velikim rastojanjima. U standardnoj komutativnoj kvantnoj teoriji polja ništa slično ne postoji.

2.4 Lokalnost, unitarnost i renormalizabilnost u kvantnim nekomutativnim teorijama

Polazeći od komutacionih relacija (2.2) ili njihove \star -proizvod reprezentacije

$$[x^\mu \star x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

uočeno je da pojam tačke gubi smisao, a samim tim i pojam lokalnosti nije dobro definisan. Naime, \star -proizvod ravnih talasa

$$e^{ipx} \star e^{ikx} = e^{i(p+k)x} e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu p_\nu} \quad (2.42)$$

ima i član koji zavisi samo od impulsa. Množenje funkcija ravnim talasima zapravo predstavlja translaciju, što daje

$$e^{ik \cdot x} \star \phi(x) \star e^{-ikx} = e^{-\theta^{\mu\nu}k_\mu \partial_\nu} \phi(x) = \phi(x^\mu - \theta^{\mu\nu}k_\nu). \quad (2.43)$$

Očigledno je da se nelokalnost povećava sa porastom impulsa, ali u pravcu ortogonalnom na lokalnu koordinatu. Ovakva nelokalnost je odgovorna za pojavu nelokalnih članova u renormalizovanom dejstvu [72]. Kod efektivnih teorija, u konačnom razvoju \star -proizvoda po parametru nekomutativnosti θ , javlja se konačan broj impulsa i takve teorije su dobro lokalizovane.

Za dobru fizičku teoriju je važno da S matrica u procesu rasejanja bude unitarna. U nekomutativnim teorijama, to je ispunjeno samo u slučaju prostorno-

prostorne nekomutativnosti $\theta^{ij} \neq 0$, dok je unitarnost S matrice u slučaju prostorono-vremenske nekomutativnosti narušena. Koristeći standardnu kovarijantnu teoriju perturbacija, pravila presecanja (cutting rules) su narušena jer vreme ne komutira sa prostornim koordinatama [73, 74]. Problem nastaje zbog vremenskog uređenja, koje bi trebalo da se redefiniše da bi se problem unitarnosti prevazišao. U tu svrhu je razvijen formalizam vremenskog uređenja interakcije u tački (Interacting Point Time Ordering), uz pomoć koga je moguća konstrukcija unitarne kvantne teorije skalarnog polja [75, 76]. U slučaju gradijentnih teorija, još uvek nije konstruisana unitarna nekomutativna teorija jer redefinisano vremensko uređenje narušava Vordove (Ward) identitete.

Ideja o nekomutativnoj geometriji se javila da bi se otklonile, ili ublažile UV divergencije. Zbog prisustva nelokalnosti u nekomutativnoj teoriji se javljaju neplnarni dijagrami koji su odgovorni za UV/IC mešanje. Ovakvo mešanje čini teoriju nerenormalizabilnom na nivou od dve petlje i više. Da bi se UV/IC mešanje otklonilo iz teorije, Grose i Vulkenhar (Grosse, Wulkenhaar) su u radovima [77, 31, 78] predložili model koji narušava translacionu invarijantnost

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_\mu \phi) \star (x^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right), \quad (2.44)$$

gde je Ω konstanta. Ovo dejstvo poseduje dualnost koja povezuje koordinatni i impulsni deo prostora. Naime, dejstvo je invarijantno na transformaciju $x \leftrightarrow p$ koja se naziva Langman-Sabova dualnost [79]. Ova dualnost zapravo omogućava da se UV i IC divergencije ponište i da teorija bude renormalizabilna. Ovaj rezultat je u saglasnosti sa tvrdjenjem da je UV/IC mešanje prisutno u nekomutativnim teorijama koje poseduju translacionu invarijantnost [30]. Međutim u [80] je pokazano da je moguće izbeći UV/IC mešanje i u teorijama sa translacionom invarijantnošću, ali uz dodavanje nelokalnih članova u dejstvu.

Još uvek nije konstruisana nekomutativna gradijentna teorija koja ima očekivana svojstva. Jedan model predviđa da se Grose-Vulkenharov model uopšti tako što se uvede kovarijantna koordinata, nakon čega se integrali po skalarnom polju ϕ da bi se ono eliminisalo iz teorije [81]. Nedostatak ovakve teorije je to što je ona nelinearna i ima netrivialne vakuume, što otežava računanje kvantnih korekcija. Alternativa ovom gradijentno invarijantnom pristupu [82] je da se konstruiše teorija koja nije gradijentno invarijantna, pa se invarijantnost postiže uvođenjem duhova u teoriju. Oscilatorni član koji narušava translacionu invarijantnost u Grose-Vulkenharovom modelu može da se interpretira kao interakcija skalarnog polja sa krivinom prostora $\Omega(x\phi)^2 \sim R\phi^2$ [83]. Formulacija gradijentnih teorija na

takvoj geometriji Grose-Vulkenharovog modela je urađena u [84].

3 Tvist formalizam

Simetrije su veoma značajne u fizici. U teoriji polja, simetrije su najčešće opisane formalizmom Lijeve (Lie) algebre i Lijeve grupa. Hopfove algebre predstavljaju proširenje Lijeve algebre. Značaj Hopfovih algebre je primećen četrdesetih godina XX veka [85]. Uvođenjem pojma univerzalne R -matrice, Hopfova algebra postaje kvantna grupa. Intenzivno proučavanje kvantnih grupa počinje 1980-ih godina [86, 87, 88, 89, 90]. One su se pokazale kao veoma bitan formalizam u proučavanju metoda inverznog rasejanja u integrabilnim sistemima [91]. Kvantne grupe se mogu videti kao grupe simetrije nekomutativnih prostora, što je takođe jedan od razloga zašto se proučavaju u fizici i matematičkoj fizici.

Hopfova algebra se može konzistentno deformisati pomoću Drinfeldovog (Drinfeld) tvista [87]. Tvist formalizam je jedan od načina da se uvede nekomutativni prostor i nekomutativna algebra [11]. Ideja formalizma je da se prvo tvistom [92, 93, 94] deformiše Hopfova algebra simetrije teorije, a da se zatim razmotre posledice te deformacije na sami prostor. U ovom poglavlju će prvo biti uveden pojam Hopfove algebre. Zatim će biti definisan Drinfeldov tvist i biće opisano kako se pomoću njega konzistentno konstruiše nekomutativan prostor i odgovarajući diferencijalni račun. Na kraju će biti razmotrena dva primera: Mojalov nekomutativni prostor i κ -Minkovski prostor.

3.1 Hopfove algebre

3.1.1 Hopfove algebre kao funkcije na grupi

Neka je G proizvoljna grupa i $\xi(G)$ algebra svih kompleksnih funkcija na G sa tačkastim proizvodom. Na osnovu toga, mogu da se definišu sledeća preslikavanja:

- koproizvod $\Delta: \xi(G) \rightarrow \xi(G \times G)$ kao $(\Delta(f))(g_1, g_2) := f(g_1 g_2)$,
- kojedinica $\epsilon: \xi(G) \rightarrow \mathbb{C}$ kao $\epsilon(f) := f(e)$ gde je e jedinični element grupe G ,

- antipod $S: \xi(G) \rightarrow \xi(G)$ kao $(S(f))(g) := f(g^{-1})$.

Iz prethodnih definicija, jasno se vidi da su ϵ i Δ homomorfizmi algebre.

Iz definicija za preslikavanja Δ, ϵ i S može da se izvede sledeći zaključak u vezi sa asocijativnošću množenja u grupi

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \quad (3.1)$$

gde je id jedinično preslikavanje na $\xi(G)$. Relacija (3.1) sledi direktno iz definicije za Δ

$$\begin{aligned} (((\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta)f)(g_1, g_2, g_3) &= f((g_1 g_2) g_3) \in \xi(G \times G \times G), \\ (((\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)f)(g_1, g_2, g_3) &= f(g_1 (g_2 g_3)) \in \xi(G \times G \times G). \end{aligned}$$

Pošto je množenje u grupi asocijativno, relacija (3.1) je automatski ispunjena. Iz dejstva jediničnog elementa na ostale elemente iz grupe $ge = eg = g$ se dobija

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \text{id}. \quad (3.2)$$

Takođe, mogu da se definišu preslikavanja $\mu: \xi(G \times G) \rightarrow \xi(G)$ kao $(\mu h)(g) := h(g, g)$, $h \in \xi(G \times G)$ i linearno preslikavanje $\eta: \mathbb{C} \rightarrow \xi(G)$ takvo da je $\eta(1)$ jedinični element algebre $\xi(G)$. Tada iz relacija $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ sledi

$$\mu \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta. \quad (3.3)$$

Sumirajući prethodno, vidi se da grupno množenje, jedinični i inverzni element grupe G indukuju preslikavanja Δ, ϵ i S funkcija na G tako da su aksiomi grupe izraženi preko relacija (3.1), (3.2) i (3.3).

Jedan od nedostataka je to što se algebra funkcija $\xi(G \times G)$ pojavljuje u definiciji preslikavanja Δ i μ . Da bi se radilo sa funkcijama na samom G , treba razmotriti tenzorski proizvod $\xi(G) \otimes \xi(G)$ kao linearni potprostor prostora $\xi(G \times G)$ gde se $f_1 \otimes f_2 \in \xi(G) \otimes \xi(G)$ identifikuje sa funkcijom $(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) := f_1(g_1)f_2(g_2)$ na $G \times G$. Na osnovu toga sledi da je $\mu(f_1 \otimes f_2)(g) = f_1(g)f_2(g)$. Iz ovoga sledi da je $\mu(f_1 \otimes f_2)$ proizvod $f_1 f_2$ funkcija f_1 i f_2 u algebri $\xi(G)$. Nakon konstruisanja $\xi(G) \otimes \xi(G) \subseteq \xi(G \times G)$ preostaje još jedna poteškoća: Δ ne preslikava $\xi(G)$ na $\xi(G) \otimes \xi(G)$ u opštem slučaju. Odgovarajuća podalgebra \mathcal{A} algebre ξ za koju je $\Delta(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ i $S(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ zajedno sa linearnim preslikavanjima $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\epsilon: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ i $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ koja zadovoljava uslove (3.1)-(3.3) zajedno sa uslovima da

su Δ i ϵ homomorfizmi algebre zove se Hopfova algebra.

3.1.2 Algebre

Asocijativna algebra je vektorski prostor \mathcal{A} nad komutativnim prstenom \mathbb{K} sa preslikavanjem $(a, b) \rightarrow ab$ iz $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ takvim da važi

$$\begin{aligned} a(bc) &= (ab)c, & (a+b)c &= ac + bc, \\ a(b+c) &= ab + ac, & \alpha(ab) &= (\alpha a)b = a(\alpha b), \end{aligned} \quad (3.4)$$

za svako $a, b \in \mathcal{A}$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Element 1 se naziva jedinični element algebre \mathcal{A} ako važi $1a = a1 = a$ za svako $a \in \mathcal{A}$ i jedinstven je u algebri.

Definicija 3.1. Asocijativna algebra sa jedinicom je vektorski prostor \mathcal{A} nad \mathbb{K} zajedno sa linearnim preslikavanjima $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, koje se zove množenje ili proizvod i $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ koje se zove jedinica, takvim da važi

$$\mu \circ (\mu \circ \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \circ \mu), \quad (3.5)$$

$$\mu \circ (\eta \circ \text{id}) = \text{id} = \mu \circ (\text{id} \circ \eta). \quad (3.6)$$

Asocijativnost množenja (3.5) znači da je dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \downarrow \text{id} \otimes \mu & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array}$$

komutativan. Na isti način, jedinica može da bude predstavljena preko komutativnosti dijagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \mu & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \iff & \mathcal{A} & \iff & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K}. \end{array}$$

3.1.3 Koalgebre

Sada definicija 3.1 može da se dualizuje tako što će se u dijagramima zameniti smer strelica, a odgovarajuća preslikavanja će se zameniti njihovim dualnim. Na taj način se proizvod $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ zamenjuje sa koproizvodom $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, jedinica $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ sa kojedinicom $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$. Odgovarajući komutativni dijagrami su

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \\ \uparrow \text{id} & & \uparrow \Delta & & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \iff & \mathcal{A} & \iff & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \end{array}$$

Definicija 3.2. Koalgebra \mathcal{A} je vektorski prostor nad \mathbb{K} sa dva linearna preslikavanja $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ koje se zove koproizvod i $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ koje se zove kojedinica, tako da važi

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \quad (3.7)$$

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta. \quad (3.8)$$

Jednačina (3.7) odgovara koasocijativnosti koproizvoda Δ .

Ovde može da se uvede tzv. Svidlerova (Sweedler) notacija. U Svidlerovoj notaciji koproizvod može da se predstavi kao konačna suma

$$\Delta(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i} = a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \quad (3.9)$$

gde je $a \in \mathcal{A}$, dok kojedinica može da se predstavi kao

$$\epsilon(a_{(1)})a_{(2)} = a_{(1)}\epsilon(a_{(2)}). \quad (3.10)$$

Ako je \mathcal{A} koalgebra i \mathcal{B} algebra, onda je vektorski prostor $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ svih \mathbb{K} -

linearnih preslikavanja iz \mathcal{A} u \mathcal{B} sa konvolucijom

$$(f * g)(a) := (\mu_{\mathcal{B}} \circ (f \otimes g) \Delta_{\mathcal{A}})(a), \quad f, g \in \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{A} = \sum f(a_1)g(a_2), \quad (3.11)$$

algebra sa jedinicom $\eta_{\mathcal{B}} \circ \epsilon_{\mathcal{A}}$ [52].

3.1.4 Bialgebre

Bialgebra je algebra i koalgebra gde su obe strukture kompatibilne. To jest, ako je \mathcal{A} vektorski prostor koji je algebra i koalgebra, sledeća dva tvrđenja su ekvivalentna

- $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ i $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ su homomorfizmi algebre.
- $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ i $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ su homomorfizmi algebre.

Definicija 3.3. Bialgebra je vektorski prostor koji je algebra i koalgebra za koji važe prethodna tvrđenja. To znači da ako je \mathcal{A} algebra i koalgebra, to je i bialgebra ako za svako $a, b \in \mathcal{A}$ važi

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b), \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \epsilon(1) = 1. \quad (3.12)$$

3.1.5 Hopfove algebre

Definicija 3.4. Bialgebra \mathcal{A} se zove Hopfova algebra ako u njoj postoji linearno preslikavanje $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, koje se zove antipod ili koinverz od \mathcal{A} , takvo da je

$$\mu \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta, \quad (3.13)$$

što u Svidlerovoj notaciji izgleda kao

$$S(a_{(1)})a_{(2)} = \epsilon(a)1 = a_{(1)}S(a_{(2)}). \quad (3.14)$$

Jednačina (3.13) je zapravo uslov da je dijagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \downarrow \text{id} \otimes S & & \downarrow \eta \circ \epsilon & & \downarrow S \otimes \text{id} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} & \xleftarrow{\mu} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \end{array}$$

komutativan. Može se pokazati da važi

$$S(a_{(1)}a_{(2)}) = S(a_{(2)})S(a_{(1)}), \quad S(1) = 1, \quad \epsilon(S(a)) = \epsilon(a), \quad a \in \mathcal{A}. \quad (3.15)$$

Primer 1. Univerzalno obavijajuća algebra $U(g)$. Neka je g Lijeva grupa nad \mathbb{K} sa Lijevim proizvodom $[\cdot, \cdot]$. Univerzalno obavijajuća algebra $U(g)$ je definirana kao kvocijentna (faktor) algebra tenzorske algebra $\mathcal{T}(g)$ vektorskog prostora g idealom \mathcal{I} generisanim elementima $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, gde su $x, y \in g$. Po svojoj definiciji, algebra $U(g)$ ispunjava sledeće svojstvo: za dato linearno preslikavanje $\varphi : g \rightarrow \mathcal{A}$, gde je \mathcal{A} proizvoljna algebra, koje zadovoljava

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x), \quad x, y \in g, \quad (3.16)$$

postoji jedinstven homomorfizam algebr $\tilde{\varphi} : U(g) \rightarrow \mathcal{A}$ takav da je $\tilde{\varphi} = \varphi$ za $x \in g$. Ovo će da se iskoristi za dokazivanje sledeće tvrdnje: postoji jedinstvena Hopfova algebra algebre $U(g)$ takva da važi

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x, \quad x \in g. \quad (3.17)$$

Ako se definišu linearna preslikavanja $\varphi = \{\Delta, \epsilon, S\}$ iz g u algebru $\mathcal{A} = \{U(g), \mathbb{K}, U(g)\}$ uslov (3.16) je zadovoljen za Δ, ϵ i S [52].

3.1.6 Kocikli i kolanci

Delovanje koproduka Δ na bialgebru \mathcal{A} se može proširiti da deluje i na $\mathcal{A}^{\otimes n}$ kao

$$\Delta : \mathcal{A}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes n+1}, \quad \Delta_i = \underbrace{\text{id} \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}}_{i-1} \otimes \Delta \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}}_{n-i}. \quad (3.18)$$

Prethodna definicija može da se dopuni i za slučajeve

$$\Delta_0 a = a \otimes \text{id}, \quad \Delta_{n+1} a = \text{id} \otimes a, \quad (3.19)$$

gde $a \in \mathcal{A}^{\otimes n}$.

Definicija 3.5. n -kolanac ξ je proizvoljni invertibilni element iz $\mathcal{A}^{\otimes n}$, gde je njegova

granica $\partial\xi$ invertibilni element iz $\mathcal{A}^{\otimes n+1}$ zadata sa

$$\partial\xi = \left(\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \Delta_{2i}\xi \right) \left(\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta_{2i+1}\xi^{-1} \right). \quad (3.20)$$

n -kolanac za koji je ispunjeno da je $\partial\xi = 1$ zove se n -kocikl bialgebre \mathcal{A} . Kada za neki kolanac ili kocikl ξ važi da je $\epsilon_i\xi = 1$ za svako

$$\epsilon_i = \underbrace{\text{id} \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}}_{i-1} \otimes \epsilon \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}}_{n-i}, \quad (3.21)$$

takav kolanac ili kocikl se naziva kojediničnim.

Pri tvistovanju Hopfovih algebri, značajnu ulogu će imati samo 1-kocikli i 2-kocikli, pa će se posebna pažnja obratiti na njih. Primenom definicije 3.5 za $n = 1$ dobija se da je ξ 1-kocikl ako važi $\Delta\xi = \xi \otimes \xi$. Trivijalno se vidi da je 1-kocikl uvek kojediničan. U slučaju kada je $n = 2$ važi da je ξ 2-kocikl ako važi:

$$(1 \otimes \xi)(\text{id} \otimes \Delta)\xi = (\xi \otimes 1)(\Delta \otimes \text{id})\xi. \quad (3.22)$$

ξ je kojediničan 2-kocikl ako važi

$$(\epsilon \otimes \text{id}) = 1 = (\text{id} \otimes \epsilon). \quad (3.23)$$

Teorema 1. (Drinfeldova teorema) Neka je \mathcal{A} Hopfova algebra i ξ kojediničan 2-kocikl. Tada postoji nova Hopfova algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ koja ima nepromenjenju jedinicu, kojedinicu i algebarsko množenje, ali ima deformisan (tvistovan) koprodukt i anti-pod na sledeći način:

$$\Delta_{\mathcal{F}}a = \xi\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad S_{\mathcal{F}}(a) = U(S_{\mathcal{A}}(a))U^{-1}, \quad (3.24)$$

gde je $a \in \mathcal{A}$, a $U = \cdot(\text{id} \otimes S)\mathcal{F}$ invertibilni element iz \mathcal{A} . Tada se 2-kocikl \mathcal{F} naziva tvist.

3.2 Tvist

Pošto je u prethodnom odeljku definisan tvist, u ovom delu će biti date osnovne ideje na koji način se vrši deformacija Hopfovih algebri i drugih struktura koje su definisane na datoj Hopfovoj algebri. Za potrebe nekomutativne geometrije u ovom radu će fokus biti na tenzorskom proizvodu univerzalno obavijajućih algebri $U(g) \otimes$

$U(g)$. U primeru 1 je viđeno da univerzalno obavijajuća algebra ima strukturu Hopfove algebre sa sledećim relacijama:

$$\begin{aligned} [t^a, t^b] &= if_c^{ab} t^c, \\ \Delta(t^a) &= t^a \otimes 1 + 1 \otimes t^a, \\ \epsilon(t^a) &= 0, \quad S(t^a) = -t^a. \end{aligned} \tag{3.25}$$

U prvom redu je definisana algebra g , sa generatorima t^a i strukturnim konstantama f_c^{ab} . U drugom redu je definisan koproizvod, koji određuje Lajbnicovo pravilo i definiše kako generatori t^a deluju na proizvod dve reprezentacije. U poslednjem redu su definisani kojedinica i antipod. Deformacija koproizvoda tvistom (3.24) dovodi do deformacije Lajbnicovog (Leibnitz) pravila, to jest menja se način delovanja simetrije na proizvod reprezentacija. Prednost tvist formalizma se ogleda u tome što se tvistom mogu deformisati proizvoljne algebre definisane na proizvoljnim prostorima.

3.2.1 Deformacija tvistom

Za potrebe tvist formalizma ne toliko važna osobina, ali za potrebe nekomutativne geometrija veoma važna osobina je perturbativni razvoj

$$\mathcal{F} = 1 \otimes 1 + \mathcal{O}(\theta), \tag{3.26}$$

gde je u tom slučaju θ mali parametar. Ovo je zapravo razvoj oko nedeformisanog slučaja. Često se koristi sledeća notacija

$$\mathcal{F} = f^\alpha \otimes f_\alpha, \quad \mathcal{F}^{-1} = \bar{f}^\alpha \otimes \bar{f}_\alpha, \tag{3.27}$$

gde se podrazumeva suma po $\alpha = 1, 2, \dots$. Za svako α , f^α i f_α su dva različita elementa iz univerzalno obavijajuće algebre $U(g)$ (isto važi i za \bar{f}^α i \bar{f}_α).

Takođe može da se uvede i univerzalna \mathcal{R} matrica kao

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21} \mathcal{F}^{-1}, \tag{3.28}$$

gde je $\mathcal{F}_{21} = f_\alpha \otimes f^\alpha$, a indeksi 1 i 2 su prilagođeni Svidlerovoj notaciji ($\mathcal{F} = \mathcal{F}_{12} = f^\alpha \otimes f_\alpha$). Na osnovu datih definicija koristi se notacija

$$\mathcal{R} = R^\alpha \otimes R_\alpha, \quad \mathcal{R}^{-1} = \bar{R}^\alpha \otimes \bar{R}_\alpha. \tag{3.29}$$

Hopfova algebra je triangularna ako važi $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}^{-1}$.

Kada algebra \mathcal{A} nosi reprezentaciju Hopfove algebre $Uvec(\mathcal{M})$ nad nekim vektorskim prostorom nad nekoj mnogostrukosti \mathcal{M} , gde $u \in vec(\mathcal{M})$ deluje na elemente algebre \mathcal{A} preko izvoda (mora da važi Lajbnicovo pravilo), tada je \mathcal{A} modularna algebra algebre $Uvec(\mathcal{M})$. Deformacija množenja \cdot u $\mathcal{A} \star$: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,

$$c \star d = \bar{f}^\alpha(c) \cdot \bar{f}_\alpha(d), \quad (3.30)$$

za $c, d \in \mathcal{A}$, tada pravi nekomutativnu algebru \mathcal{A}_\star koja nosi reprezentaciju deformisane Hopfove algebre $Uvec^{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$, gde je

$$\zeta(c \star d) = \zeta_1(c) \star \zeta_2(d) \quad (3.31)$$

za svako $\zeta \in Uvec^{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$ i svako $c, d \in \mathcal{A}$.

Prilično opšta definicija Drinfeldovog tvista, koja će se koristiti u ovom radu bazira se na algebri vektorskih polja na mnogostrukosti \mathcal{M} . Twist \mathcal{F} i njegov inverz \mathcal{F}^{-1} definisani su sa

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= e^{-\frac{i}{2}\theta^{AB}X_A \otimes X_B}, \\ \mathcal{F}^{-1} &= e^{\frac{i}{2}\theta^{AB}X_A \otimes X_B}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

gde je θ^{AB} konstantna matrica, a X_A i X_B su vektorska polja u određenoj reprezentaciji. Kada polja X_A i X_B međusobno komutiraju, takav twist se naziva Abelov twist i $A, B = 1 \dots p$, $p \leq d$. Dejstvo odgovarajućeg vektorskog polja je definisano Lijevim izvodom duž tog vektorskog polja. Abelov twist nije jedina mogućnost pri izboru tvista. Ako je twist zadat kao $\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}H \otimes \ln(1+\lambda E)}$ gde vektorska polja H i E zadovoljavaju $[H, E] = 2E$, on se naziva Žordanov (Jordan) twist. Moguće je definisati \star -proizvod i za druge algebre, gde generatori X_A i X_B treba da budu u reprezentaciji koja je adaptirana za dejstvo na elemente date algebre.

Deformisanjem algebre $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ beskonačno diferencijabilnih funkcija definisanih na prostoru \mathcal{M} sa običnim tačkastim proizvodom može da se dobije $\mathbf{C}_\star^\infty(\mathcal{M})$ sa \star -proizvodom kao

$$f \star g = \mu \circ \mathcal{F}^{-1}(f \otimes g) = \bar{f}^\alpha(f) \bar{f}_\alpha(g) = \bar{R}^\alpha(g) \star \bar{R}_\alpha(f). \quad (3.33)$$

Vidi se da \mathcal{R} matrica govori o nekomutativnosti \star -proizvoda.

\star -proizvod između funkcija i diferencijalnih formi se definiše kao

$$f \star \omega = \bar{f}^\alpha(f) \bar{f}_\alpha(\omega) = \bar{R}^\alpha(\omega) \star \bar{R}_\alpha(f), \quad (3.34)$$

gde je dejstvo operatora \bar{f}_α opet zadato preko Lijeovog izvoda.

Diferencijalne forme formiraju algebru sa kosim proizvodom $\wedge : \Omega^\star \times \Omega^\star \rightarrow \Omega^\star$. Kosi proizvod dve proizvoljne forme ω i ω' se \star -deformiše u \wedge_\star -proizvod kao

$$\omega \wedge_\star \omega' = \wedge \mathcal{F}^{-1}(\omega \otimes \omega') = \bar{f}^\alpha(\omega) \wedge \bar{f}_\alpha(\omega'). \quad (3.35)$$

Prostor Ω^\star označava linearni prostor diferencijalnih formi koji je opremljen \wedge_\star -proizvodom. Diferencijalne forme iz Ω^\star su totalno \star -antisimetrična tenzorska polja. Na primer, 2 forma $\omega \wedge_\star \omega'$ je \star -antisimetrična kombinacija

$$\begin{aligned} \omega \wedge_\star \omega' &= \bar{f}^\alpha(\omega) \wedge \bar{f}_\alpha(\omega') \\ &= \omega \otimes_\star \omega' - \bar{R}^\alpha(\omega) \otimes_\star \bar{R}_\alpha(\omega') \\ &= -\bar{R}^\alpha(\omega') \wedge_\star \bar{R}_\alpha(\omega), \end{aligned} \quad (3.36)$$

gde je \star -tenzorski proizvod definisan kao

$$T_1 \otimes_\star T_2 = \bar{f}^\alpha(T_1) \otimes \bar{f}_\alpha(T_2). \quad (3.37)$$

Proizvod funkcije i vektorskog polja može da se deformiše na sličan način, pa se dobija

$$f \star u = \bar{f}^\alpha(f) \cdot \bar{f}_\alpha(u) \quad (3.38)$$

gde $f \in \text{Fun}(\mathcal{M})$ i $u \in \text{vec}(\mathcal{M})$. Pošto parcijalni izvodi deluju na vektorska polja preko Lijeovog izvoda, treba videti kako se deformiše Lijeov izvod. Deformacija Lijeovog izvoda duž vektorskog polja u je data kao

$$\mathcal{L}_u^\star(h) = \mathcal{L}_{\bar{f}^\alpha(u)} \bar{f}_\alpha(h). \quad (3.39)$$

Diferencijalni operator \mathcal{L}_u^\star zadovoljava deformisano Lajbnicovo pravilo

$$\mathcal{L}_u^\star(f \star g) = \mathcal{L}_u^\star(f) \star g + \bar{R}^\alpha(f) \star \mathcal{L}_{\bar{R}_\alpha(u)}^\star(g), \quad (3.40)$$

gde su $f, g \in \mathbf{C}_\star^\infty(\mathcal{M})$. Pojava R -matrice je posledica izmene redosleda f i vektorskog polja u .

Uobičajen spoljašnji proizvod $d : \mathcal{A} \rightarrow \Omega$ zadovoljava Lajbnicovo pravilo $d(f \star$

$g) = df \star g + f \star dg$ je u isto vreme i \star -spoljašnji proizvod. Ovo tvrđenje se može zapisati u koordinatnom bazisu kao

$$df = (\partial_\mu f) dx^\mu = (\partial_\mu^\star f) \star dx^\mu, \quad (3.41)$$

gde je ∂_μ^\star definisan prethodnom jednačinom (3.41).

Uobičajen integral je cikličam pod \star -kosim proizvodima formi, što se do na površinske članove svodi na

$$\int \omega_1 \wedge_\star \cdots \wedge_\star \omega_n = (-1)^{d_1 \cdots d_n} \int \omega_2 \wedge_\star \cdots \wedge_\star \omega_n \wedge_\star \omega_1. \quad (3.42)$$

U specijalnom slučaju dve forme:

$$\int \omega_1 \wedge_\star \omega_2 = (-1)^{d_1 \cdot d_2} \int \omega_2 \wedge_\star \omega_1, \quad (3.43)$$

gde je $d_i = \text{deg}(\omega_i)$ i $d_1 + d_2 = d$ a d je dimenzija prostora. Ova osobina važi za bilo koji tvist koji ispunjava uslov $S(\bar{f}^\alpha) \bar{f}_\alpha$ [54].

3.3 Primeri deformacija

3.3.1 Mojalov nekomutativni prostor

Najviše korišten \star -proizvod u nekomutativnoj teoriji polja je Mojal-Vajlov (Moyal-Weyl) proizvod koji definiše konstantnu nekomutativnost. Tvist koji definiše takvu nekomutativnost se može zadati kao

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu}, \quad (3.44)$$

gde su ∂_μ generatori translacija iz odgovarajuće Poenkareove algebre. Ovaj tvist za posledicu ima

$$[x^\mu \star x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

gde je \star -proizvod definisan kao (3.33) što se može pročitati u [53]. Tvist (3.44) zadovoljava uslove (3.1), (3.2) i (3.26). Vektorska polja ∂_μ su iz Poenkareove algebre, pa Poenkareova algebra ne treba da se proširuje. Inverz tvista (3.44) definiše \star -proizvod u Mojalovom prostoru vremenu

$$f \star g = \mu_\star \{f \otimes g\} = \mu \{ \mathcal{F}^{-1} f \otimes g \} = \mu \{ e^{\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu} f \otimes g \} \quad (3.46)$$

$$= f \cdot g + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} (\partial_\mu f) \partial_\nu g - \frac{1}{8} \theta^{\mu\nu} \theta^{\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho f) \partial_\nu \partial_\sigma g + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Ovaj \star -proizvod je asocijativan, hermitski i nekomutativan. Komutacione relacije (3.45) su posledica ovakvog \star -proizvoda.

Formalizam koji je prikazan u delu 3.2.1 će biti primenjen na slučaj Mojalove deformacije date u ovom delu. Spoljašnji izvod zadovoljava

$$\begin{aligned} d(f \star g) &= df \star g + f \star dg, \\ d^2 &= 0, \\ df &= (\partial_\mu f) dx^\mu = (\partial_\mu^\star f) \star dx^\mu. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Bazisne 1-forme su dx^μ . Pošto vektorska polja deluju na forme preko Lijevo izvoda duž tih polja, dobija se

$$X_\mu(dx^\rho) = 0, \quad (3.48)$$

Kao posledica relacija (3.48), dobiju se sledeće relacije:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge_\star dx^\nu &= dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu = -dx^\nu \wedge_\star dx^\mu, \\ f \star dx^\mu &= dx^\mu \star f = f dx^\mu. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Antikomutator između dve proizvoljne 1-forme $\omega_1 = \omega_{1\mu} \star dx^\mu$ i $\omega_2 = \omega_{2\mu} \star dx^\mu$ je različit od nule

$$\omega_1 \wedge_\star \omega_2 = -\bar{R}^\alpha(\omega_2) \wedge_\star \bar{R}_\alpha(\omega_1). \quad (3.50)$$

\star -izvodi koji slede iz (3.47) dati su kao

$$\partial_\mu^\star = \partial_\mu. \quad (3.51)$$

Integral maksimalne forme je cikličan

$$\int \omega_1 \wedge_\star \omega_2 = (-1)^{d_1 \cdot d_2} \int \omega_2 \wedge_\star \omega_1, \quad (3.52)$$

gde je $d_1 + d_2 = 4$. Pošto bazisne 1-forme antikomutiraju, bazisna maksimalna forma je nedeformisana

$$d_\star^4 x := dx^0 \wedge_\star dx^1 \wedge_\star \dots \wedge_\star dx^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^3 = d^4 x. \quad (3.53)$$

Specijalno, u Mojalovom nekomutativnom prostoru važi

$$\int d^4x f \star g = \int d^4x g \star f = \int d^4x f \cdot g. \quad (3.54)$$

Na Mojalovom nekomutativnom prostoru je analizirana kvantna teorija polja skalarnih [31], fermionskih [95] i gradijentnih polja [96]. Korištenjem Sajberg-Vitenovog preslikavanja je formulisan nekomutativni standardni model [97] i analizirani su neki novi procesi unutar njega [98]. Nekomutativna teorija gravitacije je konstruisana u [99, 100].

3.3.2 κ -Minkovski prostor

Drugi važan primer nekomutativnog prostora je κ -Minkovski prostor. Ovaj prostor se dobija deformacijom i dimenzionom redukcijom q -*AdS* prostora [101, 102]. To je bio prvi nekomutativni prostor sa dobro definisanom simetrijom, koja je κ -Poenkare kvantna simetrija. κ -Minkovski prostor je modul κ -Poenkare Hopfove algebre.

κ -Minkovski se može definisati sledećim tvistom

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{ia}{2}(\partial_t \otimes x^j \partial_j - x^j \partial_j \otimes \partial_t)}, \quad (3.55)$$

gde je a mali parametar nekomutativnosti. Komutacione relacije između koordinata su date sa

$$[x^0 \star x^j] = x^0 \star x^j - x^j \star x^0 = iax^j, \quad [x^i \star x^j] = 0, \quad (3.56)$$

što može da se zapiše i u kompaktnijem obliku kao

$$[x^\mu \star x^\nu] = iC_\rho^{\mu\nu} x^\rho, \quad \mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3, \quad (3.57)$$

gde je

$$C_\rho^{\mu\nu} = a(\delta_0^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_0^\nu \delta_\rho^\mu). \quad (3.58)$$

Vidi se da je ovo primer nekomutativnosti tipa Lijeve algebre [55]. Grčki indeksi odgovaraju prostorvremenskim indeksima, dok latinski indeksi odgovaraju samo prostornom delu prostorvremena. Tvist (3.55) zadovoljava uslove (3.1), (3.2) i (3.26). Vektorsko polje X_2 nije iz univerzalno obavijajuće Poenkareove algebre, pa Poenkareova algebra mora da se proširi do $igl(1, 3)$. Inverz tvista (3.55) definiše

\star -proizvod u κ -Minkovski prostorvremenu kao

$$\begin{aligned} f \star g &= \mu_\star \{f \otimes g\} \\ &= \mu \{ \mathcal{F}^{-1} f \otimes g \} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} &= \mu \{ e^{\frac{ia}{2}(\partial_0 \otimes x^j \partial_j - x^j \partial_j \otimes \partial_0)} f \otimes g \} \\ &= f \cdot g + \frac{ia}{2} x^j ((\partial_0 f) \partial_j g - (\partial_j f) \partial_0 g) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= f \cdot g + \frac{i}{2} C_\lambda^{\rho\sigma} x^\lambda (\partial_\rho f) \cdot (\partial_\sigma g) + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (3.60)$$

gde je $C_\lambda^{\rho\sigma}$ dato u (3.58). Ovaj \star -proizvod je asocijativan, hermitski i nekomutativan. Komutacione relacije (3.56) su posledica ovakvog \star -proizvoda.

Formalizam koji je prikazan u delu 3.2.1 će biti primenjen na slučaj κ -deformacije date u ovom delu. Spoljašnji izvod zadovoljava

$$\begin{aligned} d(f \star g) &= df \star g + f \star dg, \\ d^2 &= 0, \\ df &= (\partial_\mu f) dx^\mu = (\partial_\mu^\star f) \star dx^\mu. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Bazisne 1-forme su dx^μ . Pošto vektorska polja deluju na forme preko Lijevog izvoda duž tih polja, dobija se

$$X_1(dx^\mu) = 0, \quad X_2(dx^\mu) = \delta_j^\mu dx^j. \quad (3.62)$$

Kao posledica relacija (3.62), dobiju se sledeće relacije:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge_\star dx^\nu &= dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu = -dx^\nu \wedge_\star dx^\mu, \\ f \star dx^0 &= dx^0 \star f, \quad f \star dx^j = dx^j \star e^{ia\partial_0} f. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Antikomutator između dve proizvoljne 1-forme $\omega_1 = \omega_{1\mu} \star dx^\mu$ i $\omega_2 = \omega_{2\mu} \star dx^\mu$ je različit od nule

$$\omega_1 \wedge_\star \omega_2 = -\bar{R}^\alpha(\omega_2) \wedge_\star \bar{R}_\alpha(\omega_1). \quad (3.64)$$

\star -izvodi koji slede iz (3.61) dati su kao

$$\begin{aligned} \partial_0^\star &= \partial_0, \quad \partial_j^\star = e^{-\frac{i}{2}a\partial_0} \partial_j, \\ \partial_0^\star(f \star g) &= (\partial_0^\star f) \star g + f \star (\partial_0^\star g), \\ \partial_j^\star(f \star g) &= (\partial_j^\star f) \star e^{-ia\partial_0} g + f \star (\partial_j^\star g). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Integral maksimalne forme je cikličan

$$\int \omega_1 \wedge_\star \omega_2 = (-1)^{d_1 \cdot d_2} \int \omega_2 \wedge_\star \omega_1, \quad (3.66)$$

gde je $d_1 + d_2 = 4$. Pošto bazisne 1-forme antikomutiraju, bazisna maksimalna forma je nedeformisana

$$d_\star^4 x := dx^0 \wedge_\star dx^1 \wedge_\star \dots dx^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots dx^3 = d^4 x. \quad (3.67)$$

Može se pokazati da u κ -Minkovski prostoru ne važi (3.54), već

$$\int d^4 x f \star g = \int d^4 x g \star e^{3ia\partial_0} f. \quad (3.68)$$

Na κ -Minkovski prostoru je analizirana kvantna teorija nekomutativnog skalarnog polja [103]. Konstruisana je $U(1)_\star$ gradijentna teorija koja interaguje sa fermionima [104] i na osnovu njega analiziran je Landauov problem [105]. Takođe, izračunate su i disperzione relacije u kosmološkom FRW (Fridman-Robertson-Walker) rešenju [106].

4 Angularna nekomutativnost

Ideja da se uvede angularna nekomutativnost je potekla iz činjenice da je κ -Minkovski nekomutativnost dosta komplikovana. Zbog toga je konstruisana jednostavnija nekomutativnost tipa Lijeve algebre pogodna za fenomenologiju. Da bi se motivisalo uvođenje angularne nekomutativnosti, treba se setiti da je u poglavlju 1 rečeno da se u ovom radu koristi semiklasični pristup, baziran na činjenici da geometrija (gravitacija) nije deformisana nekomutativnošću, dok su ostala polja nekomutativno deformisana. Može se reći da je gravitacija klasična, a polja deformisana. Tu se vidi analogija sa kvantovanjem u zakrivljenom prostoru. Razlika je jedino u izvoru deformacije: u jednom slučaju, deformacija je posledica nekomutativnosti prostorvremena, dok je u drugom slučaju posledica kvantizacije polja. Da bi se ovaj pristup sproveo u delo, za nekomutativnu deformaciju prostorvremena treba izabrati neki potencijalni Kilingov (Killing)³ tvist. Jedan od mogućih izbora je

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{AB}X_A\otimes X_B} = e^{-\frac{ia}{2}(\partial_t\otimes(x\partial_y-y\partial_x)-(x\partial_y-y\partial_x)\otimes\partial_t)}. \quad (4.1)$$

Ovde je θ^{AB} konstantna antisimetrična matrica

$$\theta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

sa malim parametrom nekomutativnosti a . Indeksi uzimaju vrednosti $A, B = 1, 2$, dok su $X_1 = \partial_t$, $X_2 = x\partial_y - y\partial_x$ komutirajuća vektorska polja, $[X_1, X_2] = 0$. Ovaj tvist zadovoljava uslove (3.1), (3.2) i (3.26). Tvist (4.1) se naziva angularni tvist jer je vektorsko polje $X_2 = x\partial_y - y\partial_x$ ništa drugo nego generator rotacija oko z -ose. U sfernim i cilindričnim koordinatama je $X_2 = \partial_\varphi$. Vektorska polja X_1 i X_2 su Kilingovi vektori za više geometrija koje su od interesa u fizici: Euklidski prostor, prostor Minkovskog, Švarcšildova, Rajsner-Nordstromova (Reissner-Nördstrom), Kerova crna rupa. Ovako definisan, tvist (4.1) ne deluje na metriku i funkcije

³Kilingovi vektori za odgovarajuću metriku su vektori za koje je Lijev izvod metričkog tenzora duž tog vektora jednak nuli $\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = 0$. Oni pokazuju na koje izometrijske transformacije je odgovarajući prostor invarijantan.

čija je promenljiva data metrika. Na ovaj način je obezbeđeno da metrika ostane nedeformisana jer je $\mathcal{L}_{X_1/X_2}g_{\mu\nu} = 0$. Koristeći tvist (4.1), u poglavlju 5 će biti razmatrana kvantna teorija skalarnog polja u $3D$ i $4D$. U poglavljima 6 i 7 će biti razmotrena dinamika naelektrisanog nekomutativnog skalarnog polja u geometriji Rajsner-Nordstromove crne rupe. U nastavku će se raditi u $4D$.

Pošto tvist (4.1) definiše nekomutativnost koja deformiše koordinatu vremen-skog tipa sa komutacionim relacijama (4.3), postoje potencijalni problemi kod definisanja odgovarajuće kvantne teorije polja [74]. Međutim, pokazano je [76] da odgovarajuća formulacija kvantne teorije otklanja probleme sa unitarnošću i kauzalnošću na koje je bilo ukazano u [74].

Pre nego što se primenom tvista (4.1) konstruiše diferencijalni račun, biće malo reći o vezama između κ -Minkovski deformacije uvedene u (3.55), (3.56) i angular-nog tvista. U slučaju κ -Minkovski tvista, vektorska polja koja definišu tvist (3.55) su $X_1 = \partial_t$ i $X_2 = x^j \partial_j$. Vektorsko polje $X_2 = x^j \partial_j$ ne pripada Poenkareovoj algebri nego algebri opštih linearnih transformacija $gl(1, 3)$. Tvistovana simetrija κ -Minkovski prostorvremena je tvistovana opšta linearna simetrija. U slučaju (4.1) tvista, vektorska polja koja definišu tvist pripadaju Poenkareovoj algebri i tvistovana simetrija prostora Minkovskog dobijena tvistom (4.1) je tvistovana Poenkareova simetrija. U nastavku će biti određeno kako izgleda tvistovana Poenkareova simetrija dobijena tvistom (4.1). Biće razmatrani hermitski generatori, koji u koordinatnoj reprezentaciji dati sa: $P_\mu = -i\partial_\mu$ i $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ i $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

4.1 Tvistovani diferencijalni račun

U ovom delu će biti analizirano na koji način tvist (4.1) utiče na diferencijalni račun. U nastavku će biti korišteni već poznati rezultati tvistovane diferencijalne geometrije, koji su detaljnije izneti u poglavlju 3.

\star -proizvod funkcija, na osnovu definicije (3.33) i tvista (4.1) je dat sa

$$\begin{aligned} f \star g &= \mu \{ e^{\frac{ia}{2}(\partial_t \otimes (x\partial_y - y\partial_x) - (x\partial_y - y\partial_x) \otimes \partial_t)} f \otimes g \} \\ &= fg + \frac{ia}{2}(\partial_t f(x\partial_y g - y\partial_x g) - \partial_t g(x\partial_y f - y\partial_x f)) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ovako definisan \star -proizvod je nekomutativan, asocijativan i u limesu kada $a \rightarrow 0$, \star -proizvod se svodi na običan tačkasti proizvod funkcija. Ovaj limes sledi kao posledica osobine (3.26), dok asocijativnost dolazi kao posledica osobine (3.1). Na

ovaj način je dobijena nekomutativna algebra, što prema teoremama Gelfanda i Naimarka [7, 8] definiše nekomutativno prostorvreme.

Kada se u specijalnom slučaju za funkcije izaberu same koordinate, \star -komutacione relacije između koordinata glase

$$\begin{aligned} [t \star x] &= -iay, \\ [t \star y] &= iax, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dok su ostale \star -komutacione relacije između koordinata jednake nuli. Dobijeni komutatori su linearni po koordinatama i prema tome pripadaju skupu nekomutativnosti tipa Lijeve algebre, kao i već spomenuta κ -Minkovski nekomutativnost.

Koristeći \star -proizvod između funkcija i 1-formi definisanih relacijom (3.34) dobija se

$$\begin{aligned} dt \star f &= f \star dt, \\ dz \star f &= f \star dz, \\ dx \star f &= \cos(ia\partial_t)f \star dx + \sin(ia\partial_t)f \star dy, \\ dy \star f &= \cos(ia\partial_t)f \star dy - \sin(ia\partial_t)f \star dx, \end{aligned} \quad (4.4)$$

za \star -proizvod funkcija sa bazisnim 1-formama. Iskorištena je činjenica da su $\mathcal{L}_{X_2}(dx) = -dy$, $\mathcal{L}_{X_2}(dy) = dx$ i $\mathcal{L}_{X_1}(dx^\mu) = 0$.

Na sličan način je deformisan i kosi proizvod diferencijalnih formi \star -kosim proizvodom (3.35)

$$\omega \wedge_\star \omega' = \bar{f}^\alpha(\omega) \wedge \bar{f}_\alpha(\omega').$$

U specijalnom slučaju \star -kosi proizvod bazisnih 1-formi je nedeformisan

$$dx^\mu \wedge_\star dx^\nu = dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.5)$$

Pošto bazisne 1-forme antikomutiraju, bazisna maksimalna forma takođe ostaje nedeformisana

$$dt \wedge_\star dx \wedge_\star dy \wedge_\star dz = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = d^4x. \quad (4.6)$$

\star -parcijalni izvodi (3.41) koji se dobijaju deformacijom tvistom (4.1) su dati kao

$$\partial_t^\star f = \partial_t f,$$

$$\begin{aligned}
\partial_z^* f &= \partial_z f, \\
\partial_x^* f &= \cos(i\frac{a}{2}\partial_t)\partial_x f - \sin(i\frac{a}{2}\partial_t)\partial_y f, \\
\partial_y^* f &= \cos(i\frac{a}{2}\partial_t)\partial_y f + \sin(i\frac{a}{2}\partial_t)\partial_x f.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Pošto je tvist (4.1) Abelov, pored osobine cikličnosti integrala (3.42)

$$\int \omega_1 \wedge_\star \cdots \wedge_\star \omega_p = (-1)^{d_1 \cdot d_2 \cdots d_p} \int \omega_p \wedge_\star \omega_1 \wedge_\star \cdots \wedge_\star \omega_{p-1}, \tag{4.8}$$

gde je $d_1 + d_2 + \cdots + d_p = 4$, tvist (4.1) zadovoljava i jedan jači uslov, a to se integral \star -proizvoda dve funkcije svodi na integral običnog proizvoda dve funkcije [107]

$$\int d^4x f \star g = \int d^4x g \star f = \int d^4x f \cdot g. \tag{4.9}$$

U tom slučaju se kaže da je \star -proizvod funkcija zatvoren. Ovu osobinu ima i Majalov \star -proizvod (3.44), dok u slučaju κ -Minkovski nekomutativnosti važi (3.68), videti takođe [108, 109, 110, 111, 104, 107].

4.2 Hodžov dual

U opštem slučaju nije jednostavno generalizovati Hodžov (Hodge) dualni operator na nekomutativne prostore i nekomutativne gradijentne teorije. Detaljnija razmatranja o pokušajima konstrukcije Hodžovog dualnog operatora ili nekim alternativnim metodama konstrukcije teorija koje ne zahtevaju Hodžov dualni operator mogu da se pronađu u [99, 112]. Međutim, u slučaju tvista (4.1), konstruisanje Hodžovog dualnog operatora ne predstavlja veliki problem.

U četvorodimenzionalnom prostoru Minkovskog deformisanim tvistom (4.1), Hodžov dualni operator 2-forme $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} \star dx^\mu \wedge_\star dx^\nu$ može da se definiše na standardan način

$$\begin{aligned}
*_H F &= *_H \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star dx^\mu \wedge_\star dx^\nu \right) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\beta} dx^\alpha \wedge_\star dx^\beta) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\beta} (F_{\mu\nu} \star dx^\alpha \wedge_\star dx^\beta). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Pri konstruisanju nekomutativnih gradijentnih teorija, 2-forma F je je nekomutativni tenzor jačine polja neke gradijentne teorije. Transformiše se kovarijantno po

pridruženoj reprezentaciji date gradijentne grupe

$$F' = U_\star \star F \star U_\star^{-1}.$$

Konačna nekomutativna gradijentna transformacija je data sa matricom U_\star i U_\star može da zavisi od komutativnog gradijentnog parametra α . Korištenjem relacija (4.4) i (4.10) može da se pokaže kako se transformiše Hodžov dualni operator. Taj zakon transformacije je dat kao

$$*_H F' = U_\star \star (*_H F) \star U_\star^{-1}. \quad (4.11)$$

U slučaju tvista (4.1), činjenica da se prirodno definisan nekomutativni Hodžov dualni operator transformiše kovarijantno pri nekomutativnim gradijentnim transformacijama ima važnu ulogu pri konstrukciji dejstva teorije koje bi bilo invarijantno na gradijentne transformacije. Treba napomenuti da se, u slučaju κ -Minkovskog, Hodžov dual definisan sa (4.10) ne transformiše kovarijantno, pa pravolinijska konstrukcija gradijentnih teorija na κ -Minkovski prostoru nije moguća, videti [112].

4.3 Angularni tvist u zakrivljenim koordinatama

Već je rečeno da je vektorsko polje X_2 zapravo generator rotacija oko z -ose, koji je u sfernim i cilindričnim koordinatama $X_2 = \partial_\varphi$. Na osnovu toga, tvist (4.1) u datim koordinatama postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\otimes\partial_\beta} \\ &= e^{-\frac{ia}{2}(\partial_t\otimes\partial_\varphi-\partial_\varphi\otimes\partial_t)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gde su $\alpha, \beta = t, \varphi$.

Sada se već dobijene formule u dekartovim koordinatama mogu napisati u sfernim ili cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned} f \star g &= \mu \{ e^{\frac{ia}{2}(\partial_t\otimes\partial_\varphi-\partial_\varphi\otimes\partial_t)} f \otimes g \} \\ &= fg + \frac{ia}{2}(\partial_t f(\partial_\varphi g) - \partial_t g(\partial_\varphi f)) + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$dx^\mu \star f = f \star dx^\mu = f dx^\mu, \quad (4.14)$$

$$\partial_\mu^* f = \partial_\mu f, \quad (4.15)$$

gde je sada $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$.

Forma tvista (4.12) i jednačine (4.13)-(4.15) koje iz njega slede, podsećaju na analogne formule dobijene Mojalovim tvistom u Mojalovoj algebri $[x \star y] = i\theta$, gde su dva vektorska polja ∂_x i ∂_y . Ipak komutator $[t \star \varphi] = ia$ kao analogon Mojalovog slučaja za tvist (4.12) ne bi bio dobar izbor jer φ nije dobro definisana neprekidna koordinata. Komutacione relacije angularne nekomutativnosti u sfernim koordinatama bi bile

$$\begin{aligned} [t \star \rho] &= 0, \\ [t \star e^{i\varphi}] &= -ae^{i\varphi}, \\ [t \star f(t, r, \theta, \varphi)] &= ia\partial_\varphi f. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Iz opšte definicije Hodžovog dualnog operatora u koordinatno nezavisnom zapisu može da se izračuna Hodžov dualni operator u proizvoljnim koordinatama. Uz uslov da je tvist Kilingov, kao rezultat se dobija

$$\begin{aligned} *_H F &= *_H \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star dx^\mu \wedge_\star dx^\nu \right) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} dx^\alpha \wedge_\star dx^\beta \right) \quad (4.17) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} (F_{\mu\nu} \star dx^\alpha \wedge_\star dx^\beta) = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} F_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \end{aligned}$$

što je zapravo isti rezultat kao i u komutativnom slučaju. Za pokazivanje poslednjeg rezultata, iskorištena je jednačina (4.14), kao i činjenica da je tvist (4.12) Kilingov, pa ne deluje na metrički tenzor $g_{\mu\nu}$. Zapravo, za proizvoljnu funkciju važi $g_{\mu\nu} \star f = g_{\mu\nu} \cdot f$. U opštem slučaju kada tvist \mathcal{F} nije Kilingov za metriku $g_{\mu\nu}$, dobijeni rezultat za Hodžov dualni operator ne može da se koristi jer su $g_{\mu\nu} \star f \neq f \star g_{\mu\nu}$ i $g_{\rho\alpha} \star g_{\sigma\beta} \neq g_{\sigma\beta} \star g_{\rho\alpha}$. Hodžov dualni operator koji se dobije u slučaju Kilingovog tvista obezbeđuje kovarijantnost $*_H F$ pri nekomutativnim gradijentnim transformacijama i čini da tako konstruisano dejstvo bude invarijantno na nekomutativne gradijentne transformacije. U slučaju da tvist nije Kilingov, problemi koji se javljaju pri konstrukciji nekomutativnih gradijentno invarijantnih teorija mogu se detaljnije videti u [99, 112].

U poglavlju 6 će se uz pomoć tvista (4.12) konstruisati nekomutativna skalarna $U(1)_\star$ gradijentna teorija u fiksnoj Rajsner-Nordstromovoj pozadini.

4.4 \star -proizvod ravnih talasa

Ovde će biti izneti samo glavni rezultati koji su bitni za računanje \star -proizvoda ravnih talasa, dok je detaljniji račun dat u dodatku A. \star -proizvod dva ravna talasa

je dat sa

$$e^{-ip \cdot x} \star e^{-iq \cdot x} = e^{-i(p+\star q) \cdot x}, \quad (4.18)$$

gde je \star -suma četvorovektora impulsa data kao

$$p + \star q = R(q_0)p + R(-p_0)q, \quad (4.19)$$

a R sledeća matrica

$$R(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{a\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{a\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{a\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{a\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Matrica R odgovara rotacionoj matrici u $(p_1 p_2)$ ravni. Ugao rotacije je proporcionalan parametru nekomutativnosti i odgovarajućoj energiji. U komutativnom limesu $a \rightarrow 0$, kao i u limesu gde je energija mala, izraz (4.19) se svodi na običan zbir dva impulsa. Treba napomenuti da, iako se nakon prva dva koraka (A.10) i (A.11), u računu dobije izraz koji je singularan u $\frac{aq_3}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, konačan izraz (4.19) nema singularnost.

Dobijena \star -suma je nekomutativna i asocijativna, što je posledica činjenice da je i odgovarajući \star -proizvod nekomutativan i asocijativan. \star -suma zadovoljava

$$p + \star (-p) = 0 \quad (4.21)$$

za proizvoljan četvorovektor p . Jednačinu (4.18) je moguće uopštiti i na \star -proizvod više ravnih talasa. U slučaju tri ravna talasa i korištenjem da je \star -proizvod asocijativan dobija se

$$e^{-ip \cdot x} \star e^{-iq \cdot x} \star e^{-ir \cdot x} = e^{-i(p+\star q+\star r) \cdot x}, \quad (4.22)$$

gde je⁴

$$p + \star q + \star r = R(r_0 + q_0)p + R(-p_0 + r_0)q + R(-p_0 - q_0)r. \quad (4.23)$$

Koristeći matematičku indukciju može se dobiti izraz za proizvoljan broj ravnih talasa

$$p^{(1)} + \star \dots + \star p^{(N)} = \sum_{j=1}^N R \left(- \sum_{1 \leq k < j} p_0^{(k)} + \sum_{j < k \leq N} p_0^{(k)} \right) p^{(j)}. \quad (4.24)$$

⁴Deformacija zbira impulsa se može videti i kao deformacija Vajlovog sistema što je detaljnije razmatrano u [113].

U sledećem odeljku biće pokazana veza između \star -sume (4.24) i tvistovanog koproizvoda impulsa P_μ u tvistovanoj Poenkareovoj Hopfovoj algebri angularnim tvistom (4.1).

4.5 Poenkare Hopfova algebra tvistovana angularnim tvistom

Celokupna tvistovana Poenkareova Hopfova algebra i odgovarajući diferencijalni račun su uvedeni u [50] na osnovu formalizma koji je uveden u poglavlju 3.

Generatori Poenkareove grupe u koordinatnoj reprezentaciji su dati kao

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu, \\ M_{\mu\nu} &= i(\eta_{\mu\lambda}x^\lambda\partial_\nu - \eta_{\nu\lambda}x^\lambda\partial_\mu), \end{aligned} \quad (4.25)$$

gde je $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$. Poenkareova algebra je:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tvistovani koproizvod impulsa je

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}}P_0 &= P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0, \\ \Delta^{\mathcal{F}}P_3 &= P_3 \otimes 1 + 1 \otimes P_3, \\ \Delta^{\mathcal{F}}P_1 &= P_1 \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2, \\ \Delta^{\mathcal{F}}P_2 &= P_2 \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2 - P_1 \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1, \end{aligned} \quad (4.27)$$

dok je tvistovani koproizvod Lorencovih generatora dat kao

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}}M_{31} &= M_{31} \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{31} + M_{32} \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \\ &\quad - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{32} - P_1 \otimes \frac{a}{2}M_{12} \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \frac{a}{2}M_{12} \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1 \\ &\quad - P_2 \otimes \frac{a}{2}M_{12} \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) - \frac{a}{2}M_{12} \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2, \\ \Delta^{\mathcal{F}}M_{32} &= M_{32} \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{32} - M_{31} \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{31} - P_2 \otimes \frac{a}{2}M_{12} \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \frac{a}{2}M_{12} \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +P_1 \otimes \frac{a}{2}M_{12} \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \frac{a}{2}M_{12} \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1, \\
\Delta^{\mathcal{F}}M_{30} & = M_{30} \otimes 1 + 1 \otimes M_{30} - \frac{a}{2}P_0 \otimes M_{12} + \frac{a}{2}M_{12} \otimes P_0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}M_{12} & = M_{12} \otimes 1 + 1 \otimes M_{12}, \\
\Delta^{\mathcal{F}}M_{10} & = M_{10} \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{10} + M_{20} \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \\
& \quad - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{20} \\
\Delta^{\mathcal{F}}M_{20} & = M_{20} \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{20} - M_{10} \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \\
& \quad + \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes M_{10}.
\end{aligned}$$

Ko jedinica i antipod ostaju nepromenjeni:

$$\varepsilon^{\mathcal{F}}(P_\mu) = 0, \quad \varepsilon^{\mathcal{F}}(M_{\mu\nu}) = 0, \tag{4.29}$$

$$S^{\mathcal{F}}(P_\mu) = -P_\mu, \quad S^{\mathcal{F}}(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu}. \tag{4.30}$$

Koproizvodi generatora impulsa P_0 , P_3 i M_{12} , koji je generator rotacije oko z -ose u xy ravni, su nedeformisani (primitivni). Svi ostali koproizvodi su deformisani. Na osnovu dobijenih deformisanih koproizvoda, moguće je napraviti vezu između tvistovanih koproizvoda i \star -suma datih izrazom (4.24).

Ako se pretpostavi da je polje ϕ_p svojstveni vektor operatoru impulsa P_μ sa svojstvenom vrednošću p_μ , tada je

$$P_\mu \phi_p = p_\mu \phi_p.$$

Kao jedan od primera takvog stanja je ravni talas $e^{-ip \cdot x}$. Da bi se proverilo da li je stanje dobijeno \star -proizvodom dva ravna talasa $\phi_p \star \phi_q$ opet svojstveno stanje za operator impulsa P_μ , treba da se uzračuna

$$P_\mu(\phi_p \star \phi_q) = \mu_\star \{\Delta^{\mathcal{F}}P_\mu(\phi_p \otimes \phi_q)\}, \tag{4.31}$$

gde je $\mu_\star = \mu \mathcal{F}^{-1}$ i predstavlja \star -proizvod koji je definisan u (4.2) kao

$$\mu_\star(\phi_p \otimes \phi_q) = \phi_p \star \phi_q. \tag{4.32}$$

Gledajući po komponentama i koristeći izraze (4.27), dobija se

$$P_0(\phi_p \star \phi_q) = (p+q)_0(\phi_p \star \phi_q) = (p+\star q)_0(\phi_p \star \phi_q),$$

$$\begin{aligned}
P_3(\phi_p \star \phi_q) &= (p + q)_3(\phi_p \star \phi_q) = (p +_\star q)_3(\phi_p \star \phi_q), \\
P_1(\phi_p \star \phi_q) &= \mu_\star \left\{ \left(P_1 \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2 \right) (\phi_p \otimes \phi_q) \right\} \\
&= \left(p_1 \cos\left(\frac{a}{2}q_0\right) + q_1 \cos\left(\frac{a}{2}p_0\right) + p_2 \sin\left(\frac{a}{2}q_0\right) - q_2 \sin\left(\frac{a}{2}p_0\right) \right) \\
&\quad (\phi_p \star \phi_q) = (p +_\star q)_1(\phi_p \star \phi_q), \tag{4.33} \\
P_2(\phi_p \star \phi_q) &= \mu_\star \left\{ \left(P_2 \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2 - P_1 \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1 \right) (\phi_p \otimes \phi_q) \right\} \\
&= \left(p_2 \cos\left(\frac{a}{2}q_0\right) + q_2 \cos\left(\frac{a}{2}p_0\right) - p_1 \sin\left(\frac{a}{2}q_0\right) + q_1 \sin\left(\frac{a}{2}p_0\right) \right) \\
&\quad (\phi_p \star \phi_q) = (p +_\star q)_2(\phi_p \star \phi_q).
\end{aligned}$$

Vidi se da je polje $\phi_p \star \phi_q$ zapravo svojstveno stanje operatora P_μ sa svojstvenom vrednošću datom preko \star -sume (4.19).

Kada se ista procedura ponovi za slučaj \star -proizvoda tri polja $\phi_p \star \phi_q \star \phi_r$, dobija se da je taj proizvod i dalje svojstveni vektor operatora impulsa sa svojstvenom vrednošću koja je \star -suma tri impulsa. Kao primer, biće dat račun za komponentu impulsa P_1 , dok za ostale komponente impulsa treba uraditi iste korake. Rezultat je

$$\begin{aligned}
P_1(\phi_p \star \phi_q \star \phi_r) &= \mu_\star \left\{ \Delta^{\mathcal{F}} P_1(\phi_p \otimes \phi_q \otimes \phi_r) \right\} \\
&= \mu_\star \left\{ \left(P_1 \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \otimes P_2 \right) (\phi_p \otimes (\phi_q \otimes \phi_r)) \right\} \\
&= \mu_\star \left\{ \left(P_1 \phi_p \otimes \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) (\phi_q \otimes \phi_r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right) \phi_p \otimes P_1(\phi_q \otimes \phi_r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + P_2 \phi_p \otimes \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) (\phi_q \otimes \phi_r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin\left(\frac{a}{2}P_0\right) \phi_p \otimes P_2(\phi_q \otimes \phi_r) \right) \right\} \\
&= \left(p_1 \cos\left(\frac{a}{2}(q+r)_0\right) + p_2 \sin\left(\frac{a}{2}(q+r)_0\right) \right. \\
&\quad \left. + q_1 \cos\left(\frac{a}{2}(-p+r)_0\right) + q_2 \sin\left(\frac{a}{2}(-p+r)_0\right) \right. \\
&\quad \left. + r_1 \cos\left(\frac{a}{2}(-p-q)_0\right) + r_2 \sin\left(\frac{a}{2}(-p-q)_0\right) \right) (\phi_p \star \phi_q \star \phi_r) \\
&= (p +_\star q +_\star r)_1(\phi_p \star \phi_q \star \phi_r) \tag{4.34}
\end{aligned}$$

gde su iskorištena sledeća svojstva:

- koasocijativnost koproizvoda (4.27) u drugom redu;
- koproizvod impulsa (4.27) iz kojih slede sledeći koproizvodi

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathcal{F}}\left(\cos\left(\frac{a}{2}P_0\right)\right) &= \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right)\otimes\cos\left(\frac{a}{2}P_0\right)-\sin\left(\frac{a}{2}P_0\right)\otimes\sin\left(\frac{a}{2}P_0\right), \\ \Delta^{\mathcal{F}}\left(\sin\left(\frac{a}{2}P_0\right)\right) &= \cos\left(\frac{a}{2}P_0\right)\otimes\sin\left(\frac{a}{2}P_0\right)+\sin\left(\frac{a}{2}P_0\right)\otimes\cos\left(\frac{a}{2}P_0\right).\end{aligned}$$

Još jednom može da se zaključi da je $\phi_p\star\phi_q\star\phi_r$ svojstveno stanje operatora impulsa P_μ sa svojstvenom vrednošću $(p+\star q+\star r)_\mu$, što je zapravo \star -suma tri impulsa.

Celokupan račun može da se primeni i na \star -proizvod n polja i kao rezultat će se dobiti da je svojstvena vrednost takvog svojstvenog stanja opet \star -suma n impulsa. Tvistovana Poenkareova simetrija ima deformisane koproizvode, što kao rezultat daje da je dejstvo generatora na višestanična stanja deformisano u smislu da je svojstvena vrednost takvih stanja modifikovani zbir impulsa reprezentovan \star -sumom.

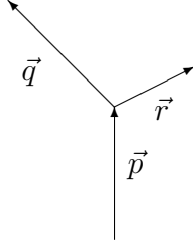
4.6 Kinematika raspada čestica

U ovom delu će se videti kako \star -sume impulsa (4.24) mogu da se primene na kinematiku raspada čestica. Pre početka treba napomenuti da se disperziona relacija čestice mase m ne menja i da je kao i u komutativnom slučaju

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2.$$

Poslednji zaključak je posledica toga da je propagator nedeformisan (5.4).

Biće analiziran raspad čestice mase M i impulsa p koja se kreće duž z -ose. Takva čestica se raspada na dve čestice sa impulsima q i r i odgovarajućim masama m_q i m_r . Jednačina (4.23) deformiše zakon održanja impulsa.



Slika 3: Raspad čestice mase M koja se kreće duž z -ose prikazan u xz -ravni.

Treba napomenuti da su u jednačini (4.23) svi impulsi ulazni, te stoga treba promeniti znak izlaznim impulsima q i r . Tada modifikovani zakon održanja impulsa glasi

$$p +_{\star} (-q) +_{\star} (-r) = R(-q_0 - r_0)p - R(-p_0 - r_0)q - R(-p_0 + q_0)r = 0. \quad (4.35)$$

U izabranom koordinatnom sistemu, odgovarajući impulsi su

$$p = \begin{pmatrix} \sqrt{M^2 + p_3^2} \\ 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} E_q \\ \vec{q} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} E_r \\ \vec{r} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Iz (4.35) slede sledeće četiri jednačine:

$$\sqrt{M^2 + p_3^2} = E_q + E_r, \quad (4.37)$$

$$p_3 = q_3 + r_3, \quad (4.38)$$

$$0 = \cos\left(\frac{a}{2}(p_0 + r_0)\right)q_1 - \sin\left(\frac{a}{2}(p_0 + r_0)\right)q_2 + \cos\left(\frac{ar_0}{2}\right)r_1 - \sin\left(\frac{ar_0}{2}\right)r_2, \quad (4.39)$$

$$0 = \cos\left(\frac{a}{2}(p_0 + r_0)\right)q_2 + \sin\left(\frac{a}{2}(p_0 + r_0)\right)q_1 + \cos\left(\frac{ar_0}{2}\right)r_2 + \sin\left(\frac{ar_0}{2}\right)r_1. \quad (4.40)$$

Kvadriranjem i sabiranjem jednačina (4.39) i (4.40), dobija se

$$|\vec{q}_{12}|^2 = |\vec{r}_{12}|^2, \quad (4.41)$$

gde su \vec{q}_{12} i \vec{r}_{12} projekcije prostornih delova impulsa q i r na xy -ravan. Koristeći ovaj rezultat, komponente, jednačine za komponente impulsa q_z and r_z su

$$q_3 = \frac{p_3(M^2 + m_q^2 - m_r^2) \mp \sqrt{(p_3^2 + M^2)[(M^2 + m_q^2 - m_r^2)^2 - 4M^2(m_q^2 + r_{12}^2)]}}{2M^2}, \quad (4.42)$$

$$r_3 = \frac{p_3(M^2 + m_r^2 - m_q^2) \pm \sqrt{(p_3^2 + M^2)[(M^2 + m_q^2 - m_r^2)^2 - 4M^2(m_q^2 + r_{12}^2)]}}{2M^2}. \quad (4.43)$$

Ove jednačine nisu deformisane nekomutativnošću i ovaj rezultat se poklapa sa istim u komutativnom slučaju.

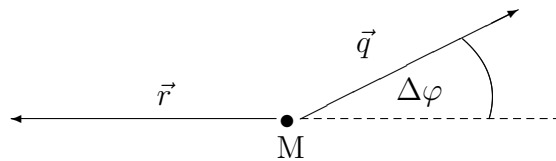
Sa druge strane, jednačine (4.39) i (4.40) se mogu zapisati u matričnoj formi kao

$$0 = \mathcal{R}\left(\frac{ap_0}{2}\right) \vec{q}_{12} + \vec{r}_{12}, \quad (4.44)$$

gde je rotaciona matrica u xy -ravni data sa

$$\mathcal{R}\left(\frac{ap_0}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{ap_0}{2}\right) & -\sin\left(\frac{ap_0}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ap_0}{2}\right) & \cos\left(\frac{ap_0}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Iz jednačine (4.44) sledi da je ugao između impulsa \vec{q}_{12} i \vec{r}_{12} u xy -ravni $\Delta\varphi = \pi - \frac{ap_0}{2}$. U komutativnom slučaju, taj ugao jednak je $\Delta\varphi = \pi$ jer se čestica impulsa p koja se raspada kreće duž z -ose i nema komponente impulsa u xy -ravni. Nekomutativnost menja ovaj rezultat tako što rezultujući impuls u xy -ravni postaje različit od nule nakon raspada. Korekcija na rezultujući impuls zavisi od p_0 . U specijalnom slučaju kada je $ap_0 = 2k \cdot 2\pi$, nekomutativne korekcije će nestati i čestice sa impulsima q i r će se kretati istim pravcem a suprotnim smerovima nakon raspada. S druge strane, kada je $ap_0 = (2k + 1) \cdot 2\pi$, doprinos nekomutativnosti je maksimalan i čestice sa impulsima q i r se kreću duž istog smera u xy -ravni. Interesantno je napomenuti da postoji nenulti nekomutativni doprinos i u referentnom sistemu kada se inicijalna čestica raspada iz mirovanja. Tada je ugao između čestica produkata raspada u xy -ravni dat sa $\Delta\varphi = \pi - \frac{aM}{2}$ što je prikazano na slici 4.



Slika 4: Raspad čestice mase M iz mirovanja u xy -ravni.

Ako se napravi bust referentnog sistema duž z -ose, primećuje se netrivialna korekcija jednačine (4.44). To sugerise da je veza između busta duž z -ose M_{03} i rotacije u xy -ravni M_{12} netrivialna. To je očigledno iz izraza za koproizvode (4.28) da su ova dva generatora spregnuta. Ovu vezu treba bolje razumeti, što je planirano kao nastavak istraživanja.

Na kraju se može prodiskutovati šta se dešava kada se u tvistu (4.1) generator vremenske translacije zameni generatorom translacija duž z -ose. U tom slučaju, jednačina koja je analogna sa (4.44) izgleda kao

$$0 = \mathcal{R}\left(\frac{ap_3}{2}\right) \vec{q}_{12} + \vec{r}_{12}, \quad (4.46)$$

gde je rotaciona matrica u xy -ravni data sa

$$\mathcal{R}\left(\frac{ap_3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{ap_3}{2}\right) & -\sin\left(\frac{ap_3}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ap_3}{2}\right) & \cos\left(\frac{ap_3}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Odgovarajuću ugao između \vec{q}_{12} i \vec{r}_{12} u xy -ravni je $\Delta\varphi = \pi - \frac{ap_3}{2}$. Jasno je da taj ugao zavisi od impulsa p_3 inicijalne čestice. U slučaju da se čestica raspada iz mirovanja, tada je $p_3 = 0$ i nema nekomutativnih korekcija.

5 Nekomutativno kvantno skalarno polje - UV/IC mešanje

Skalarna teorija na angularno nekomutativnom prostoru definisana je dejstvom

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \star \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x) \star \phi(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi(x) \star^4 \right). \quad (5.1)$$

Zbog zatvorenosti \star -proizvoda izraženom jednačinom (4.9), moguće je sve \star -proizvode u kvadratičnim članovima zameniti običnim proizvodom. Uprkos tome, radi kompletnosti, svi \star -proizvodi će biti zadržani. Posledica činjenice da je \star -proizvod zatvoren je to da je propagator u teoriji nedeformisan. Sa druge strane, interakcioni član će biti deformisan i posledice te deformacije će biti proučavane na dijagramima sa jednom petljom.

5.1 Deformisani zakon održanja impulsa

Razvoj polja $\phi(x)$ u Furijeov red izgleda kao

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4p e^{-ipx} \tilde{\phi}(p). \quad (5.2)$$

Ubacivanjem izraza (5.2) u dejstvo (5.1) dobija se izraz za klasično dejstvo u impulsnom prostoru

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} dp dq \frac{1}{2} \left(-p_\mu q^\mu \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(q) - m^2 \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(q) \right) \delta^{(4)}(p \star_+ q) \\ &- \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\lambda}{4!} \int_{(\mathbb{R}^4)^{\times 4}} dp dq dr ds \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(q) \tilde{\phi}(r) \tilde{\phi}(s) \delta^{(4)}(p \star_+ q \star_+ r \star_+ s). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Jedina razlika u dejstvu (5.3) u odnosu na isto dejstvo u komutativnom slučaju je prisustvo \star -suma u argumentima δ -funkcija. Ove δ -funkcije su odgovorne za

(ne)održanje impulsa u odgovarajućim verteksima. Najveća razlika u odnosu na komutativni slučaj je tvistovani zakon održanja četvoroiimpulsa. U slučaju kada je \star -suma od samo dva impulsa, što važi za kvadratične članove u dejstvu, modifikovani zakon održanja impulsa se svodi na običan zakon održanja impulsa u komutativnom slučaju i nema rotacije impulsa u xy -ravni. Zbog blok dijagonalne strukture matrice (4.20) zakon održanja nulte i treće komponente impulsa je uvek nedeformisan, pa stoga važi

$$\delta^{(4)}(p +_{\star} q) = \delta^{(4)}(R(q_3)p + R(-p_3)q) = \delta^{(4)}(R(q_3)(p + q)) = \delta^{(4)}(p + q), \quad (5.4)$$

gde je iskorištena činjenica da za svaku nedegenerisanu $n \times n$ matricu M i n -dimenzionalnu vektorsku funkciju V , n -dimenzionalna delta funkcija zadovoljava uslov

$$\delta^{(n)}(MV) = \frac{1}{|\det M|} \delta^{(n)}(V), \quad (5.5)$$

kao i to da je $\det R = 1$.

Treba napomenuti da će u ovom poglavlju biti razmatrana nekomutativnost koja je dobijena tvistom (4.1) koji umesto generatora vremenske translacije ima generator translacija duž z -ose. Razlika će se ogledati u tome da će svi izrazi koji su uz nekomutativni parametar a imali p_0 ili P_0 sada imati p_3 ili P_3 . Sve ostalo ostaje nepromenjeno. Ova promena nekomutativnosti je posledica potencijalnih problema sa unitarnošću kvantnih nekomutativnih teorija gde je nekomutativnost vremenskog tipa [74]. Iako je pokazano da je u tom slučaju moguće konstruisati kvantnu teoriju bez problema sa unitarnošću [76], ideja je da se zaobiđu problemi sa nestandardnim kvantovanjem koji ovaj pristup zahteva.

Osobina (5.4) i asocijativnost \star -sume daju opštiju izraz

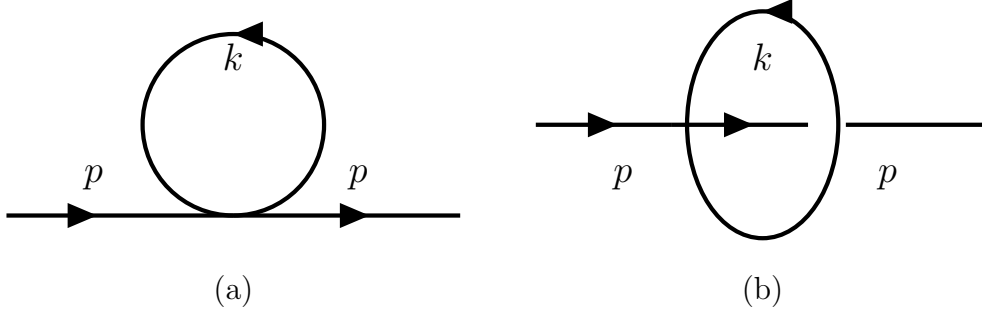
$$\delta^{(4)}(p^{(1)} +_{\star} \dots +_{\star} p^{(k)} +_{\star} \dots +_{\star} p^{(N)}) = \delta^{(4)}(p^{(1)} +_{\star} \dots +_{\star} p^{(k)} +_{\star} \dots +_{\star} p^{(N)}). \quad (5.6)$$

Značaj ove osobine se ogleda u tome da unutar delta funkcije uvek jedna \star -suma može da se zameni običnim zbirom. Ova činjenica je u potpunosti u skladu sa tim da u svakom članu u dejstvu (5.1) pod integralom, jedan \star -proizvod može da se zameni običnim tačkastim proizvodom.

5.2 UV/IC mešanje i propagator na nivou jedne petlje

Da bi se odredile neke UV/IC osobine modela, biće analizirane korekcija propagatora na nivou jedne petlje. U nekomutativnoj teoriji, postoje dve vrste takvih

dijagrama. To su planarni i neplanarni dijagrami i oni su prikazani na slici 5.



Slika 5: Planarna (a) i neplanarna (b) korekcija propagatora na nivou jedne petlje, koje odgovaraju (5.7) i (5.8) respektivno.

Doprinosi planarnog i neplanarnog dijagrama propagatoru, koji su reda λ (imaju jedan verteks) su proporcionalni sa

$$\begin{aligned}
 \text{Pl.} &\propto \frac{1}{m^2 - q^2 - i0^+} \cdot \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \cdot \int_{(R^4)^{\times 4}} dp^{(1)} dp^{(2)} dp^{(3)} dp^{(4)} \times \\
 &\times \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)}) \delta^{(4)}(q - p^{(1)}) \delta^{(4)}(p^{(4)} + s) \times \\
 &\times \delta^{(4)}(p^{(1)} +_{\star} p^{(2)} +_{\star} p^{(3)} +_{\star} p^{(4)}) \frac{1}{m^2 - (p^{(2)})^2 - i0^+} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 \text{NPl.} &\propto \frac{1}{m^2 - q^2 - i0^+} \cdot \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \cdot \int_{(R^4)^{\times 4}} dp^{(1)} dp^{(2)} dp^{(3)} dp^{(4)} \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(4)}) \times \\
 &\times \delta^{(4)}(q - p^{(1)}) \delta^{(4)}(p^{(3)} + s) \delta^{(4)}(p^{(1)} +_{\star} p^{(2)} +_{\star} p^{(3)} +_{\star} p^{(4)}) \times \\
 &\times \frac{1}{m^2 - (p^{(2)})^2 - i0^+} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

respektivno. Kvadrati impulsa su definisani standardno kao $s^2 = s_{\mu} s_{\nu} \eta^{\mu\nu}$, $q^2 = q_{\mu} q_{\nu} \eta^{\mu\nu}$. Pošto je cilj da se proučava struktura divergencija, da bi se pojednostavio zapis, zanemarene su konstante kao što su faktori simetrije, konstanta interakcije λ i stepeni od 2π . Takođe, dodavanjem člana 0^+ u imeniocce, definisana je kontura integracije.

Planarni i neplanarni diajgrami imaju identične argumente unutar δ -funkcije \star -sume, dok su argumenti u ostalim δ -funkcijama različiti zbog drugačijih kontrakcija impulsa koji čine petlju. Ova razlika može da se svede na zamenu $p^{(3)} \leftrightarrow p^{(4)}$. Pošto \star -suma nije komutativna, ni dati dijagrami nisu ekvivalentni.

Planarni dijagram ima istu vrednost kao i odgovarajući dijagram u komutativnom slučaju. Naime, δ -funkcija koja sadrži \star -sumu se pojavljuje zajedno sa

$\delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)})$ i zajedno daju

$$\begin{aligned}
& \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)}) \delta^{(4)}(p^{(1)} \star p^{(2)} \star p^{(3)} \star p^{(4)}) \\
&= \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)}) \delta^{(4)}(p^{(1)} \star (p^{(2)} \star (-p^{(2)})) \star p^{(4)}) \\
&= \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)}) \delta^{(4)}(p^{(1)} \star p^{(4)}) \\
&= \delta^{(4)}(p^{(2)} + p^{(3)}) \delta^{(4)}(p^{(1)} + p^{(4)}), \tag{5.9}
\end{aligned}$$

gde su iskorišteni asocijativnost, osobina (4.21) i osobina (5.4) \star -suma. Vidi se da poslednji red u jednačini (5.9) ne sadrži \star -sumu, što znači da je jednak vrednosti odgovarajućeg dijagrama u komutativnom slučaju. Ovaj rezultat je u saglasnosti sa rezultatom u slučaju Mojalove nekomutativnosti [69]. Zamenom jednačine (5.9) u (5.7) se dobija

$$\text{Pl.} \propto \frac{1}{m^2 - q^2 - i0^+} \cdot \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \cdot \delta^{(4)}(q - s) \int_{\mathbb{R}^4} dp \frac{1}{m^2 - p^2 - i0^+}. \tag{5.10}$$

Prvo treba uraditi Vikovu (Wick) rotaciju, $p_0 \rightarrow ip_0$, putanje integracije po nultoj komponenti impulsa p_0 . Nakon toga treba regularizovati divergentni deo integrala metodom odsecanja (cutt off) i integraliti po impulsu tako da za p važi $|p|_{\text{Eucl}} = \sqrt{p_\mu p_\nu \delta^{\mu\nu}} \leq \Lambda$, gde je Λ parametar regularizacije metodom odsecanja. Prelaskom u sferne koordinate divergentni deo integrala (5.10) postaje

$$\begin{aligned}
2\pi^2 \int_0^\Lambda d|p|_{\text{Eucl}} \frac{|p|_{\text{Eucl}}^3}{|p|_{\text{Eucl}}^2 + m^2} &= \pi^2 \Lambda^2 - \pi^2 m^2 \log \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \\
&= \pi^2 \Lambda^2 - \pi^2 m^2 \log \frac{\Lambda}{\mu} + \dots, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

gde parametar μ govori da postoji proizvoljnost u biranju suptrakcije logaritamske divergencije. U komutativnom slučaju je taj parametar veoma važan za ispitivanje toka renormalizacione grupe. Nakon dobijanja ovih rezultata, konačan izraz za vrednost planarnog dijagrama je

$$\begin{aligned}
\text{Pl.} &= \frac{i}{m^2 - q^2 - i0^+} \cdot \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \cdot \delta^{(4)}(q - s) \pi^2 \left(\Lambda^2 - m^2 \log \frac{\Lambda}{\mu} \right) \\
&\quad + \text{UV konačni članovi.} \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Vidi se da izraz (5.12) sadrži kvadratnu i logaritamsku divergenciju, što je dobro poznat rezultat [71].

Sada treba detaljnije proučiti vrednost neplanarnog dijagrama (5.8). Integra-

cijom po prve tri δ -funkcije se dobija

$$\begin{aligned} \text{NPl.} &= \frac{1}{m^2 - q^2 - i0^+} \cdot \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \times \\ &\times \int_{R^4} dp \delta^{(4)}(q +_{\star}(-p) +_{\star}(-s) +_{\star}p) \frac{1}{m^2 - p^2 - i0^+}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

gde je $-p^{(2)}$ zamenjeno sa p . Sada treba malo detaljnije ispitati argument u preostaloj δ -funkciji u jednačini (5.13). Smenom $r = -p$ u jednačini (4.23) i korištenjem osobine (5.5) δ -funkcije sa $M = R$ dobija se

$$\delta^{(4)}(q +_{\star}(-p) +_{\star}(-s) +_{\star}p) = \delta^{(4)}((R(q_3) - R(-q_3))p + R(-p_3)q - R(p_3)s). \quad (5.14)$$

Očigledno je da je ovaj rezultat suštinski drugačiji u odnosu na planarni slučaj: pošto se impuls p nalazi u argumentu δ -funkcije, to znači da je broj jednodimenzionalnih integracija manji od četiri. Matrica koja deluje na p je:

$$R(q_3) - R(-q_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin\left(\frac{aq_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & -2 \sin\left(\frac{aq_3}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Dati impulsi se mogu parametrizovati kao

$$\begin{aligned} q_1 &= |q| \cos \psi, & q_2 &= |q| \sin \psi, \\ s_1 &= |s| \cos \zeta, & s_2 &= |s| \sin \zeta, \end{aligned} \quad (5.16)$$

zbog jednostavnosti računa u narednim koracima. Treba napomenuti da su $|q|$ i $|s|$ projekcije impulsa q i s na xy -ravan. Takođe treba pretpostaviti da su parametar nekomutativnosti a i komponenta q_3 spoljašnjeg impulsa q različite od nule, ili da je njihov proizvod različit od 2π . U tom slučaju, δ -funkcija (5.14) postaje

$$\frac{1}{4 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)\right)^2} \delta(q_3 - s_3) \delta(q_0 - s_0) \delta(p_1 - \mathcal{P}_1(q, s, p_3)) \delta(p_2 - \mathcal{P}_2(q, s, p_3)), \quad (5.17)$$

gde je iskorišten izraz (5.5) za dvodimenzionu δ -funkciju u xy -ravni. Ukupni faktor ispred delta funkcija nije ništa drugo nego inverzna 2×2 determinanta centralnog bloka matrice (5.15), koji odgovara komponentama u xy -ravni. Funkcije $\mathcal{P}_1(q, s, p_3)$

i $\mathcal{P}_2(q, s, p_3)$, su date kao

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1(q, s, p_3) &= \frac{-|s| \sin\left(-\frac{ap_3}{2} + \zeta\right) + |q| \sin\left(\frac{ap_3}{2} + \psi\right)}{2 \sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)}, \\ \mathcal{P}_2(q, s, p_3) &= \frac{|s| \cos\left(-\frac{ap_3}{2} + \zeta\right) - |q| \cos\left(\frac{ap_3}{2} + \psi\right)}{2 \sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)}.\end{aligned}\quad (5.18)$$

Izrazi (5.18) zapravo predstavljaju prvu i drugu komponentu rešenja algebarskog sistema po p_*

$$\begin{cases} ((R(q_3) - R(-q_3)) p_* + R(-p_3)q - R(p_3)s)_1 = 0 \\ ((R(q_3) - R(-q_3)) p_* + R(-p_3)q - R(p_3)s)_2 = 0 \end{cases}, \quad (5.19)$$

gde indeksi 1 i 2 određuju komponente četvorovektora impulsa.

Ključna razlika u odnosu na komutativni slučaj je to da dve od četiri komponente impulsa p mogu da se prointegrale korištenjem izraza (5.17). To znači da UV divergencija ne može da bude kvadratna, nego najviše logaritamska. Integral po impulsima u (5.13) postaje

$$\begin{aligned}& \int_{R^4} dp \delta^{(4)}(p +_* q +_* (-p) + (-s)) \frac{1}{m^2 - p^2 - i0^+} = \frac{1}{4 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)\right)^2} \\ & \delta(q_0 - s_0) \delta(q_3 - s_3) \int_{R^2} dp_0 dp_3 \times \\ & \times \frac{1}{-p_0^2 + p_3^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 + m^2 - i0^+}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Primenjujući Vikovu rotaciju $p_0 \rightarrow ip_0$ i uvodeći UV parametar odsecanja Λ , integral po p_0 i p_3 može da se regularizuje i da se integrali u ograničenoj oblasti $p_0^2 + p_3^2 < \Lambda^2$,

$$\begin{aligned}& \frac{i}{4 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)\right)^2} \delta(q_0 - s_0) \delta(q_3 - s_3) \times \\ & \times \int_{p_0^2 + p_3^2 < \Lambda^2} dp_0 dp_3 \frac{1}{p_0^2 + p_3^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 + m^2}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Pošto je

$$(\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 = \frac{2|s||q|(1 - \cos(-ap_3 + \zeta - \psi)) + (|q| - |s|)^2}{4 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)\right)^2}\quad (5.22)$$

onda važi

$$\frac{(|q| - |s|)^2}{4 \left(\sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \right)^2} \leq (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 \leq \frac{(|q| + |s|)^2}{4 \left(\sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \right)^2}. \quad (5.23)$$

Desna strana nejednakosti (5.23) ne zavisi od impulsa p , tako da prisustvo (5.22) u imeniocu integranda na desnoj strani jednačine (5.21) ne utiče na UV asimptotsko ponašanje integranda. Ovo može da se predstavi kao

$$\begin{aligned} \lim_{p_0^2 + p_3^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^2 + p_3^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 + m^2} &\simeq \\ &\simeq \frac{1}{p_0^2 + p_3^2 + \mu^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(p_0^2 + p_3^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

gde je μ proizvoljan dimenzioni parametar. Njegova uloga će biti jasnija malo kasnije.

Za $m \neq 0$ integral (5.21) očigledno nema IC divergencija, pa prema tome treba samo analizirati asimptotiku UV sektora članova u (5.25) koji su reda $\mathcal{O} \left(\frac{1}{(p_0^2 + p_3^2)^2} \right)$ i koji su UV konačni. Dobija se

$$\begin{aligned} \text{NPl.} &= \frac{i}{m^2 - q^2 - i0^+} \frac{1}{m^2 - s^2 - i0^+} \delta(q_0 - s_0) \delta(q_3 - s_3) \frac{\pi^2}{2 \left(\sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \right)^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \\ &+ \text{konačni članovi.} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uloga parametra μ je dvoznačna. Njegovo prisustvo osigurava IC konvergenciju u vodećem članu u UV sektoru (5.25) u integralu (5.21). Činjenica da UV divergentni deo zavisi od proizvoljnog parametra μ , zapravo ukazuje na neodređenost suptrakcije logaritamske divergencije koja je prisutna i u komutativnom slučaju.

Kratak pregled dosadašnjih rezultata može da se da u par tačaka:

- Nekomutativni efekti nisu prisutni u planarnim dijagramima.
- Neplanarni dijagrami naglo povećaju stepen divergencije za male vrednosti impulsa q_3 , što je nestandardno UV/IC mešanje, jer dijagram u svakom slučaju divergira. U komutativnom slučaju nema razlike između planarnog i neplanarnog dijagrama, oni imaju i logaritamsku i kvadratnu divergenciju. U nekomutativnom slučaju, efekti nekomutativnosti ponište kvadratnu UV divergenciju, dok logaritamska preživljava. Međutim, cena koju treba platiti

je prisustvo IC divergencije za male vrednosti impulsa q_3 koja nije prisutna u komutativnom slučaju.

- Neplanarni dijagram (5.25) ima povećan stepen divergencije i u slučaju kada $a \rightarrow 0$, kao i za bilo koji vrednosti a i q_3 za koje važi $aq_3 = 2\pi k$ gde je k proizvoljan ceo broj. Ovakva situacija je tipična za UV/IC mešanje: limes $a \rightarrow 0$ ne komutira sa limesom $\Lambda \rightarrow \infty$. Ovo za posledicu ima nepostojanje glatkog nekomutativnog limesa.
- Neplanarna korekcija propagatora nije proporcionalna sa $\delta(q - s)$, što znači da je deformisani zakon održanja impulsa, koji važi na klašičnom nivou, na kvantnom nivou narušen.

Na kraju ovog poglavlja treba prodiskutovati šta bi se dogodilo da je iskorišten tvist (4.1), sa $X_0 = \partial_t$ umesto $X_3 = \partial_z$. U tom slučaju, konjugovani impuls q_0 bi se našao u izrazu $\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2$ umesto p_3 , kao i u jednačinama (5.21) i (5.22). Vikova rotacija $p_0 \rightarrow ip_0$ ne bi pomogla da se izračuna neplanarni doprinos propagatoru. Nameštanjem impulsa q i s tako da su uglovi ψ i ζ jednaki, pokazuje se da nakon Vikove rotacije integrand u izrazu za neplanarni dijagram postaje

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m^2 + p_0^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, ip_0))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, ip_0))^2} = \\ & = \frac{1}{m^2 + p_0^2 + \frac{2|s||q|(1 - \cosh(ap_0)) + (|q| - |s|)^2}{4\left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right)\right)^2}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Imenilac u ovom izrazu je očigledno negativan za velike vrednosti impulsa p_0 . Sa druge strane, kada je p_0 malo, izraz (5.27) ima singularnost za konačnu vrednost p_0 , što sprečava integraciju po p_0 . Ovakvo ponašanje nije neobično, jer je poznato da su kvantne teorije sa prostor-vremenskom nekomutativnošću problematične.

5.3 Trodimenzionalni slučaj

Kada se broj dimenzija u kvantnoj teoriji polja smanjuje, najčešće se UV osobine teorije poboljšavaju. Iz tog razloga je zanimljivo uporediti kvante korekcije propagatora u četvorodimenzionalnom sa trodimenzionalnim slučajem.

U slučaju 2+1 dimenzije, nemamo treći prostorni pravac, pa se t nameće kao prirodan kandidat za nekomutativnu koordinatu u komutacionim relacijama. Sa

druge strane, kao što je ranije napomenuto, kada je nekomutativnost u vremenskom pravcu, postoji problem sa unitarnosti i tada ni Vikova rotacija ne pomaže da se izračunaju dijagrami sa petljama.

Iz tog razloga će biti analizirana euklidska verzija trodimenzionalne kvantne teorije polja, koja je opisana klasičnim Lagranžijanom

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \star \partial^\mu \phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \phi(x) \star \phi(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi(x) \star^4 \right), \quad (5.27)$$

gde su koordinate x_1, x_2 i x_3 . U ovom slučaju, odgovarajuća deformisana simetrija bi bila opisana tvistovanom Hopfovom Poenkareovom algebrom, koja je opisana u potpoglavlju 4.5, s tim da sve metričke tenzore $\eta_{\mu\nu}$ treba zameniti sa $\delta_{\mu\nu}$. U tom slučaju, komutacione relacije između koordinata su

$$\begin{aligned} [x^3 \star, x^1] &= -iax^2, \\ [x^3 \star, x^2] &= iax^1. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Glavna razlika u odnosu na 3+1 dimenziju u komutativnom slučaju je to da je divergencija u 2+1 slučaju linearna po Λ , a ne kvadratna kao u 3+1 slučaju. Pošto je planarni dijagram isti kao u komutativnom slučaju, sva pažnja će biti na neplanarnom dijagramu. Doprinos neplanarnog dijagrama može se proučavati na osnovu prethodnog odeljka, eliminisanjem p_3 i $\int dp_3$, kada god se pojave. Pošto je teorija euklidska od samog početka, Vikova rotacija nije potrebna. Regularizacija parametrom odsecanja Λ daje sledeći rezultat

$$\begin{aligned} \text{NPl.} &= \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{s^2 + m^2} \frac{\pi^2 \delta(q_3 - s_3)}{2 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right) \right)^2} \times \\ &\times \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp_3 \frac{1}{p_3^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Za razliku od komutativnog slučaja, integral (5.29) je UV konačan. U limesu $\Lambda \rightarrow \infty$, kombinacija $(\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2$ je previše komplikovana pa integral ne može da se egzaktno izračuna (uporediti sa jednačinom (5.22)). Međutim, kada se iskoristi relacija (5.23) dobija se

$$\frac{\pi \left| \sin\left(\frac{aq_3}{2}\right) \right|}{\sqrt{m^2 \left(\sin\left(\frac{aq_3}{2}\right) \right)^2 + \frac{(|q|+|s|)^2}{4}}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{p_3^2 + (\mathcal{P}_1(q, s, p_3))^2 + (\mathcal{P}_2(q, s, p_3))^2 + m^2}$$

$$\leq \frac{\pi \left| \sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \right|}{\sqrt{m^2 \left(\sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \right)^2 + \frac{(|q|-|s|)^2}{4}}}. \quad (5.30)$$

Neplanarna korekcija je i dalje singularna kada

$$\sin \left(\frac{aq_3}{2} \right) \rightarrow 0, \quad (5.31)$$

tako da dobar komutativni limes ne postoji.

Odgovarajući dijagrami su u komutativnoj teoriji linearno divergentni po Λ . Činjenica da angularna nekomutativnost UV divergenciju u komutativnoj teoriji zamenjuje sa IC divergencijom u nekomutativnoj teoriji je zapravo UV/IC mešanje. Jasno je kada se broj dimenzija smanjuje da se renormalizacione osobine kvantnih angularnih nekomutativnih teorija poboljšavaju. Međutim, UV/IC mešanje ostaje prisutno i u 2+1 dimenziji i u 3+1 dimenziji.

6 Nekomutativno klasično skalarno polje u zakrivljenom prostoru

Tvist (4.12) omogućava proučavanje nekomutativnog skalarnog polja u gravitacionom polju Rajsner–Nordstromove crne rupe. Rajsner–Nordstromova crna rupa je sferno simetrično rešenje Ajnštajnovih jednačina u prisustvu elektromagnetnog polja. Opisana je sa dva parametra, masom M i naelektrisanjem Q ⁵. Metrika Rajsner–Nordstromove geometrije je

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi). \quad (6.1)$$

Na početku će biti razmatrana nekomutativna $U(1)_*$ gradijentna teorija kompleksnog naelektrisanog skalarnog polja u proizvoljnoj zakrivljenoj pozadinskoj geometriji. Jedini zahtev koji pozadinska geometrija mora da zadovoljava je da ∂_t i ∂_φ budu Killingovi vektori.

Dejstvo se može dobiti iz (5.1) koristeći princip minimalne zamene i uzimajući da je nekomutativno skalarno polje $\hat{\phi}$ kompleksno. Uvođenjem 1-forme gradijentnog polja $\hat{A} = \hat{A}_\mu \star dx^\mu$ u teoriju dejstvo postaje

$$\begin{aligned} S[\hat{\phi}, \hat{A}] &= \int \left(d\hat{\phi} - i\hat{A} \star \hat{\phi} \right)^+ \wedge_\star \star_H \left(d\hat{\phi} - i\hat{A} \star \hat{\phi} \right) \\ &- \int \frac{\mu^2}{4!} \hat{\phi}^+ \star \hat{\phi} \epsilon_{abcd} e^a \wedge_\star e^b \wedge_\star e^c \wedge_\star e^d - \frac{1}{4q^2} \int (\star_H \hat{F}) \wedge_\star \hat{F}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Masa nekomutativnog skalarnog polja $\hat{\phi}$ je μ , dok je njegovo naelektrisanje q . 2-forma tenzora jačine polja je definisana kao

$$\hat{F} = d\hat{A} - \hat{A} \wedge_\star \hat{A} = \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \star dx^\mu \wedge_\star dx^\nu. \quad (6.3)$$

⁵U najopštijem slučaju može da se razmatra Rajsner–Nordstromova crna rupa koja ima ukupan magnetni monopol $P \neq 0$ [114]. Tada je $f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}$.

Da bi se masa skalarnog polja $\hat{\phi}$ konzistentno uvela u teoriju, potrebno je uvesti tetrade $e^a = e_\mu^a \star dx^\mu$, za koje važi $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a \star e_\nu^b$. Ovo je neophodno da bi dejstvo moglo da se zapiše u nekoordinatnom zapisu kao integral maksimalne forme. U koordinatnom bazu, dejstvo je

$$\begin{aligned} S[\hat{\phi}, \hat{A}] &= \int d^4x \sqrt{-g} \star \left(g^{\mu\nu} \star D_\mu \hat{\phi}^+ \star D_\nu \hat{\phi} \mu^2 \hat{\phi}^+ \star \hat{\phi} \right) \\ &- \frac{1}{4q^2} \int d^4x \sqrt{-g} \star g^{\alpha\beta} \star g^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\alpha\mu} \star \hat{F}_{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Skalarno polje $\hat{\phi}$ je kompleksno naelektrisano skalarno polje koje se transformiše po fundamentalnoj reprezentaciji nekomutativne $U(1)_\star$ grupe. Njegov kovarijantni izvod definisan je kao

$$D_\mu \hat{\phi} = \partial_\mu \hat{\phi} - i \hat{A}_\mu \star \hat{\phi}.$$

Komponente nekomutativnog tenzora jačine polje prema (6.3) su

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu \star \hat{A}_\nu]. \quad (6.5)$$

Pozadinsko gravitaciono polje $g_{\mu\nu}$ za sada nije određeno, osim ranije napomene da su ∂_t i ∂_φ Killingovi vektori. Posledica toga je da svi \star -proizvodi u $\sqrt{-g} \star g^{\alpha\beta} \star g^{\mu\nu}$ mogu da se uklone s obzirom na to da tvist (4.12) ne deluje na metrički tenzor.

Može da se proveriti da su dejstva (6.4) i (6.4) invarijantna na infinitezimalne $U(1)_\star$ gradijentne transformacije, koje su definisane na sledeći način:

$$\begin{aligned} \delta_\star \hat{\phi} &= i \hat{\Lambda} \star \hat{\phi}, \\ \delta_\star \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\Lambda} + i[\hat{\Lambda} \star \hat{A}_\mu], \\ \delta_\star \hat{F}_{\mu\nu} &= i[\hat{\Lambda} \star \hat{F}_{\mu\nu}], \\ \delta_\star g_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

gde je $\hat{\Lambda}$ nekomutativni gradijentni parametar. Dejstva (6.4) i (6.4) su takođe invarijantna na konačne nekomutativne $U(1)_\star$ transformacije, koje su definisane kao:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}' &= U_\star \star \hat{\phi}, \\ \hat{A}'_\mu &= -U_\star \star \partial_\mu U_\star^{-1} + U_\star \star \hat{A}_\mu \star U_\star^{-1}, \end{aligned}$$

sa $U_\star = e_\star^{i\hat{\Lambda}} = 1 + i\hat{\Lambda} + \frac{1}{2}i\hat{\Lambda} \star i\hat{\Lambda} + \dots$

6.1 Sajberg-Vitenovo preslikavanje

Postoje različiti pristupi za konstruisanje nekomutativnih gradijentnih teorija. U ovom radu korišten je pristup obavijajuće algebre [115] i Sajberg-Vitenovo preslikavanje [6]. Problem kod nekomutativnih gradijentnih teorija je to što se komutator gradijentnih polja ne zatvara u Lijevu algebru jer je

$$[A \star B] = \frac{1}{2}(A^a \star B^b + B^b \star A^a)[T^a, T^b] + \frac{1}{2}(A^a \star B^b - B^b \star A^a)\{T^a, T^b\}, \quad (6.7)$$

gde su T^a generatori gradijentne simetrije. Pojavom antikomutatora se javljaju dodatni stepeni slobode u teoriji⁶. Jedan od načina da se prevaziđe ovaj problem je prelazak sa Lijeve na univerzalno obavijajuću algebru koja obezbeđuje da gradijentne transformacije budu zatvorene

$$[\delta_{\epsilon_1}^* \star \delta_{\epsilon_2}^*] = \delta_{[\epsilon_1 \star \epsilon_2]}^*, \quad (6.8)$$

gde su ϵ_i parametri nekomutativnih kalibracionih transformacija. Razvoj nekomutativnog gradijentnog polja \hat{A}_μ po bazu univerzalno obavijajuće algebre je

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu = & A_\mu^a T^a + \frac{1}{2!} A_\mu^{ab} \{T^a, T^b\} \\ & + \frac{1}{3!} A_\mu^{abc} (T^a \{T^b, T^c\} + T^b \{T^c, T^a\} + T^c \{T^a, T^b\}) + \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Polja $A_\mu^a, A_\mu^{ab}, A_\mu^{abc} \dots$ predstavljaju nova polja. Na ovaj način se u teoriju uvodi beskonačno stepeni slobode. Sajberg-Vitenovo preslikavanje omogućava da se nekomutativne promenjive izraze u funkciji odgovarajućih komutativnih promenjivih. Osnovni iskaz Sajberg-Vitenovog preslikavanja je ekvivalentnost nekomutativnih i komutativnih gradijentnih transformacija:

$$\hat{A}_\mu(A) + \delta_\epsilon^* \hat{A}_\mu(A) = \hat{A}_\mu(A + \delta_\epsilon A). \quad (6.10)$$

Iz ovog uslova se dobijaju veze između nekomutativnih i odgovarajućih komutativnih promenljivih. Na ovaj način se izbegava problem kvantizacije naboja u $U(1)_\star$ gradijentnoj teoriji. U slučaju nekomutativne Jang-Milsove gradijentne teorije, Sajberg-Vitenovo preslikavanje obezbeđuje da broj stepeni slobode u nekomutativnoj teoriji bude isti kao u odgovarajućoj komutativnoj teoriji. Prednost ovog pristupa je da se ne uvode novi stepeni slobode.

⁶Samo u slučaju $U(N)$ gradijentnih grupa u fundamentalnoj reprezentaciji, ovaj problem ne postoji, jer se i antikomutatori zatvaraju u algebri.

Koristeći Sajberg-Vitenovo preslikavanje nekomutativna polja mogu da se izraze u funkciji odgovarajućih komutativnih polja i mogu da se razviju u red po parametru deformacije a . Rešenje Sajberg-Vitenovog preslikavanja za proizvoljnu Abelovu tvist deformaciju je izračunato i rezultati su poznati u svim redovima po nekomutativnom parametru [116]. Primenom ovih rezultata na tvist (4.12), polja mogu da se razviju do prvog reda po parametru deformacije a i data su kao:

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma} A_\rho(\partial_\sigma\phi + D_\sigma\phi), \quad (6.11)$$

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}), \quad (6.12)$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho(\partial_\sigma F_{\mu\nu} + D_\sigma F_{\mu\nu}) + \theta^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu}. \quad (6.13)$$

$U(1)$ kovarijantni izvod polja ϕ definisan je kao $D_\mu\phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi$, dok je u slučaju $U(1)$ gradijentne teorije $D_\sigma F_{\mu\nu} = \partial_\sigma F_{\mu\nu}$. Važno je napomenuti da je polje A_μ reskalirano konstantom interakcije q između polja ϕ i A_μ (naelektrisanje polja ϕ), pa je $A_\mu = qA_\mu$ (videti 6.4).

6.2 Razvijeno dejstvo i jednačine kretanja

Koristeći rešenja Sajberg-Vitenovog preslikavanja i razvijajući \star -proizvod u (6.4) dobija se dejstvo u prvom redu po parametru deformacije a :

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \sqrt{-g} & \left(-\frac{1}{4q^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + g^{\mu\nu} D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi \right. \\ & + \frac{1}{8q^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \theta^{\alpha\beta} (F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - 4F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} F_{\rho\sigma}) + \frac{\mu^2}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \phi^\dagger \phi \\ & \left. + \frac{\theta^{\alpha\beta}}{2} g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} D_\mu \phi^\dagger F_{\alpha\beta} D_\nu \phi + (D_\mu \phi^\dagger) F_{\alpha\nu} D_\beta \phi + (D_\beta \phi^\dagger) F_{\alpha\mu} D_\nu \phi \right) \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Da bi se izračunale jednačine kretanja, dejstvo (6.14) se varira po poljima. Varijacijom dejstva po polju ϕ^\dagger dobija se

$$\begin{aligned} & g^{\mu\nu} \left((\partial_\mu - iA_\mu) D_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda \phi \right) - \mu^2 \phi \\ & + \frac{\mu^2}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \phi - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \left((\partial_\mu - iA_\mu) (F_{\alpha\beta} D_\nu \phi) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda F_{\alpha\beta} D_\lambda \phi \right. \\ & \left. - 2(\partial_\mu - iA_\mu) (F_{\alpha\nu} D_\beta \phi) + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda F_{\alpha\lambda} D_\beta \phi - 2(\partial_\beta - iA_\beta) (F_{\alpha\mu} D_\nu \phi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

S obzirom na to da pozadinska metrika $g_{\mu\nu}$ nije ravna, odgovarajući Kristofelovi

simboli $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se pojavljuju u jednačini kretanja.

Variranjem dejstva (6.14) po polju A_λ dobija se

$$\begin{aligned} & \partial_\mu F^{\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^\rho F^{\mu\lambda} + \theta^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} (\partial_\mu (F_{\alpha\beta} F^{\mu\lambda}) + \Gamma_{\mu\rho}^\rho F_{\alpha\beta} F^{\mu\lambda}) \right. \\ & \left. + \partial_\mu (F_\alpha^\mu F_\beta^\lambda) + \Gamma_{\mu\rho}^\rho F_\alpha^\mu F_\beta^\lambda - \partial_\alpha (F_{\beta\mu} F^{\mu\lambda}) \right) \\ & \left. + \theta^{\alpha\lambda} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu (F_{\beta\nu} F^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\rho}^\rho F_{\beta\nu} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} \partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) = q^2 j^\lambda, \end{aligned} \quad (6.16)$$

sa

$$\begin{aligned} j^\lambda &= \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) j_{(0)}^\lambda - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \left(-F_{\alpha\mu} j_\beta^{(0)} - \partial_\alpha (D_\mu \phi^\dagger D_\beta \phi + D_\beta \phi^\dagger D_\mu \phi) \right) \\ & - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\lambda} \left(-F_{\alpha\nu} j^{\nu(0)} + g^{\mu\nu} \partial_\alpha (D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi) \right) \\ & - \partial_\nu (g^{\mu\nu} (D_\mu \phi^\dagger D_\alpha \phi + D_\alpha \phi^\dagger D_\mu \phi)) - \Gamma_{\nu\rho}^\rho (g^{\mu\nu} (D_\mu \phi^\dagger D_\alpha \phi + D_\alpha \phi^\dagger D_\mu \phi)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Struja u nultom redu je definisana kao

$$j_{(0)}^\lambda = i g^{\mu\lambda} (D_\mu \phi^\dagger \phi - \phi^\dagger D_\mu \phi), \quad (6.18)$$

$$\text{i } j_\beta^{(0)} = g_{\beta\lambda} j_{(0)}^\lambda.$$

6.3 Skalarno polje u Rajsner-Nordstromovoj geometriji

Do sada je geometrija bila relativno proizvoljna. Sada će biti izabrana geometrija Rajsner-Nordstromove crne rupe. Kako je od interesa samo dinamika skalarnog polja u fiksiranoj Rajsner-Nordstromovoj geometriji, biće razmatrana samo jednačina (6.15). Gravitaciono polje $g_{\mu\nu}$ i $U(1)$ gradijentno polje A_μ su fiksirani i predstavljaju gravitaciono polje i elektromagnetno polje Rajsner-Nordstromove crne rupe.

Treba se podsetiti da je metrički tenzor Rajsner-Nordstromove crne rupe

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

gde su $f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$, M je masa crne rupe, dok je Q naelektrisanje crne rupe.

Odgovarajući nenulti Kristofelovi simboli su:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^r &= \frac{f}{r} \left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right), & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{rf} = -\Gamma_{rt}^t, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -rf \sin^2 \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -rf, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot \theta, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Rajsner-Nordstromova crna rupa je nerotirajuća, stoga je jedina nenulta komponenta gradijentnog polja skalarni potencijal

$$A_0 = -\frac{qQ}{r}. \tag{6.21}$$

Odgovarajuće električno polje dato je sa

$$F_{r0} = \frac{qQ}{r^2}. \tag{6.22}$$

Jedine nenulte komponente nekomutativnog parametra $\theta^{\alpha\beta}$ su $\theta^{t\varphi} = -\theta^{\varphi t} = a$. Unoseći ove komponente u (6.15) dobija se sledeća jednačina

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{f} \partial_t^2 - \Delta + (1-f) \partial_r^2 + \frac{2M}{r^2} \partial_r + 2iqQ \frac{1}{rf} \partial_t - \frac{q^2 Q^2}{r^2 f} - \mu^2 \right) \phi \\
&+ \frac{aqQ}{r^3} \left(\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) \partial_\varphi + rf \partial_r \partial_\varphi \right) \phi = 0,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

gde je Δ uobičajen Laplasov operator.

U cilju rešavanja ove jednačine, treba razdvojiti promenjive tako da je

$$\phi_{lm}(t, r, \theta, \varphi) = R_{lm}(r) e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{6.24}$$

gde su $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sferni harmonici. Zamenom pretpostavljenog rešenja (6.24) u (6.23), može da se nađe jednačina za radijalnu funkciju $R_{lm}(r)$

$$\begin{aligned}
&f R_{lm}'' + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{M}{r} \right) R_{lm}' \\
&- \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{f} \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 + \mu^2 \right) R_{lm} \\
&- ima \frac{qQ}{r^3} \left(\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) R_{lm} + rf R_{lm}' \right) = 0.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Nulti red ove jednačine odgovara jednačini za radijalnu funkciju R_{lm} u [117, 118],

dok su nekomutativne korekcije novina. Tema sledećeg poglavlja će biti rešavanje ove jednačine sa odgovarajućim graničnim uslovima.

7 Nekomutativne skalarne kvazinormalne mode

U ovom poglavlju će se rešavati jednačina (6.25) uz granične uslove koji odgovaraju kvazinormalnim modama. Biće primenjena tri metoda: WKB metod i metod verižnih razlomaka za neekstremalnu crnu rupu i analitički metod kada je crna rupa približno ekstremalna.

7.1 WKB metod

WKB metod je semianalitički metod koji je prvi put upotrebljen za računanje rasejanja u okolini crnih rupa [45]. Osnovna ideja WKB metoda je da se pronađe preklapanje asimptotskih rešenja u blizini maksimuma potencijala. Od značaja su asimptotska rešenja sa graničnim uslovima za kvazinormalne mode. Preklapanjem asimptotskih rešenja se dobija kvantizacijski uslov, koji podseća na kvantizacijski uslov kvantnog harmonijskog oscilatora. Kvantizacijski uslov daje rešenja frekvencija kvazinormalnih moda.

7.1.1 Modifikovana kornjačina koordinata

Za primenu WKB metoda za računanje spektra kvazinormalnih moda, osnovna pretpostavka je da jednačina kretanja ima oblik Šredingerove jednačine

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + V\psi = 0. \quad (7.1)$$

To znači da jednačina (6.25) treba da se svede na oblik (7.1) nekom smenom promenljivih. Prva smena koju treba izvršiti je $\psi(r) = rR$. Jednačina (6.25) tada postaje

$$f\psi'' + \frac{2}{r^2}(M - \frac{Q^2}{r} - imaqQf)\psi' \quad (7.2)$$

$$-\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 - \frac{1}{f}\left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\left(M - \frac{Q^2}{r}\right) - iam\frac{qQ}{r^3}\left(1 - \frac{M}{r}\right)\right)\psi.$$

U komutativnom slučaju, prelaskom sa radijalne na kornjačinu koordinatu (tortoise coordinate), jednačina kretanja dobija oblik jednačine (7.1)⁷. Treba razmotriti definiciju kornjačine koordinate r_* u nekomutativnom slučaju. Obzirom da je za svaku dijagonalnu metriku moguće definisati kornjačinu koordinatu, logičan pokušaj bi bio da se standardna definicija

$$dr_* = \frac{dr}{f}, \quad (7.3)$$

primeni na jednačinu kretanja (6.25). Međutim, data smena ne dovodi do željenog oblika (7.1). Naime, član proporcionalan sa $\frac{d\psi}{dr_*}$ ne iščezava. Ovaj nepoželjni član je proporcionalan sa parametrom nekomutativnosti a , tako da kornjačina koordinata mora da se modifikuje doprinosom koji dolazi od nekomutativnosti da bi se jednačina (6.25) svela na oblik Šredingerove jednačine (7.1).

Može se pokazati da smena koordinata

$$\frac{dy}{dr} = \frac{1}{f\left(1 + iam\frac{qQ}{r}\right)}, \quad (7.4)$$

transformiše jednačinu (7.2) u oblik Šredingerove jednačine

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + V\psi = 0. \quad (7.5)$$

Potencijal V ima sledeći oblik

$$V = rf \left[-\frac{2}{r^3}\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{f}\left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 + \mu^2\right) \right. \\ \left. + iam\frac{qQ}{r^4}\left(1 - \frac{7M}{r} + 6\frac{Q^2}{r^2}\right) - 2iam\frac{qQ}{r^2}\left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{f}\left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 + \mu^2\right) \right]. \quad (7.6)$$

Pošto je nekomutativnost tretirana perturbativno do prvog reda po parametru nekomutativnosti, onda i jednačine (7.4) i (7.5) važe samo u prvom redu po parametru nekomutativnosti a .

⁷Uvođenjem kornjačine koordinate se proširuje domen sa $r \in (r_+, \infty)$ na $r_* \in (-\infty, \infty)$ što kao posledicu ima da se vreme efektivno usporava. Zbog aluzije na kornjačinu sporost, koordinata r_* je nazvana kornjačina koordinata.

Eksplícitan oblik modifikovane kornjačine koordinate dobija se integracijom relacije (7.4). Radeći perturbativno u prvom redu po parametru nekomutativnosti, modifikovana kornjačina koordinata se može zapisati kao

$$y = y^{(0)} + y^{(1)} = \int \frac{dr}{f} - iamqQ \int \frac{dr}{rf}. \quad (7.7)$$

Prvi deo je obična Rajsner-Nordstromova kornjačina koordinata $y^{(0)} = r_*^{RN}$, dok je drugi deo doprinos od nekomutativne deformacije prostorvremena.

Integracijom (7.7) se dobija

$$\begin{aligned} y &= y^{(0)} - iamqQ \left\{ \frac{r_+}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-) \right\}, \\ &= r + \frac{r_+}{r_+ - r_-} (r_+ - iamqQ) \ln(r - r_+) - \frac{r_-}{r_+ - r_-} (r_- - iamqQ) \ln(r - r_-). \end{aligned} \quad (7.8)$$

U limesu $a \rightarrow 0$ se eksplicitno dobija standardna kornjačina koordinata za Rajsner-Nordstromovu metriku

$$y^{(0)} \equiv r_*^{RN} = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-). \quad (7.9)$$

Modifikovana kornjačina koordinata (7.8) ne menja poziciju horizonta događaja, što ima za posledicu da deformacija prostorvremena ne doprinosi Hokingovom zračenju u semiklasičnoj tunelirajućoj aproksimaciji [119, 120].

Koordinata y (7.8) ima sve važne osobine kao i standardna kornjačina koordinata u Rajsner-Nordstromovoj geometriji. Za $r \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$, dok za $r \rightarrow r_+$, $y \rightarrow -\infty$. Pored asimptotskog ponašanja kornjačine koordinate, potrebno je ispitati kakvo je asimptotsko ponašanje potencijala (7.6). Kada $r \rightarrow +\infty$, potencijal V teži vrednosti $V \rightarrow \omega^2 - \mu^2$. Na sličan način, kada $r \rightarrow r_+$, potencijal V teži vrednosti $V \rightarrow \left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)^2 \left(1 - 2iam\frac{qQ}{r_+}\right)$. Ova dva limesa su u potpunosti u saglasnosti sa vrednošću efektivnog potencijala u [121] za maseno naelektrisano skalarno polje u Ker-Njumanovoj (Kerr-Newman) geometriji. Da bi se videlo slaganje, u dobijenim rezultatima u ovoj tezi treba uzeti komutativni limit ($a \rightarrow 0$), dok u rezultatu [121] treba uzeti da je angularni momenat Ker-Njumanove crne rupe jednak nuli.

7.1.2 Spektar kvazinormalnih moda

Korištenjem WKB metoda, dobija se sledeći uslov za izračunavanje frekvencija kvazinormalnih moda:

$$-\frac{V_0}{\sqrt{2V_0''}} - i \sum_{j=2}^6 \Lambda_j = i\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (7.10)$$

gde je $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Uslov (7.10) zahteva da se izračuna vrednost potencijala u maksimumu kao i vrednost drugog izvoda u maksimumu, što zapravo predstavlja zakrivljenje krive potencijala u zavisnosti od r [45, 122]. Pomenuti član daje glavni doprinos spektru kvazinormalnih moda, dok korektivni članovi Λ_j zavise od vrednosti viših izvoda potencijala (do j -og reda) u tački maksimuma. Tačne vrednosti tih WKB korektivnih članova Λ_2 i Λ_3 se mogu pronaći u [122], dok članovi $\Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$ mogu da se pronađu u [20]. Uslov (7.10) je dobijen preklapanjem dva WKB rešenja sa jedne i druge strane potencijalne barijere određene sa $-V$ sa rešenjem unutar barijere, tako da se preklapanje istovremeno vrši kroz granične tačke.

Prateći proceduru datu u [118], treba uvesti nove bezdimenzione parametre

$$x = \frac{r - r_+}{r}, \quad \Omega = \frac{\omega r_+}{qQ} - 1. \quad (7.11)$$

Efektivni potencijal izražen preko ovih novih parametara izgleda kao

$$\begin{aligned} V(x) = & -V_{eff} = \left(\frac{qQ}{r_+}\right)^2 (x + \Omega)^2 - \mu^2 \frac{r_+ - r_-}{r_+} x - \frac{H(r_+)}{r_+^2} \frac{r_+ - r_-}{r_+} x \\ & + iam \frac{qQ}{r_+} \frac{r_+ - r_-}{r_+} \left[\frac{1}{r_+^2} - \frac{7M}{r_+^3} + 6 \frac{Q^2}{r_+^4} - 2 \frac{l(l+1)}{r_+^2} - 2\mu^2 \right] x \\ & + 2iam \left(\frac{qQ}{r_+}\right)^3 \Omega^2 + 2iam \left(\frac{qQ}{r_+}\right)^3 (2\Omega - \Omega^2)x + O(x^2, ax^2), \quad (7.12) \end{aligned}$$

gde je $H(r_+) = l(l+1) + \frac{2M}{r_+} - \frac{2Q^2}{r_+^2} = l(l+1) + \frac{r_+ - r_-}{r_+}$. Iz prethodnih definicija jasno sledi da je $H(r_+) < l(l+1) + 1$. Treba napomenuti da su svi članovi koji su kvadratični po x zanemareni u odnosu na parabolički član $\sim (x + \Omega)^2$ kao nefizički. Razlog za takvu aproksimaciju leži u činjenici da ako zadržimo taj član, efektivni potencijal ne bi opisivao realističan fizički problem. U aproksimaciji koja se ovde koristi, parabolički član $\sim (x + \Omega)^2$ ima maksimum veoma blizu horizonta događaja. Uračunavajući članove koji su kvadratični po x , maksimum potencijala bi se udaljio od horizonta, što je nepoželjno iz fizičkih razloga. Članovi koji su

reda $O(ax^2)$ mogu da se zanemare jer će njihov doprinos biti drugog reda unutar date aproksimacije.

Kada je jednom efektivni potencijal nekomutativnog naelektrisanog skalarnog polja u Rajsner-Nordstromovoj geometriji izračunat, daljnja analiza će se fokusirati na prostor parametara gde je ispunjen uslov $qQ \gg l + 1$. Razlog za ovaj izbor je pokušaj da se spektar dobije u analitičkom obliku. Iz ranije ustanovljenog uslova $H(r_+) < l(l + 1) + 1$ i dodatnog uslova $qQ \gg l + 1$, sledi $H(r_+)/q^2Q^2 \ll 1$. Da bi analitički razvoj bio moguć, neophodna je još jedna aproksimacija, koja ograničava masu μ skalarnog polja: $\mu^2r_+^2/q^2Q^2 \ll 1$.

Očekivano je da rezultat za frekvencije kvazinormalnih moda bude blizak klasičnom rezultatu $\omega = \frac{qQ}{r_+}$, što dovodi do zaključka da je veličina Ω mnogo manja od jedinice. Kao u referenci [118], pretpostavka je da je Ω reda veličine kao i $H(r_+)/q^2Q^2$ i $\mu^2r_+^2/q^2Q^2$. Nakon toga, treba odrediti red veličine parametra a tako da članovi koji od njega zavise ne daju doprinos koji će biti veći od malih veličina koje su ranije definisane. Sumirajući na kraju, tražena aproksimacija može da se zapiše kao: $H(r_+)/q^2Q^2 \sim \mu^2r_+^2/q^2Q^2 \sim \Omega \sim laqQ/r_+ \ll 1$.

Pozicija ekstremuma efektivnog potencijala je određena uslovom $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} = 0$. Ovaj uslov daje sledeću vrednost

$$\begin{aligned} x_0 + \Omega = & \frac{1}{2q^2Q^2} \frac{r_+ - r_-}{r_+} \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right. \\ & \left. - iam \frac{qQ}{r_+} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l + 1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right] - 2iam \frac{q^3Q^3}{r_+} (2\Omega - \Omega^2). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Jednostavno se vidi da je vrednost x_0 unutar date aproksimacije veoma mala, što je posledica toga da je maksimum potencijala veoma blizak horizontu događaja.

Vrednost radijalne koordinate r_0 u kojoj efektivni potencijal dostiže ekstremalnu vrednost može da se odredi iz uslova $x_0 = 1 - \frac{r_+}{r_0}$, što daje

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} = & \frac{\Omega + 1}{r_+} - \frac{1}{2q^2Q^2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right. \\ & \left. - iam \frac{qQ}{r_+} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l + 1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right] + 2iam \frac{q^3Q^3}{r_+^2} (2\Omega - \Omega^2). \end{aligned}$$

U prvom redu po $\frac{H(r_+)}{q^2Q^2}$, $\frac{\mu^2r_+^2}{q^2Q^2}$, Ω i a , prethodna jednakost postaje

$$r_0 = r_+ \left[1 - \Omega + (r_+ - r_-) \left[\frac{H(r_+)}{2q^2Q^2r_+} + \frac{\mu^2r_+}{2q^2Q^2} - iam \frac{1}{2qQr_+^2} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right] \right].$$

Na isti način mogu da se odrede i ostale veličine koje su neophodne za potrebnu analizu (pogledati relaciju (7.16))

$$\left(\frac{dx}{dr} \right)_{r=r_0} = \frac{1}{r_+} \left[1 + 2\Omega - \frac{1}{q^2Q^2} \frac{r_+ - r_-}{r_+} \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 - iam \frac{qQ}{r_+} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right] \right],$$

i

$$f(r_0) = \frac{(r_0 - r_+)(r_0 - r_-)}{r_0^2} = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \left[r_+(r_+ - r_-) \left[\frac{H(r_+)}{2q^2Q^2r_+} + \frac{\mu^2r_+}{2q^2Q^2} - iam \frac{1}{2qQr_+^2} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right] - \Omega r_+ \right]. \quad (7.14)$$

Ekstremalna vrednost V_0 negativnog efektivnog potencijala $V(x) = -V_{eff}$ je

$$V_0 = -\frac{1}{4q^2Q^2r_+^2} \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+} \right)^2 \left(H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right)^2 + \mu^2\Omega \frac{r_+ - r_-}{r_+} + \frac{H(r_+)(r_+ - r_-)}{r_+^3} \Omega. \quad (7.15)$$

Još jednom treba napomenuti da su sve ove veličine izračunate u prvom redu po veličinama H/q^2Q^2 , μ^2/q^2Q^2 , Ω i $laqQ/r_+$.

Pošto je u tački ekstremuma x_0 prvi izvod $\frac{dV}{dx} = 0$ uslov za kvazinormalne mode (7.10) daje

$$-V_0 = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} \left(\frac{dx}{dr} \right)_{r=r_0}^2 \left(\frac{dr}{dy} \right)_{y=y_0}^2}. \quad (7.16)$$

Znajući da je $\frac{dr}{dy} = f(r) \left(1 + iam \frac{qQ}{r} \right)$ i zamenjujući prethodno dobijene rezultate

$\left(\frac{dx}{dr}\right)_{r=r_0}$, V_0 i $f(r_0)$ u (7.16), dobija se spregnuti sistem jednačina

$$\begin{aligned} & \frac{H^2(r_+)(r_+ - r_-)}{4q^2Q^2r_+} + \frac{\mu^4r_+^3}{4q^2Q^2}(r_+ - r_-) + \frac{H(r_+)\mu^2r_+}{2q^2Q^2}(r_+ - r_-) \\ & - \Omega_R \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right] = 2qQ \left(n + \frac{1}{2} \right) \Omega_I \\ & + am \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right), \\ & - \Omega_I \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right] = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{r_+ - r_-}{qQr_+} \left[H(r_+) + \mu^2r_+^2 \right] - 2qQ \left(n + \frac{1}{2} \right) \Omega_R, \end{aligned}$$

gde je Ω razdvojena na svoj realni i imaginarni deo, $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$. Rešavajući prethodni sistem jednačina po Ω_R i Ω_I , respektivno, dobija se rešenje

$$\Omega_R = \frac{(r_+ - r_-)(H(r_+) + \mu^2r_+^2)}{r_+ \left((H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2 + 4q^2Q^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right)} \left[\frac{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}{4q^2Q^2} \right. \quad (7.17)$$

$$\left. + 2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{am}{r_+} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right],$$

$$\Omega_I = \frac{(r_+ - r_-)}{2qQr_+} \left[- \frac{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}{4q^2Q^2} \right. \quad (7.18)$$

$$\left. - \frac{am}{r_+} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2 \right) \right].$$

Jednačine (7.17) i (7.18) su dovoljne da se iz njih izračunaju frekvencije i nacrtaju odgovarajući grafici, što će i biti urađeno u sledećem potpoglavlju. Međutim, da bi se dobijeni rezultat uporedio sa [118], treba napraviti još jednu aproksimaciju koja podrazumeva da je $\frac{q^2Q^2}{(H(r_+))^2} \ll 1$ i da je u isto vreme istog reda veličine kao i $\frac{H(r_+)}{q^2Q^2}$, $\frac{\mu^2r_+^2}{q^2Q^2}$, Ω i $laqQ/r_+$. Posledica ove aproksimacije je zahtev da je $q^2Q^2 \ll l^4$. Kombinujući ove aproksimacije, može da se zaključi da semiklasični račun koji je baziran na opisanom WKB metodu važi u rasponu parametara definisanim sa $l \ll qQ \ll l^2$. Unutar datih aproksimacija i za parametre u rasponu $l \ll qQ \ll l^2$, zaključuje se da su sve korekcije višeg reda Λ_j višeg reda po H/q^2Q^2 , μ^2/q^2Q^2 , Ω i $laqQ/r_+$ i da kao takve mogu da se zanemare u ovoj analizi. Nakon urađenih dodatnih aproksimacija dobija se sledeći rezultat

$$\Omega_R = \frac{r_+ - r_-}{4q^2Q^2r_+} (H(r_+) + \mu^2r_+^2) \left[1 + \frac{8q^2Q^2}{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4q^2Q^2}{r_+(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}am\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2\right) \Big] \\
\approx & \frac{r_+ - r_-}{4q^2Q^2r_+}(H(r_+) + \mu^2r_+^2)\left[1 + \frac{8q^2Q^2}{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right] \quad (7.19)
\end{aligned}$$

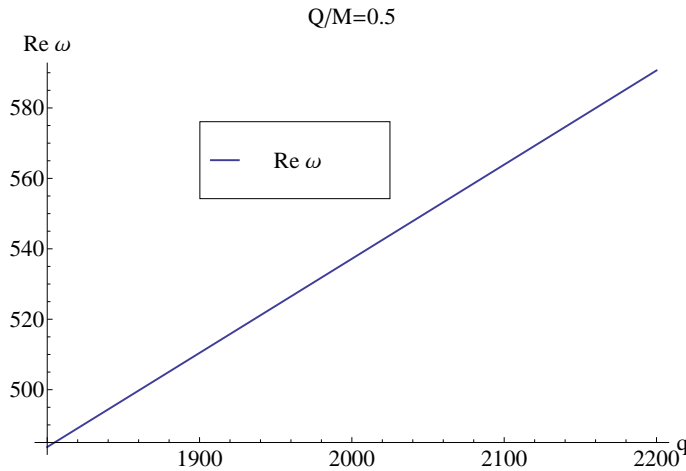
i

$$\begin{aligned}
\Omega_I = & -\frac{r_+ - r_-}{qQr_+}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}\frac{r_+ - r_-}{r_+}\left(n + \frac{1}{2}\right) \times \\
& \left[\frac{1}{2qQ}\left(H(r_+) + \mu^2r_+^2\right)^2 + 4qQ\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right. \\
& \left. - 2am\frac{qQ}{r_+}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{7M}{r_+} + \frac{6Q^2}{r_+^2} - 2l(l+1) - 2\mu^2r_+^2\right) \right] \quad (7.20) \\
\approx & -\frac{r_+ - r_-}{qQr_+}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(H(r_+) + \mu^2r_+^2)^2}\frac{r_+ - r_-}{r_+}\left(n + \frac{1}{2}\right) \times \\
& \left[\frac{1}{2qQ}\left(H(r_+) + \mu^2r_+^2\right)^2 + 4qQ\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right].
\end{aligned}$$

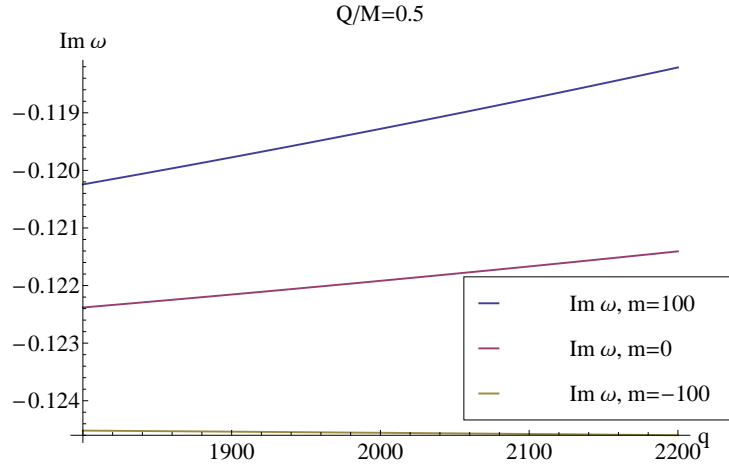
Može da se primeti da se u ovim aproksimacijama gube svi nekomutativni doprinosi i da se rezultat podudara sa rezultatima datim u [118] kada se stavi da je $\mu = 0$. Treba napomenuti još da su rezultati u [118] u nultom redu po veličinama $\frac{q^2Q^2}{H^2}$, $\frac{H}{q^2Q^2}$, Ω , dok je ovde rezultat dat do prvog reda po istim veličinama.

7.1.3 WKB rezultati

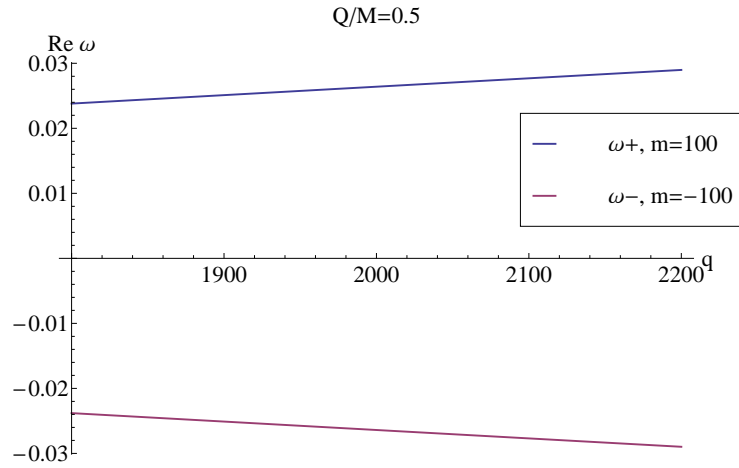
Za neki skup parametara, rešenja (7.17) i (7.18) mogu da se prikažu grafički.



Slika 6: Realni deo frekvencije dobijen WKB metodom.



Slika 7: Imaginarni deo frekvencije dobijen WKB metodom.



Slika 8: Razlike realnih delova frekvencija za različite vrednosti kvantnog broja m .

Na slikama 6 i 7 su predstavljena rešenja za frekvencije kvazinormalnih moda u zavisnosti od naelektrisanja polja. Vrednost parametara je izabrana da bude $Q/M = 0.5$, $q \in (1800, 2200)$, $l = 100$, $\mu = 0.05$ i $a = 0.000001$. Parametri su izabrani tako da aproksimacije $l \ll qQ$ i $H(r_+)/q^2Q^2 \sim \mu^2r_+^2/q^2Q^2 \sim \Omega \sim laqQ/r_+ \ll 1$ budu zadovoljene. Sa slika 6 i 7 se jasno vidi da imaginarni deo ima skoro konstantnu negativnu vrednost, što je u skladu sa činjenicom da su u pitanju prigušeni talasi. Realni deo linearno raste što je u skladu sa činjenicom da je klasična frekvencija $\omega = qQ/r_+$ dominantna za veliko qQ . Zbog nedovoljne rezolucije nije moguće videti cepanje spektralne linije realnog dela, pa su odstupanja od komutativnog slučaja, kada je $m = 0$, predstavljena na slici 8, dok se za imaginarni deo cepanja jasno vide na slici 7. Sa datih grafika se jasno vidi da postoji cepanje spektralnih linija po magnetnom kvantnom broju m . U narednim

poglavljima će biti razmatrani drugi metodi za računanje spektra kvazinormalnih moda. Tako dobijeni rezultati će biti upoređeni sa rezultatima dobijenim WKB metodom.

7.2 Metod verižnih razlomaka

U ovom delu će za određivanje spektra kvazinormalnih moda naelektrisanog masenog skalarnog polja u okolini Rajsner-Nordstromove crne rupe u prisustvu nekomutativnog prostorvremena biti iskorišten metod verižnih razlomaka [46, 47, 123], koji je najčešće korišćen i najtačniji metod za određivanje spektra kvazinormalnih moda.

Da bi se primenio metod verižnih razlomaka, pored skupa graničnih uslova za kvazinormalne mode koji podrazumevaju da je talas u beskonačnosti čisto odlazeći i da je u blizini horizonta događaja talas čisto upadni, treba analizirati i asimotsko ponašanje potencijala (7.6).

Razlog za asimotsku analizu potencijala leži u činjenici da jednačina (6.25) može da se reši analitički u asimotskim oblastima za kornjačinu koordinatu y : u beskonačnosti $y \rightarrow \infty$ i na horizontu $y \rightarrow -\infty$. Prvo će biti ispitan limes $r \rightarrow \infty$ potencijala (7.6). U tom slučaju jednačina (7.5) postaje

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left[\omega^2 - \mu^2 - 2\frac{\omega qQ - \mu^2 M}{r} + 2iam\frac{qQ}{r}(\omega^2 - \mu^2) \right] \psi = 0. \quad (7.21)$$

Rešenje jednačine (7.21) u limesu $r \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow \infty$) određuje ponašanje rešenja za kvazinormalne mode u beskonačnosti⁸,

$$R = \frac{\psi}{r} \sim e^{i\Omega y} y^{-1 - i\frac{\omega qQ - \mu^2 M}{\Omega} - amqQ\Omega}, \quad (7.22)$$

gde je $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$.

Analogno, u limesu $r \rightarrow r_+$ ($y \rightarrow -\infty$) u blizini horizonta događaja, potencijal, odnosno odgovarajuća jednačina kretanja postaje

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left[\omega - \frac{qQ}{r_+} \right]^2 \left[1 + 2iam\frac{qQ}{r_+} \right] \psi = 0. \quad (7.23)$$

⁸Opšte rešenje jednačine (7.21) u limesu $r \rightarrow \infty$ je linearna kombinacija rešenja za vrednosti $\Omega = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Uslov da je rešenje čisto odlazeće u beskonačnosti fiksira znak + u (7.22).

Rešenje ove jednačine je⁹

$$\psi \sim e^{-i\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)\left(1 + iam\frac{qQ}{r_+}\right)y}. \quad (7.24)$$

Prethodne relacije važe samo u prvom redu po parametru nekomutativnosti a .

Napisano objedinjeno, asimptotska forma rešenja jednačine (7.5) u odgovarajućim limesima formira sledeće granične uslove

$$R(r) \rightarrow \begin{cases} Z^{out} e^{i\Omega y} y^{-1 - i\frac{\omega q Q - \mu^2 M}{\Omega} - amqQ\Omega} & \text{za } y \rightarrow \infty \\ Z^{in} e^{-i\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)\left(1 + iam\frac{qQ}{r_+}\right)y} & \text{za } y \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (7.25)$$

gde su Z^{out} i Z^{in} amplitude upadnog i odlaznog talasa, koje ne zavise od koordinata r tj. y . U limesu kada konstanta nekomutativnosti teži u nuli, granični uslovi postaju isti kao u referenci [124], dok u istom limesu za bezmaseno polje granični uslovi postaju isti kao u referenci [125].

Pošto jednačina (6.25) ima jednu iregularnu singularnu tačku u $r = +\infty$ i tri regularne singularne tačke u $r = 0$, $r = r_-$ i $r = r_+$, rešenje radijalnog dela jednačine kretanja u celom prostoru može da se razvije u stepeni red u okolini tačke $r = r_+$, tako da radijalni deo skalarnog polja izgleda kao

$$R(r) = e^{i\Omega r} (r - r_-)^\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r - r_+}{r - r_-}\right)^{n+\delta}, \quad (7.26)$$

gde parametri δ i ϵ treba da se odrede iz graničnih uslova (7.25) koje radijalna funkcija $R(r)$ (7.26) zadovoljava.

U nastavku treba odrediti vrednosti parametara ϵ and δ . Naime, iz opšteg oblika rešenja (7.26), jasno je da kada $r \rightarrow \infty$, član $r^\epsilon e^{i\Omega r}$ ima dominantan uticaj. Na isti način, kada $r \rightarrow r_+$, dominantan doprinos rešenju (7.26) daje član $(r - r_+)^\delta$. Zamenom izraza za modifikovanu kornjačinu koordinatu (7.8) u granične uslove (7.22) i (7.24) i poređenjem sa već pomenutim vodećim članovima $r^\epsilon e^{i\Omega r}$ i $(r - r_+)^\delta$

⁹Slično kao i u beskonačnosti, opšte rešenje jednačine (7.23) je linearna kombinacija rešenja $e^{\pm i\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)\left(1 + iam\frac{qQ}{r_+}\right)y}$. Uslov da je rešenje čisto dolazeće u blizini horizonta fiksira znak $-$ u (7.24).

u asimptotskom razvoju (7.26), dobijaju se vrednosti vrednosti parametara ϵ i δ ,

$$\delta = -i \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+} \right), \quad \epsilon = -1 - iqQ \frac{\omega}{\Omega} + i \frac{r_+ + r_-}{2\Omega} \left(\Omega^2 + \omega^2 \right). \quad (7.27)$$

Ovi parametri se identično poklapaju sa vrednostima istih parametara u referenci [124] i deformacija prostorvremena nije uticala na njihove vrednosti u prvom redu po parametru nekomutativnosti.

Kako su i u komutativnom i u nekomutativnom slučaju u prvom redu po parametru nekomutativnosti, asimptotska rešenja su ista, može se zaključiti da doprinos od deformacije prostorvremena dolazi samo preko koeficijenata a_n . Osnovni cilj metoda verižnih razlomaka je određivanje i rešavanje rekurentnih relacija između tih koeficijenata. Oni će zapravo igrati glavnu ulogu u računanju spektra kvazinormalnih moda. Na prvi pogled, činjenica da su parametri ϵ i δ isti u komutativnom i nekomutativnom slučaju može da deluje zbunjujuće. Međutim, deo koji je proporcionalan sa parametrom nekomutativnosti u modifikovanoj kornjačinoj koordinati i deo koji je proporcionalan sa parametrom nekomutativnosti u graničnim uslovima (7.25) se međusobno pokrate i kao rezultat se dobije da asimptotska rešenja ne zavise od parametra deformacije, kada se sve izrazi preko početne radijalne koordinate r . Svi izvedeni zaključci važe samo u prvom redu po parametru nekomutativnosti a .

Za lakše razumevanje metoda verižnih razlomaka, treba prvo razmotriti komutativni slučaj. Kada se pretpostavljeno rešenje (7.26) zameni u radijalnu jednačinu kretanja (6.25), za $a = 0$ dobiju se tročlane rekurentne relacije

$$\begin{aligned} \alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} &= 0, \\ \alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Koeficijenti α_n, β_n i γ_n su dati kao

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (n+1) \left[n+1 - 2i \frac{r_+}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ) \right], \\ \beta_n &= \epsilon + (n+\delta)(2\epsilon - 2n - 2\delta) + 2i\Omega(n+\delta)(r_+ - r_-) - l(l+1) - \mu^2 r_-^2 \\ &\quad + \frac{2\omega r_-^2}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ) - \frac{2r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} (\omega r_+ - qQ)^2 + 4\omega r_- (\omega r_+ - qQ) \\ &\quad - \frac{2r_-}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ)^2 + (r_+ - r_-) \left[i\Omega + 2\omega(\omega r_+ - qQ) - \mu^2(r_+ + r_-) \right], \end{aligned}$$

$$\gamma_n = \epsilon^2 + (n + \delta - 1)(n + \delta - 1 - 2\epsilon) + \left(\omega r_- - \frac{r_-}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ) \right)^2, \quad (7.29)$$

gde su ϵ i δ dati u (7.27). Prva relacija u (7.28) je opšta tročlana rekurentna relacija, dok druga relacija povezuje koeficijente α i β u najnižem redu i igra ulogu početnog uslova u opštem razvoju (7.26). Za $\mu = 0$ dati skup rekurentnih relacija relacija (7.29) se redukuje na koeficijente $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ u [125]. Relacije (7.28) i (7.29) su dovoljno opšte da uključuju i neke specijalne slučajeve kao na primer slučaj nenaelektrisanog skalarnog polja, $q = 0$. Tada koeficijenti (7.29) postaju jednaki koeficijentima datim u [126, 127]. Za slučaj nenaelektrisanog skalarnog polja u Švarcšildovoj metrici koeficijenti (7.28) su identični koeficijentima u [46, 47].

Opšti izraz (7.26) konvergira za $r_+ \leq r < \infty$ usled toga što je r_+ regularna singularna tačka. Konvergencija u $r = \infty$ znači da suma $\sum_n a_n$ takođe konvergira. Pošto suma konvergira, može da se definiše odnos dva susedna člana R_n kao $R_n = -\frac{a_{n+1}}{a_n} > -1$. Beskonačan red (7.26) će konvergirati ako R_n opada dovoljno brzo sa porastom n . Štaviše, iz prve relacije u (7.28) se vidi da koeficijenti a_n moraju da zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$R_{n-1} = \frac{\gamma_n}{\beta_n - \alpha_n R_n}. \quad (7.30)$$

Ova relacija se svodi na

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-\gamma_n}{\beta_n - \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \dots}}}, \quad (7.31)$$

koja u kombinaciji sa drugom relacijom u (7.28) daje jednačinu beskonačnih verižnih razlomaka

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 - \dots \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \dots}}}}. \quad (7.32)$$

Veličina R_n može da se interpretira i kao ostatak u beskonačnom verižnom razlomku koji je presečen na nekom velikom n . Stoga, konvergencija reda (7.26) je izvesna ako koeficijenti a_n zadovoljavaju jednačinu (7.32) i ako R_n opada dovoljno brzo sa porastom n . Rešenje jednačine (7.32) daje osnovno, tj. najstabilnije rešenje za frekvenciju kvazinormalne mode. Relacija data preko verižnog razlomka (7.32)

može da se invertuje bilo koji broj puta. Numerički gledano, n -ta frekvencija kvazinormalne mode je definisana kao najstabilnije rešenje n puta invertovane relacije verižnih razlomaka (7.32),

$$\beta_n - \frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-2}\gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} - \dots - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_0}}} = \frac{\alpha_n\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \dots}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.33)$$

Ovo znači da je fundamentalna moda određena najstabilnijim rešenjem jednačine (7.32).

Pokazuje se da je konvergencija sporija što se računa viša moda. Zbog toga je Nolert (Nollert) razvio poboljšani metod, koji podrazumeva da se odsečeni ostatak verižnog razlomka pretpostavi da je oblika $R_N = \sum_{k=0}^{\infty} C_k N^{-k/2}$. Prva tri koeficijenta u razvoju datog reda su

$$C_0 = -1, \quad (7.34)$$

$$C_1 = \sqrt{2i(\omega^2 - \mu^2)^{1/2}(r_- - r_+)}, \quad (7.35)$$

$$C_2 = \frac{3}{4} - i \frac{qQ\omega - \mu^2 M}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} + 2ir_+ \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \quad (7.36)$$

za skalarno polje u geometriji Rajsner-Nordstromove crne rupe [124].

Vratimo se sada na slučaj kada je nekomutativni parametar a različit od nule. Zamenom opšteg izraza (7.26) u jednačinu (6.25) dobiju se šestočlane rekurentne relacije

$$\begin{aligned} A_n a_{n+1} + B_n a_n + C_n a_{n-1} + D_n a_{n-2} + E_n a_{n-3} + F_n a_{n-4} &= 0, \\ A_3 a_4 + B_3 a_3 + C_3 a_2 + D_3 a_1 + E_3 a_0 &= 0, \\ A_2 a_3 + B_2 a_2 + C_2 a_1 + D_2 a_0 &= 0, \\ A_1 a_2 + B_1 a_1 + C_1 a_0 &= 0, \\ A_0 a_1 + B_0 a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.37)$$

gde su koeficijenti A_n, B_n, C_n, D_n, E_n i F_n dati sa

$$\begin{aligned} A_n &= r_+^3 \alpha_n, \\ B_n &= r_+^3 \beta_n - iamqQ(r_+ - r_-)r_+(n + \delta) - \frac{1}{2} iamqQ(r_+ + r_-)r_+ \\ &\quad + iamqQr_+r_- - 3r_+^2 r_- \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n &= r_+^3 \gamma_n + 3r_+ r_-^2 \alpha_{n-2} + iamqQ(r_+ - r_-)(2r_+ + r_-)(n + \delta - 1) \\
&\quad - iamqQ(r_+ - r_-)r_+ \epsilon + \frac{1}{2} iamqQ(r_+ + r_-)(2r_+ + r_-) \\
&\quad - 3iamqQr_+ r_- + amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_+ - 3r_+^2 r_- \beta_{n-1} +, \\
D_n &= -r_-^3 \alpha_{n-3} + 3r_+ r_-^2 \beta_{n-2} - 3r_+^2 r_- \gamma_{n-1} + iamqQ(r_+^2 - r_-^2) \epsilon + 3iamqQr_+ r_- \\
&\quad - amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_- - iamqQ(r_+ - r_-)(r_+ + 2r_-)(n + \delta - 2) \\
&\quad - \frac{1}{2} iamqQ(r_+ + r_-)(r_+ + 2r_-), \\
E_n &= 3r_+ r_-^2 \gamma_{n-2} - r_-^3 \beta_{n-3} + iamqQ(r_+ - r_-)r_-(n + \delta - 3) \\
&\quad - iamqQ(r_+ - r_-)r_- \epsilon + \frac{1}{2} iamqQ(r_+ + r_-)r_- iamqQr_+ r_-, \\
F_n &= -r_-^3 \gamma_{n-3},
\end{aligned}$$

a koeficijenti $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ su dati u (7.29). Prva relacija u (7.37) je opšta šestočlana rekurentna relacija, dok preostale četiri igraju ulogu početnih uslova i povezuju koeficijente u najnižim redovima u razvoju po n u (7.26).

Kao što se vidi, prisustvo deformacije prostorvremena značajno usložnjava jednačine. Umesto tročlanih rekurentnih relacija u komutativnom slučaju (7.28), u prisustvu nekomutativne deformacije prostorvremena se dobiju šestočlane rekurentne relacije, što dosta komplikuje izračunavanje spektra kvazinormalnih moda. Kod rekurentnih relacija koje nisu tročlane, postoji dobro razvijen metod kako one mogu da se nizom sukcesivnih koraka svedu na tročlane rekurentne relacije, koje se rešavaju kako je prikazano u (7.32). Malo opširnije o rešavanju rekurentnih relacija se može pročitati u [128].

U slučaju kada rekurentne relacije povezuju više od tri koeficijenta a_n , kao što je slučaj za nekomutativno skalarno polje, procedura koja je ranije opisana ne može da se primeni pravolinijski. U tom slučaju treba primeniti proceduru Gausove (Gauss) eliminacije dovoljan broj puta da bi se rekurentne relacije svele na tročlane. Prvom Gausovom eliminacijom, što će malo kasnije biti detaljnije objašnjeno, n -točlane rekurentne relacije treba da se svedu na $n - 1$ -člane. Nastavkom ove procedure, nakon dovoljnog broja ponavljanja, doći će se do željenih tročlanih relacija. Početne rekurentne relacije u nekomutativnom slučaju su šestočlane (7.37). Gausova eliminacija treba sukcesivno da se primeni tri puta za redom. Preciznije gledano, prvom Gausovom eliminacijom, rekurentne relacije se svode sa šestočlanih na petočlane. Nakon toga se sledećom Gausovom eliminacijom petočlane rekurentne relacije svode na četvoročlane i konačno se trećom Gausovom eliminacijom

četvoročlane rekurentne relacije svode na tročlane, što je i bio cilj. Treba napomenuti da se i u komutativnim primerima mogu dobiti rekurentne relacije stepena većeg od tri. U slučaju skalarnih kvazinormalnih moda u ekstremalnoj Rajsner-Nordstromovoj geometriji, dobijaju se petočlane rekurentne relacije [129], dok se četvoročlane rekurentne relacije dobijaju u slučaju Švarcšildove geometrije u $5D$ [130] ili u slučaju realističnih zvezda [131].

Da bi se započela Gausova eliminacija, prvo treba definisati koeficijente nultog reda $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, C_n^{(0)}, D_n^{(0)}, E_n^{(0)}, F_n^{(0)}$ koji su zapravo koeficijenti koji su ugrađeni u šestočlane rekurentne relacije (7.37). Nultog su reda jer su dobijeni iz nula Gausovih eliminacija,

$$A_n^{(0)} \equiv A_n, B_n^{(0)} \equiv B_n, C_n^{(0)} \equiv C_n, D_n^{(0)} \equiv D_n, E_n^{(0)} \equiv E_n, F_n^{(0)} \equiv F_n, \quad (7.38)$$

gde su $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ već definisani u (7.38). Na sličan način mogu da se definišu i koeficijenti prvog reda $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, E_n^{(1)}$ kao koeficijenti koji su ugrađeni u petočlane relacije. Preciznije rečeno, prvog su reda jer su dobijeni nakon jedne Gausove eliminacije. Koeficijenti drugog reda se definišu kao $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ su koeficijenti koji su ugrađeni u četvoročlane relacije i dobijeni su nakon dve Gausove eliminacije. Konačno, koeficijenti trećeg reda su $A_n^{(3)}, B_n^{(3)}, C_n^{(3)}$ koji su ugrađeni u tročlane rekurentne relacije i dobijeni su nakon tri uzastopne Gausove eliminacije,

$$\begin{aligned} A_n^{(3)} a_{n+1} + B_n^{(3)} a_n + C_n^{(3)} a_{n-1} &= 0, \\ A_0^{(3)} a_1 + B_0^{(3)} a_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Kao što je i očekivano, nakon svake Gausove eliminacije, broj članova u rekurentnim relacijama se smanji za jedan. Kada se dobiju tročlane rekurentne relacije, one mogu da se ubace u već pomenuti algoritam za rešavanje tročlanih rekurentnih relacija. Ovo znači da fundamentalna frekvencija nekomutativnih skalarnih kvazinormalnih moda može da se dobije rešavanjem jednačine

$$0 = B_0^{(3)} - \frac{A_0^{(3)} C_1^{(3)}}{B_1^{(3)} - \frac{A_1^{(3)} C_2^{(3)}}{B_2^{(3)} - \frac{A_2^{(3)} C_3^{(3)}}{B_3^{(3)} - \dots \frac{A_n^{(3)} C_{n+1}^{(3)}}{B_{n+1}^{(3)} - \dots}}}. \quad (7.40)$$

Primenom procesa Gausove eliminacije tri puta u nizu, dobijaju se koeficijenti $A_n^{(3)}, B_n^{(3)}, C_n^{(3)}$ za slučaj sa nenultom nekomutativnom deformacijom.

Primenom Gausove eliminacije na šestočlane rekurentne relacije (7.37) dobiju se sledeće petočlane rekurentne relacije

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)}a_{n+1} + B_n^{(1)}a_n + C_n^{(1)}a_{n-1} + D_n^{(1)}a_{n-2} + E_n^{(1)}a_{n-3} &= 0, \\
A_2^{(1)}a_3 + B_2^{(1)}a_2 + C_2^{(1)}a_1 + D_2^{(1)}a_0 &= 0, \\
A_1^{(1)}a_2 + B_1^{(1)}a_1 + C_1^{(1)}a_0 &= 0, \\
A_0^{(1)}a_1 + B_0^{(1)}a_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{7.41}$$

gde su koeficijenti iz petočlanih rekurentnih relacija određeni sa (prvo je napisana relacija za $n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)} &= A_n^{(0)}, & n &\geq 4 \\
B_n^{(1)} &= B_n^{(0)} - \frac{F_n^{(0)}}{E_{n-1}^{(1)}}A_{n-1}^{(1)}, & C_n^{(1)} &= C_n^{(0)} - \frac{F_n^{(0)}}{E_{n-1}^{(1)}}B_{n-1}^{(1)}, \\
D_n^{(1)} &= D_n^{(0)} - \frac{F_n^{(0)}}{E_{n-1}^{(1)}}C_{n-1}^{(1)}, & E_n^{(1)} &= E_n^{(0)} - \frac{F_n^{(0)}}{E_{n-1}^{(1)}}D_{n-1}^{(1)},
\end{aligned} \tag{7.42}$$

a za $n = 0, 1, 2, 3$ važi

$$\begin{aligned}
A_3^{(1)} &= A_3^{(0)}, & B_3^{(1)} &= B_3^{(0)}, & C_3^{(1)} &= C_3^{(0)}, & D_3^{(1)} &= D_3^{(0)}, & E_3^{(1)} &= E_3^{(0)}, \\
A_2^{(1)} &= A_2^{(0)}, & B_2^{(1)} &= B_2^{(0)}, & C_2^{(1)} &= C_2^{(0)}, & D_2^{(1)} &= D_2^{(0)}, \\
A_1^{(1)} &= A_1^{(0)}, & B_1^{(1)} &= B_1^{(0)}, & C_1^{(1)} &= C_1^{(0)}, \\
A_0^{(1)} &= A_0^{(0)}, & B_0^{(1)} &= B_0^{(0)}.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Primena procedure druge Gausove eliminacije na dobijene petočlane rekurentne relacije (7.41) dovodi do sledećih četvoročlanih rekurentnih relacija

$$\begin{aligned}
A_n^{(2)}a_{n+1} + B_n^{(2)}a_n + C_n^{(2)}a_{n-1} + D_n^{(2)}a_{n-2} &= 0, \\
A_1^{(2)}a_2 + B_1^{(2)}a_1 + C_1^{(2)}a_0 &= 0, \\
A_0^{(2)}a_1 + B_0^{(2)}a_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{7.44}$$

gde su koeficijenti iz četvoročlanih rekurentnih relacija određeni sa

$$A_n^{(2)} = A_n^{(1)} = A_n^{(0)}, \quad B_n^{(2)} = B_n^{(1)} - \frac{E_n^{(1)}}{D_{n-1}^{(2)}}A_{n-1}^{(2)}, \quad n \geq 3$$

$$C_n^{(2)} = C_n^{(1)} - \frac{E_n^{(1)}}{D_{n-1}^{(2)}} B_{n-1}^{(2)}, \quad D_n^{(2)} = D_n^{(1)} - \frac{E_n^{(1)}}{D_{n-1}^{(2)}} C_{n-1}^{(2)}, \quad (7.45)$$

a za $n = 0, 1, 2$ važi

$$\begin{aligned} A_2^{(2)} &= A_2^{(1)} = A_2^{(0)}, & B_2^{(2)} &= B_2^{(1)} = B_2^{(0)}, & C_2^{(2)} &= C_2^{(1)} = C_2^{(0)}, & D_2^{(2)} &= D_2^{(1)} = D_2^{(0)}, \\ A_1^{(2)} &= A_1^{(1)} = A_1^{(0)}, & B_1^{(2)} &= B_1^{(1)} = B_1^{(0)}, & C_1^{(2)} &= C_1^{(1)} = C_1^{(0)}, \\ A_0^{(2)} &= A_0^{(1)} = A_0^{(0)}, & B_0^{(2)} &= B_0^{(1)} = B_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Treća i poslednja Gausova eliminacija koja se primenjuje na (7.44) dovodi do rekurentne relacije (7.39) gde su koeficijenti iz tročlane rekurentne relacije $A_n^{(3)}, B_n^{(3)}, C_n^{(3)}$, koji su i bili krajnji cilj, dati sa

$$\begin{aligned} A_n^{(3)} &= A_n^{(2)} = A_n^{(0)}, & n &\geq 2 \\ B_n^{(3)} &= B_n^{(2)} - \frac{D_n^{(2)}}{C_{n-1}^{(3)}} A_{n-1}^{(3)}, & C_n^{(3)} &= C_n^{(2)} - \frac{D_n^{(2)}}{C_{n-1}^{(3)}} B_{n-1}^{(3)}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

a za $n = 0, 1$ važi

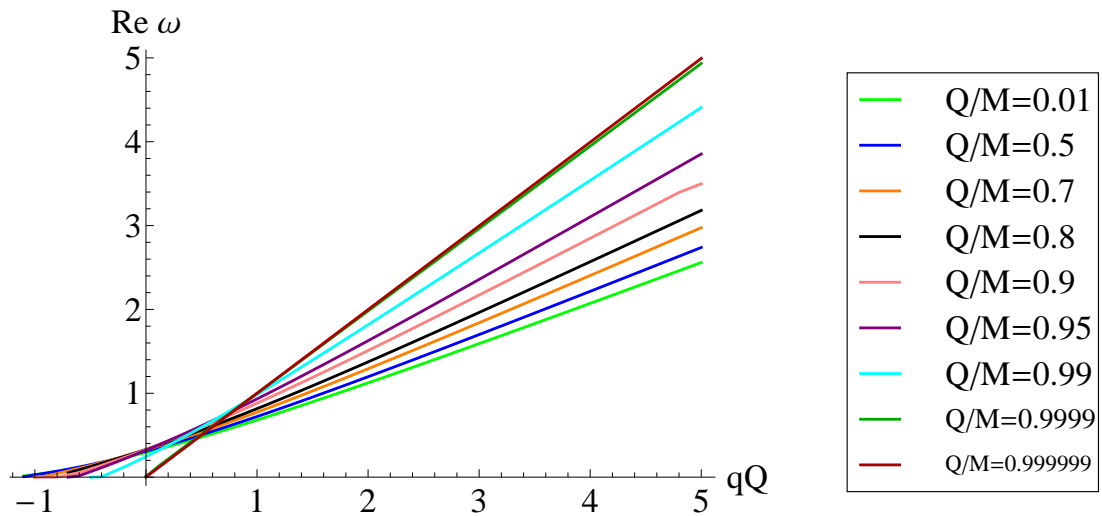
$$\begin{aligned} A_1^{(3)} &= A_1^{(2)} = A_1^{(0)}, & B_1^{(3)} &= B_1^{(2)} = B_1^{(0)}, & C_1^{(3)} &= C_1^{(2)} = C_1^{(0)}, \\ A_0^{(3)} &= A_0^{(2)} = A_0^{(0)}, & B_0^{(3)} &= B_0^{(2)} = B_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Kada su koeficijenti $A_n^{(3)}, B_n^{(3)}, C_n^{(3)}$ jednom određeni, mogu se ubaciti u jednačinu (7.40) da bi se izračunala frekvencija kvazinormalnih moda. Detaljniji opis Gausove procedure i računanja koeficijenata koji se iz nje dobiju, dati su u dodacima C i D.

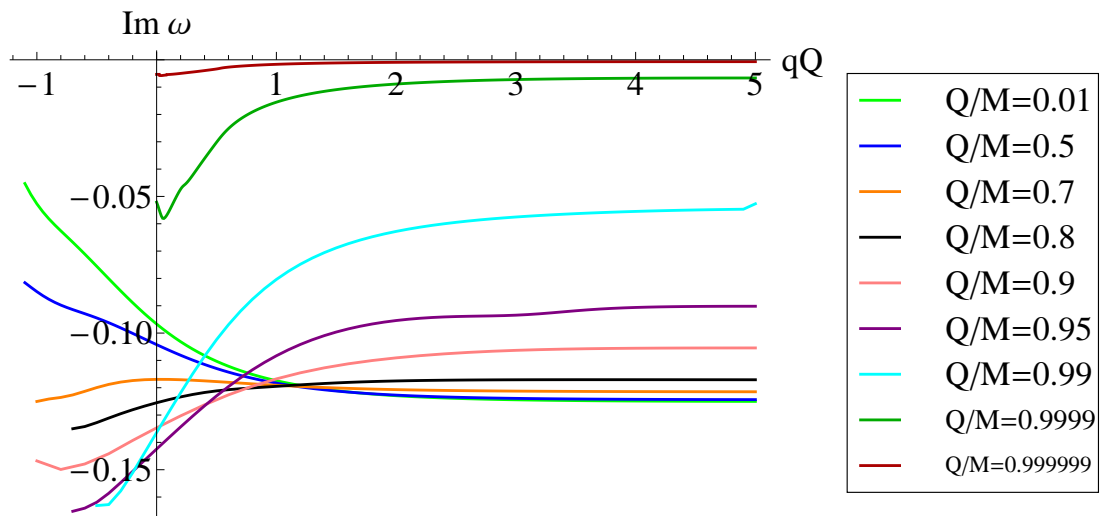
7.2.1 Verižni razlomci - rezultati

Rešavanjem jednačine (7.40) koja je odsečena na nekom razlomku, dobija se spektar rešenja za frekvenciju izražen preko parametara crne rupe i skalarnog polja. Što se verižni razlomak odseče na većem n , to je rezultat tačniji. Za vrednosti $\mu = 0.05$, $l = 1$, $a = 0.01$ računat je spektar kvazinormalnih moda za različite odnose parametara Q/M . Razlomak je presečen za $n = 9$, jer je u tom slučaju numerička greška manja od efekta nekomutativnosti, $\delta_{num} < |\omega_{m=\pm 1} - \omega_{m=0}|$. Efekat nekomutativne deformacije je ocenjen da bude reda veličine cepanja spektra kvazinormalnih moda za razlike magnetnih kvantnih brojeva $|\Delta m| = 1$. Proizvod naelektrisanja je iz skupa $qQ \in (-1, 5)$. Rezultati su dati na sledećim

graficima koji su dobijeni korištenjem programa „Wolfram Mathematica” (videti Dodatak D).

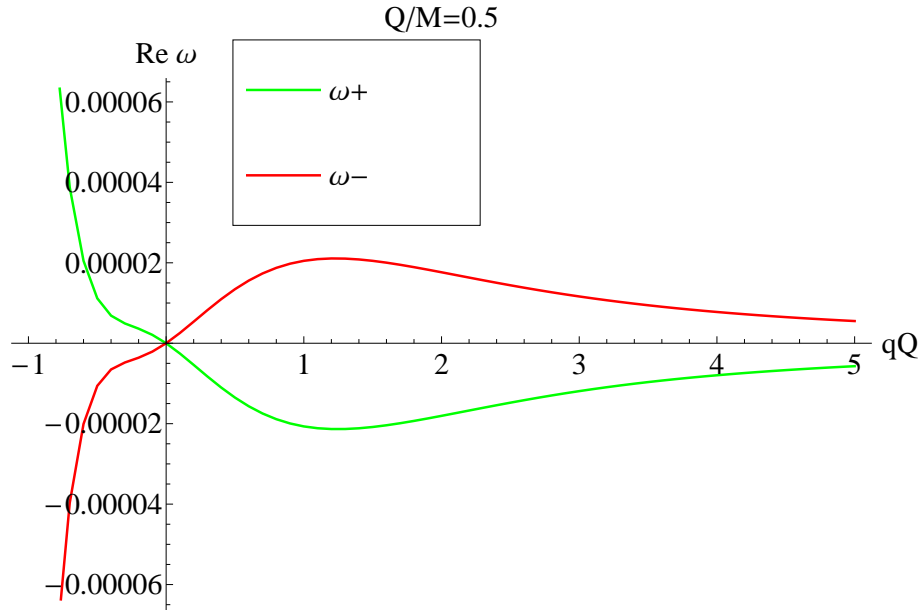


Slika 9: Zavisnost realnog dela frekvencije ω od qQ za dati odnos Q/M .

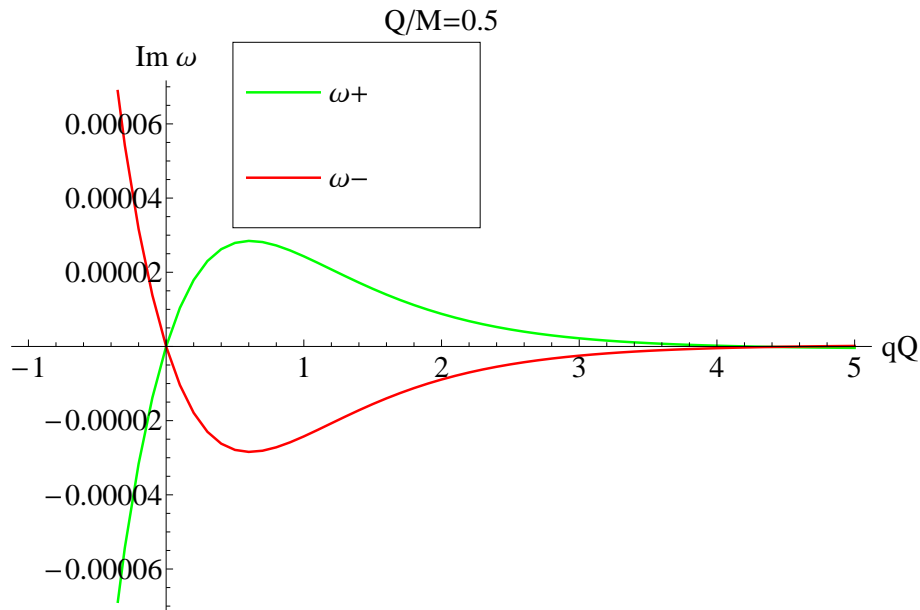


Slika 10: Zavisnost imaginarnog dela frekvencije ω od qQ za dati odnos Q/M .

Zbog nedovoljno dobre rezolucije, nemoguće je primetiti razliku između grafika $\omega_{m=1}$, $\omega_{m=0}$ i $\omega_{m=-1}$. Zbog toga će na odvojenim graficima biti prikazane razlike $\omega^\pm = \omega_{m=\pm 1} - \omega_{m=0}$, na primeru $Q/M = 0.5$.



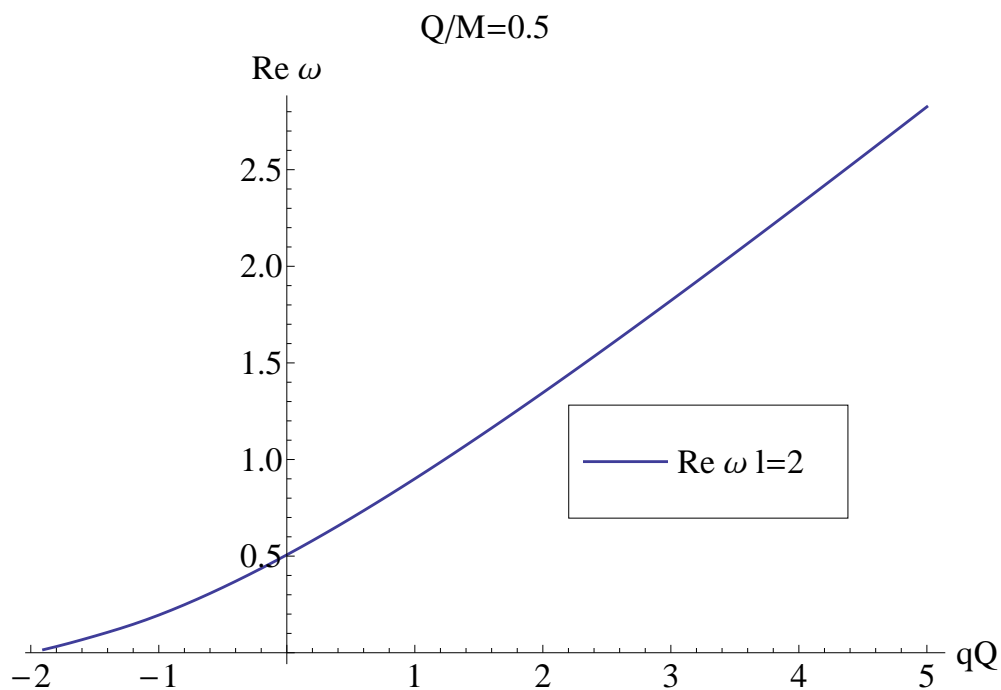
Slika 11: Zavisnost realnog dela razlika frekvencija ω^\pm od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$.



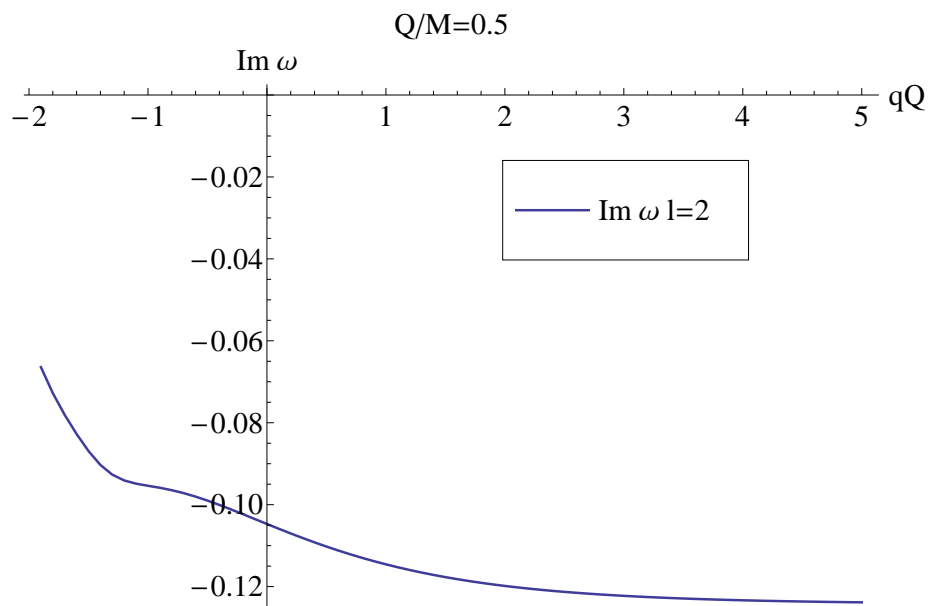
Slika 12: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$.

Sa slika 9 i 11 se vidi da je za $qQ = 1$ odnos $\delta_{Re} = \frac{\omega_{Re}^+}{\omega_{Re}} \sim 10^{-4}$. Sa slika 10 i 12 se vidi da je za $qQ = 1$ odnos $\delta_{Im} = \frac{\omega_{Im}^+}{\omega_{Im}} \sim 10^{-4}$. Kao bolji prikaz cepanja spektralnih linija kvazinormalnih moda, biće prikazan slučaj kada je $l = 2$. U tom slučaju postoji pet mogućih vrednosti za kvantni broj m . Ostale vrednosti

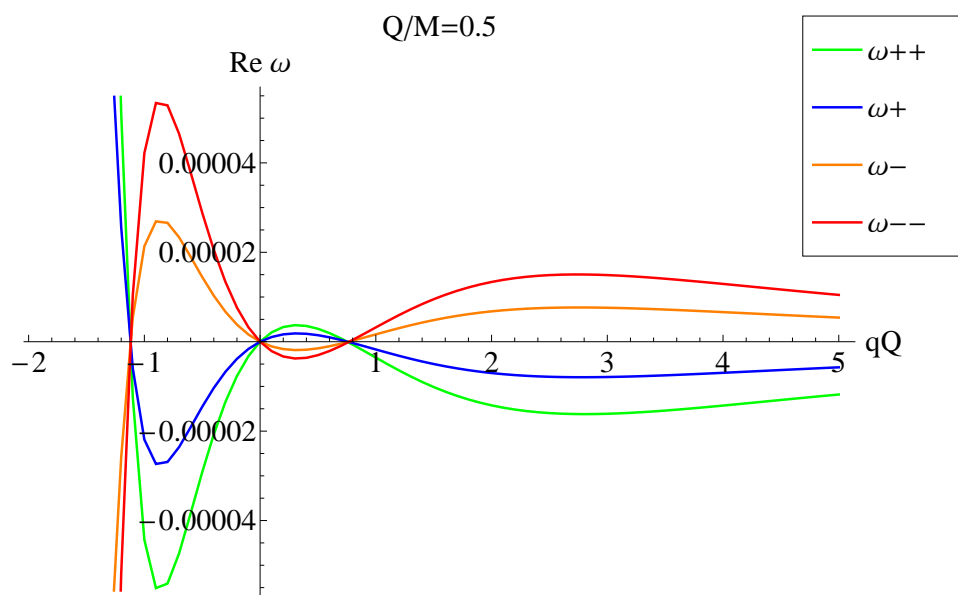
parametara su iste kao i na slikama 11 i 12. Definicija razlika je $\omega^\pm = \omega_{m=\pm 1} - \omega_{m=0}$ i $\omega^{\pm\pm} = \omega_{m=\pm 2} - \omega_{m=0}$.



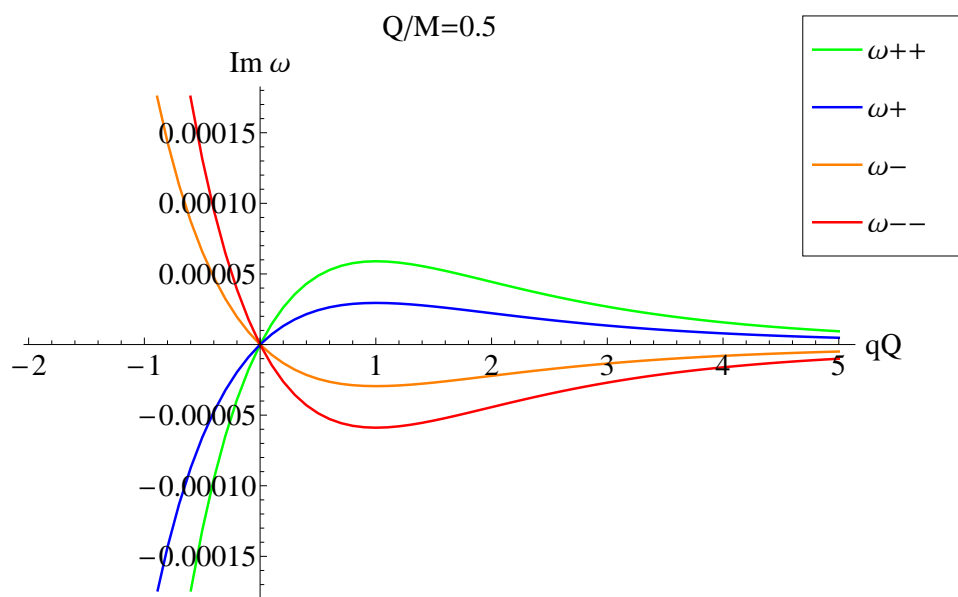
Slika 13: Zavisnost realnog dela frekvencije ω od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$ i $l = 2$.



Slika 14: Zavisnost imaginarnog dela frekvencije ω od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$ i $l = 2$.



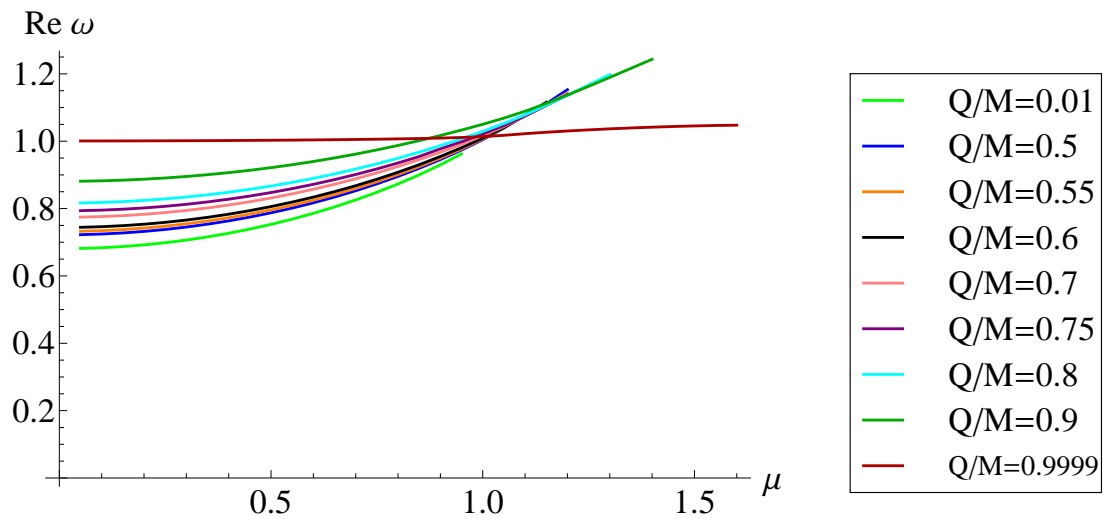
Slika 15: Zavisnost realnog dela razlika frekvencija $\omega^{\pm\pm}$ i ω^{\pm} od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$ i $l = 2$.



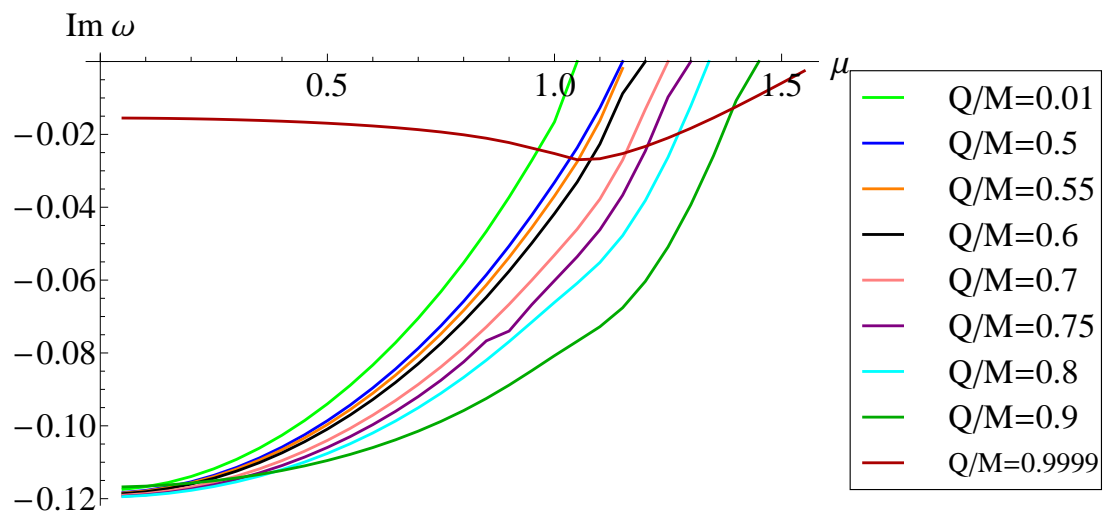
Slika 16: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija $\omega^{\pm\pm}$ i ω^{\pm} od qQ za dati odnos $Q/M = 0.5$ i $l = 2$.

Na narednim graficima će biti prikazana zavisnost frekvencija kvazinormalnih moda u zavisnosti od mase polja μ . Veoma zanimljiv efekat kod kvazinormalnih moda su tzv. kvazirezonance. To su kvazinormalne mode kod kojih je za određenu vrednost parametara imaginarni deo frekvencije jednak nuli. Kako je imaginarni

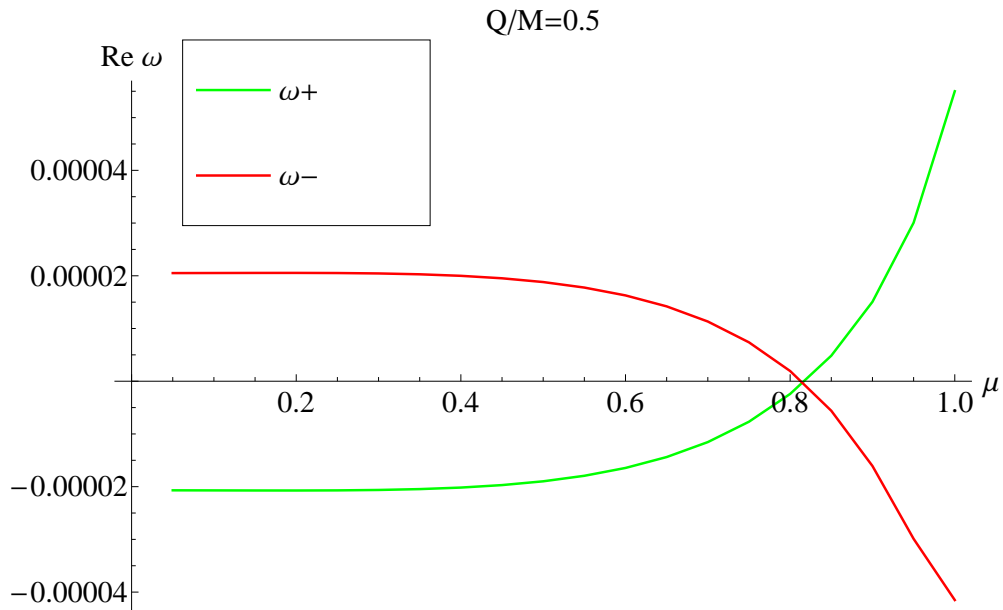
deo frekvencije odgovoran za prigušenje, kvazinormalne mode u tom slučaju zapravo postaju normalne mode koje su beskonačno živeće jer nisu prigušene.



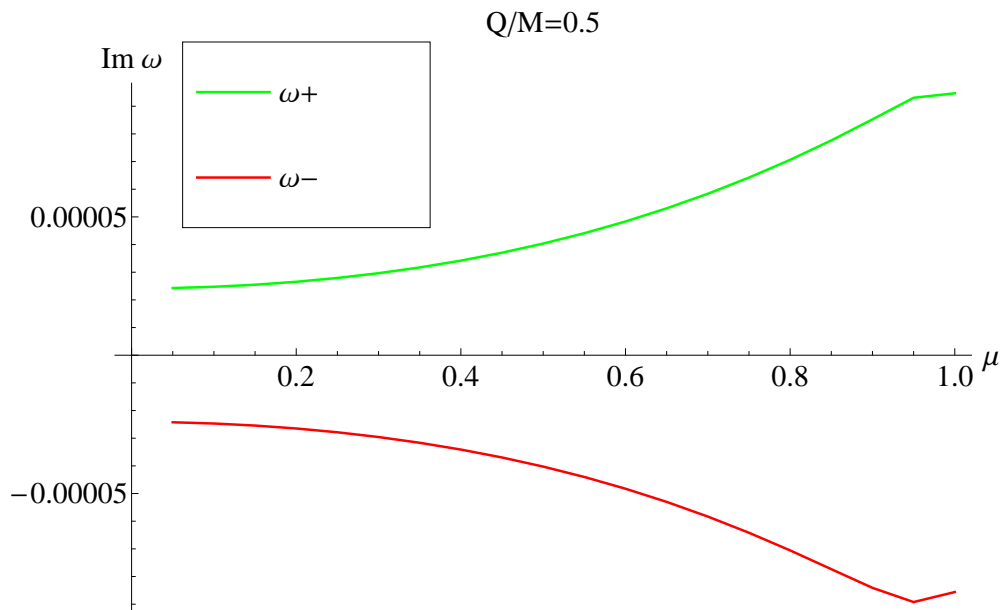
Slika 17: Zavisnost realnog dela frekvencije ω od μ za dati odnos Q/M .



Slika 18: Zavisnost imaginarnog dela frekvencije ω od μ za dati odnos Q/M .



Slika 19: Zavisnost realnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.

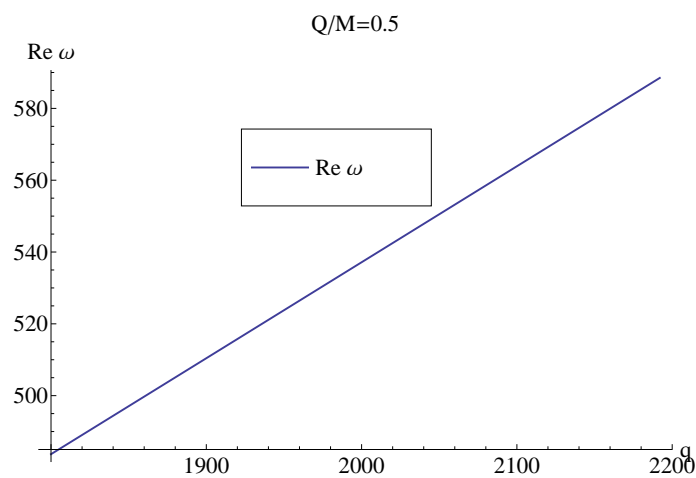


Slika 20: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.

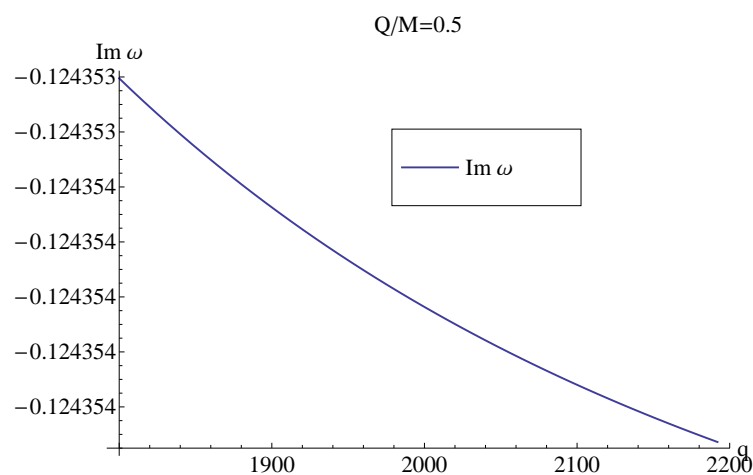
Sa slike 18 se vidi da kada se povećava odnos Q/M , tada se povećava masa polja odgovarajuće kvazirezonance. Takođe se na slikama 9, 10, 17, 18 vidi da kada se odnos Q/M približava jedinici, grafici prestaju da se ponašaju u skladu sa graficima za odnose Q/M koje je manje od 1. Razlog je to što metod verižnih

razlomaka slabije konvergira kada se crna rupa približava ekstremalnoj [125]. Iz tog razloga treba posebno primeniti metod verižnih razlomaka za ekstremalnu Rajsner-Nordstromovu crnu rupu. U komutativnom slučaju, kao što je već rečeno, za neekstremalnu crnu rupu se dobijaju tročlane rekurentne relacije (7.28), dok u slučaju ekstremalne crne rupe se dobiju petočlane rekurentne relacije [129].

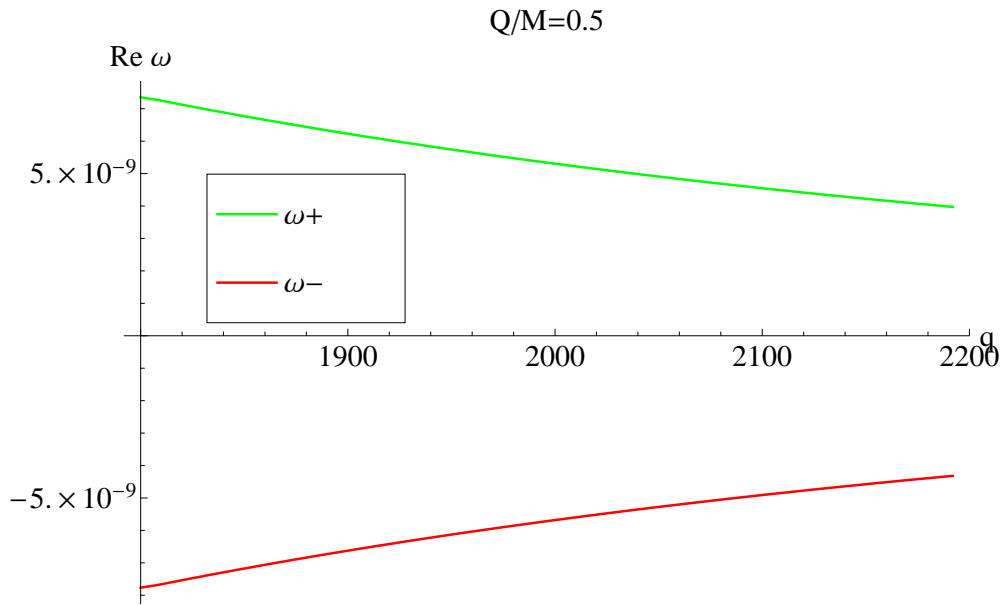
Interesantno je uporediti rezultate metoda verižnih razlomaka sa rezultatima WKB metoda. Uzimajući identične vrednosti parametara kao i u slučaju WKB metoda, $Q/M = 0.5$, $q \in (1800, 2200)$, $l = 100$, $\mu = 0.05$ i $a = 0.000001$ dobijaju se rezultati prikazani na slikama 21, 22, 23 i 24.



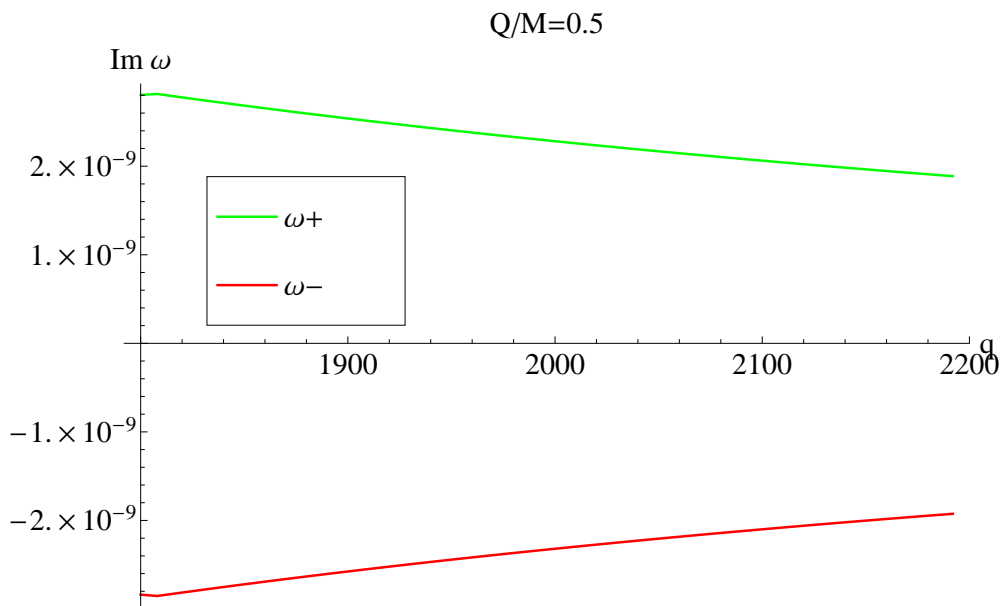
Slika 21: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.



Slika 22: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.



Slika 23: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.



Slika 24: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.

Poređenjem dobijenih rezultata sa onima dobijenim WKB metodom, primećuje se da se rezultati ne poklapaju najbolje. Sami rezultati su približnih, ali ne istih vrednosti, dok je vrednost cepanja neuporediva jer se razlikuju za sedam redova veličine. Uzrok ovolikog neslaganja treba potražiti u skupu aproksimacija koje su primenjene kod WKB metoda.

7.3 Kvazinormalne mode približno ekstremalne Rajsner-Nordstromove crne rupe

Rajsner-Nordstromova crna rupa ima dva horizonta (7.49) kada je $M > Q$. Kada su vrednosti mase i naelektrisanja približno jednake, horizonti r_+ i r_- postaju bliski. Takva crna rupa se naziva približno ekstremalna. Kada su masa i naelektrisanje jednaki, r_+ i r_- postaju jednaki i takva crna rupa se naziva ekstremalna. Kada je $M < Q$, horizont događaja nestaje. Tada se jedina singularnost nalazi u koordinatnom početku i zove se gola singularnost. U prethodnom delu je pokazano da u slučaju približno ekstremalne Rajsner-Nordstromove crne rupe ($r_+ \simeq r_-$), metod verižnih razlomaka ne konvergira dovoljno brzo. U ovom poglavlju će biti primenjen metod analitičkog rešavanja jednačine (6.25) u slučaju približno ekstremalne Rajsner-Nordstromove crne rupe. Primenom analitičkog metoda trebalo bi odrediti u kojoj meri i do kojih granica metod verižnih razlomaka dobro konvergira. Kada se odredi spektar kvazinormalnih moda u okolini približno ekstremalne crne rupe, dobijene rezultate treba uporediti sa već dobijenim metodom verižnih razlomaka. Treba još jednom napomenuti da su granični uslovi koji odgovaraju kvazinormalnim modama takvi da je talas u okolini horizonta događaja čisto upadni, a da je u beskonačnosti čisto odlazeći. U skladu sa činjenicom da je od interesa približno ekstremalna crna rupa, jednačinu kretanja (6.25) treba napisati tako da u njoj figuriše parametar koji kontroliše kolika je ekstremalnost.

Obzirom da su spoljašni i unutrašnji horizonti definisani sa

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (7.49)$$

treba uvesti novu promenjivu x i odgovarajuće parametre koji su adaptirani na ekstremalni slučaj

$$x = \frac{r - r_+}{r_+}, \quad \tau = \frac{r_+ - r_-}{r_+}, \quad (7.50)$$

$$k = 2\omega r_+ - qQ, \quad \kappa = \frac{\omega k - \mu^2 r_+}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}, \quad (7.51)$$

$$\Omega = \frac{\omega r_+ - qQ}{\sqrt{M^2 - Q^2}} r_+ = 2 \frac{\omega r_+ - qQ}{\tau}. \quad (7.52)$$

Parametar τ je zapravo skalirani parametar koji kontroliše ekstremalnost, dok su poslednja tri parametra u kojima figuriše frekvencija ω uvedeni radi kraćeg zapisa,

kao u [117]. Radijalna jednačina (6.25), prepisana preko x i τ , glasi

$$x(x + \tau) \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(2x + \tau - ima \frac{qQ}{r_+} \frac{x(x + \tau)}{(x + 1)^2} \right) \frac{dR}{dx} - \left[l(l + 1) + \mu^2 r_+^2 (x + 1)^2 - \frac{(\omega r_+^2 x^2 + k r_+ x + r_+ \frac{\Omega \tau}{2})^2}{r_+^2 x(x + \tau)} - ima \frac{MqQ}{r_+^2 (x + 1)^2} + ima \frac{qQ^3}{r_+^3 (x + 1)^3} \right] R = 0. \quad (7.53)$$

Zbog jednostavnosti zapisa, umesto R_{lm} će se pisati samo R a podrazumevaće se zavisnost od kvantnih brojeva l i m .

Ovako zapisana jednačina (7.53) može da se rešava analitički u limesu približno ekstremalne crne rupe $\tau \ll 1$ ili $\frac{Q^2}{M^2} \rightarrow 1$.

Formalizam koji treba primeniti za rešavanje jednačine (7.53) je isti kao u [117]. Prema tome, treba analizirati jednačinu (7.53) u različitim delovima, prvo relativno daleko od horizonta kada je $x \gg \tau$, a nakon toga u blizini horizonta kada je $x \ll 1$. Neophodno je da se pokaže da ove dve oblasti moraju da se izaberu tako da imaju zajedničku oblast u kojoj se ta dva rešenja preklapaju (makar približno). Izborom parametara sistema i uslovom da je crna rupa približno ekstremalna, moguće je naći oblast u kojoj se rešenja za dve različite oblasti preklapaju.

Prisustvo preklapajuće oblasti obezbeđuje da se rešenje iz jedne oblasti ekstrapolira u drugu zajedničku oblast. Poređenje ekstrapoliranih rešenja u zajedničkoj oblasti omogućava da se odrede nepoznate integracione konstante.

U oblasti gde je $x \gg \tau$ jednačina (7.53) postaje

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} - \left[l(l + 1) + \mu^2 r_+^2 (x + 1)^2 - \omega^2 r_+^2 x^2 - 2\omega r_+ k x - k^2 \right] R = 0. \quad (7.54)$$

Konstanta nekomutativnosti mora da bude mala, jer je sav formalizam nekomutativne geometrije urađen perturbativno. Vrednost parametra a će biti fiksirana da bude reda veličine ekstremalnosti τ . U tom slučaju, sve korekcije koje potiču od nekomutativnosti nestaju u jednačini (7.54). Usled aproksimacije $a \sim \tau$ i odabira oblasti gde je $x \gg \tau$, članovi koji su proporcionalni sa a imaju u imeniocu stepen od x koji dodatno umanjuje doprinos tih članova, pa kao takvi mogu da se zanemare jer su višeg reda po $\frac{\tau}{x}$.

Sledeći korak je analiza jednačine (7.53) u oblasti $x \ll 1$. Kada se skupe svi relevantni članovi i kada se uvede nova promenljiva $y = -\frac{x}{\tau}$, jednačina (7.53)

postaje

$$y(1-y)\frac{d^2R}{dy^2} + (1-2y)\frac{dR}{dy} + \left[l(l+1) + \mu^2 r_+^2 + \frac{(ky - \frac{\Omega}{2})^2 + \omega r_+ \tau (\Omega y^2 - 2ky^3)}{y(1-y)} - ima \frac{MqQ}{r_+^2} + ima \frac{qQ^3}{r_+^3} \right] R = 0. \quad (7.55)$$

Odmah može da se vidi da nekomutativne korekcije u ovoj oblasti ne iščezavaju. Može se reći da su efekti nekomutativnosti izražajni tamo gde je gravitaciono polje jače (u blizini horizonta), dok iščezavaju tamo gde je gravitaciono polje relativno slabo (daleko od horizonta). Ova analiza je u skladu sa pretpostavkom da je prostorvreme deformisano u jakim gravitacionim poljima i da bi tu trebalo da do izražaja dođu efekti kvantne gravitacije.

Od suštinske važnosti za dobijanje jednačina (7.54) i (7.55) je aproksimacija $a \sim \tau$. Pored te aproksimacije, bitna stvar je u kojoj oblasti se jednačina računa ($x \gg \tau$ ili $x \ll 1$). Treba napomenuti da u realističnom slučaju, parametar τ može da bude proizvoljno mali, što ozbiljno ne ograničava vrednost nekomutativnog parametra a .

U oblasti $x \gg \tau$ smena $R(x) = e^{-\alpha x} x^\beta g(x)$ transformiše jednačinu (7.54) u konfluentnu hipergeometrijsku jednačinu koja ima sledeće rešenje

$$R(x) = C_1 (2\alpha)^{\frac{1}{2} + i\sigma} x^{-\frac{1}{2} + i\sigma} e^{-\alpha x} M\left(\frac{1}{2} + i\sigma + i\kappa, 1 + 2i\sigma, 2\alpha x\right) + C_2 (2\alpha)^{\frac{1}{2} - i\sigma} x^{-\frac{1}{2} - i\sigma} e^{-\alpha x} M\left(\frac{1}{2} - i\sigma + i\kappa, 1 - 2i\sigma, 2\alpha x\right), \quad (7.56)$$

gde su $\alpha = i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} r_+$ i $\sigma = \sqrt{k^2 - \mu^2 r_+^2 - (l + \frac{1}{2})^2}$, a M Kumerova hipergeometrijska funkcija. Da bi se jednačina (7.54) svela na hipergeometrijsku, proizvoljni parametri koji su uvedeni treba da imaju tačno određene vrednosti $\alpha = \pm i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} r_+$ i $\beta = -\frac{1}{2} \pm i\sigma$. Suština ovog koraka je da se uvede smena sa dovoljnim brojem slobodnih parametara, a da se fiksiranjem tih parametara određeni članovi pokrate i da se dobije neka dobro poznata diferencijalna jednačina. Granični uslovi određuju koji znak dobijenih parametara treba da se izabere. Ono o čemu treba voditi računa je da granični uslovi za kvazinormalne mode budu zadovoljeni i da dobrim izborom predznaka bude moguće da rešenja iz dve oblasti, $x \gg \tau$ i $x \ll 1$, imaju dobro preklapanje. Ekstrapolirana rešenja treba da konvergiraju jedno drugom. Da bi se pomenuta rešenja preklapala potrebno je da imaju istu analitičku formu. U ovom slučaju β treba izabrati sa predznakom $\beta = -\frac{1}{2} + i\sigma$. Parametar α određuje smer propagacije talasa i u oblasti daleko od

horizonta treba izabrati predznak + da bi talas bio čisto odlazni u beskonačnosti.

U drugoj oblasti, $x \ll 1$, smena $R(y) = y^{\lambda_1}(1-y)^{\lambda_2}F(y)$ transformiše jednačinu (7.55) u hipergeometrijsku jednačinu sa rešenjem

$$R(y) = y^{-i\frac{\Omega}{2}}(1-y)^{i(\frac{\Omega}{2}-k)} F\left(\frac{1}{2} + i\sigma - ik + \tilde{\rho}, \frac{1}{2} - i\sigma - ik - \tilde{\rho}, 1 - i\Omega; y\right), \quad (7.57)$$

gde su $\tilde{\rho} = \frac{am}{2\sigma}\left(\frac{qQ^3}{r_+^3} - \frac{MqQ}{r_+^2}\right) + i\frac{\sqrt{M^2-Q^2}\omega}{2\sigma}\left(k + \frac{\Omega}{2}\right)$ i $\sigma = \sqrt{k^2 - \mu^2 r_+^2 - (l + \frac{1}{2})^2}$. Treba napomenuti da je $\tau = \sqrt{M^2 - Q^2}/r_+$.

Kao i u prvoj oblasti, parametri λ_1 i λ_2 za koje jednačina (7.55) postaje hipergeometrijska imaju vrednosti $\lambda_1 = \pm i\frac{\Omega}{2}$ i $\lambda_2 = i(\frac{\Omega}{2} \pm k)$, to jest nisu jedinstveni. Kao i u prethodnom slučaju, predznake treba pažljivo izabrati da bi se omogućilo preklapanje ekstrapoliranih rešenja u zajedničkoj oblasti i da bi bili zadovoljeni granični uslovi za kvazinormalne mode. Vrednost λ_1 treba izabrati sa znakom minus, $\lambda_1 = -i\frac{\Omega}{2}$, da bi talas na horizontu bio čisto upadni. Parametar λ_2 treba izabrati da bude $\lambda_2 = i(\frac{\Omega}{2} - k)$ jer će sa tim izborom ekstrapolirana rešenja u dve oblasti $x \gg \tau$ i $x \ll 1$ imati dobro preklapanje.

Kada je λ_1 određeno, opšte rešenje jednačine (7.55) se može zapisati kao linearna kombinacija dve nezavisne hipergeometrijske funkcije. Zahtev da talas bude čisto upadajući, rezultuje odbacivanjem jedne nezavisne hipergeometrijske funkcije, pa je konačno rešenje dato u obliku (7.57).

Ekstrapolacija oba rešenja u zajedničkoj oblasti $\tau \ll x \ll 1$ daje

$$R(x)_{\text{Reg1}} \simeq C_1(2i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} r_+)^{\frac{1}{2}+i\sigma} x^{-\frac{1}{2}+i\sigma} + C_2(2i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} r_+)^{\frac{1}{2}-i\sigma} x^{-\frac{1}{2}-i\sigma} \quad (7.58)$$

i

$$R(x)_{\text{Reg2}} \simeq (-1)^{-i\frac{\Omega}{2}} \left[\frac{\Gamma(1-i\Omega)\Gamma(-2i\sigma-2\tilde{\rho})\tau^{\frac{1}{2}+i\sigma+\tilde{\rho}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma-ik-\tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma+ik-i\Omega-\tilde{\rho})} x^{-\frac{1}{2}-i\sigma} + \frac{\Gamma(1-i\Omega)\Gamma(2i\sigma+2\tilde{\rho})\tau^{\frac{1}{2}-i\sigma-\tilde{\rho}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma-ik+\tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma+ik-i\Omega+\tilde{\rho})} x^{-\frac{1}{2}+i\sigma} \right]. \quad (7.59)$$

Za dobijanje jednačine (7.59) je iskorištena linearna transformacija

$$F(a, b, c; y) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-y)^{-a} F(a, 1-c+a, 1-b+a; \frac{1}{y}) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-y)^{-b} F(b, 1-c+b, 1-a+b; \frac{1}{y}). \quad (7.60)$$

Spajanjem ovih izraza, moguće je odrediti nepoznate integracione konstante C_1 i C_2 . Dobija se

$$C_1 = (-1)^{-i\frac{\Omega}{2}} \frac{\Gamma(1-i\Omega)\Gamma(2i\sigma+2\tilde{\rho})\tau^{\frac{1}{2}-i\sigma-\tilde{\rho}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma-ik+\tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma+ik-i\Omega+\tilde{\rho})} (2i\sqrt{\omega^2-\mu^2r_+})^{-\frac{1}{2}-i\sigma} \quad (7.61)$$

i

$$C_2 = (-1)^{-i\frac{\Omega}{2}} \frac{\Gamma(1-i\Omega)\Gamma(-2i\sigma-2\tilde{\rho})\tau^{\frac{1}{2}+i\sigma+\tilde{\rho}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma-ik-\tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma+ik-i\Omega-\tilde{\rho})} (2i\sqrt{\omega^2-\mu^2r_+})^{-\frac{1}{2}+i\sigma}. \quad (7.62)$$

Uzimajući limes $x \gg \tau$ dobija se da $1/y$ teži nuli, pa funkcija $F(a, b, c; y)$ može da se razvije u Tejlorov red u okolini nule. Tako se dobija dominantan doprinos iz te oblasti.

Rešenje (7.56) u oblasti $x \gg \tau$, u asimptotskom režimu konfluentne hirergeometrijske funkcije

$$M(a, b, z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \Gamma(b) \left(\frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} + \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} \right) + O(|z|^{a-b-1}) \quad (7.63)$$

postaje

$$\begin{aligned} R(x) \sim & \left[C_1(2\alpha)^{i\kappa} \frac{\Gamma(1+2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma+i\kappa)} x^{-1+i\kappa} + C_2(2\alpha)^{i\kappa} \frac{\Gamma(1-2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma+i\kappa)} x^{-1+i\kappa} \right] e^{\alpha x} \\ & + \left[(-1)^{-\frac{1}{2}-i\sigma-i\kappa} C_1(2\alpha)^{-i\kappa} \frac{\Gamma(1+2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma-i\kappa)} x^{-1-i\kappa} \right. \\ & \left. + (-1)^{-\frac{1}{2}+i\sigma-i\kappa} C_2(2\alpha)^{-i\kappa} \frac{\Gamma(1-2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma-i\kappa)} x^{-1-i\kappa} \right] e^{-\alpha x} + O(x^{-1}). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Iz graničnog uslova kvazinormalnih moda da je u beskonačnosti talas čisto odlazeći, jasno je da druga uglasta zagrada u izrazu (7.64) mora da bude jednaka nuli. Tada jednačina (7.64) daje vezu između konstanti C_1 i C_2

$$C_1 \frac{\Gamma(1+2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\sigma-i\kappa)} (-1)^{-i\sigma} + C_2 \frac{\Gamma(1-2i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\sigma-i\kappa)} (-1)^{i\sigma} = 0. \quad (7.65)$$

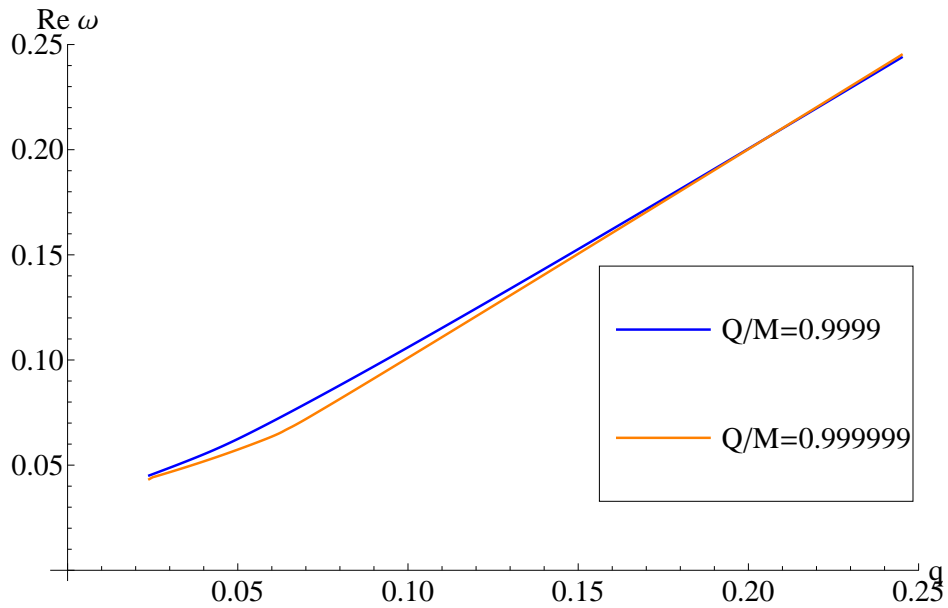
Kombinujući ovu vezu sa (7.61) i (7.62) dobija se kvantizacioni uslov koji u opštem

slučaju može da se reši po frekvenciji ω . Ovaj uslov je dat sa

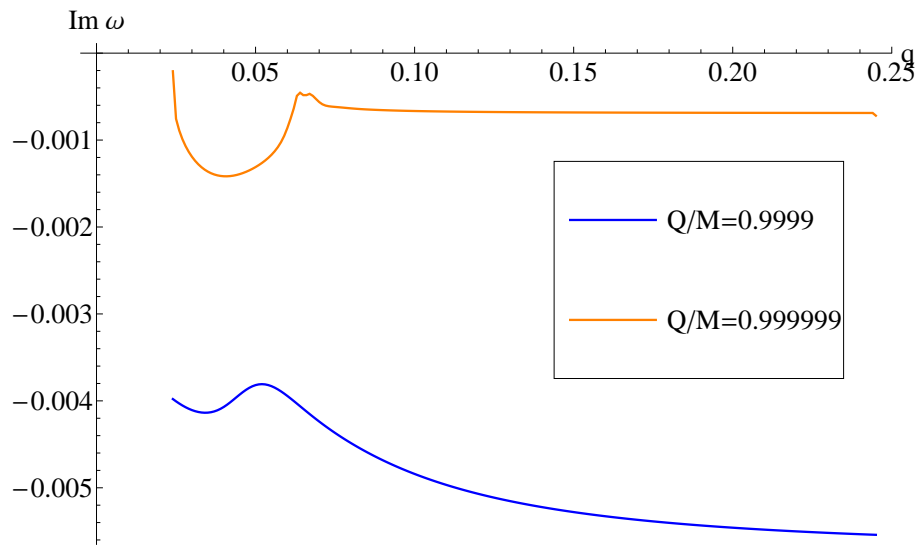
$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1 - 2i\sigma)\Gamma(-2i\sigma - 2\tilde{\rho})}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\sigma - ik - \tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2} - i\sigma + ik - i\Omega - \tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2} - i\sigma - i\kappa)} \\ &= - \frac{\Gamma(1 + 2i\sigma)\Gamma(2i\sigma + 2\tilde{\rho})\tau^{-2\tilde{\rho}}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\sigma - ik + \tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2} + i\sigma + ik - i\Omega + \tilde{\rho})\Gamma(\frac{1}{2} + i\sigma - i\kappa)} \\ & \times \left(-2i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} r_+ \tau \right)^{-2i\sigma}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

U opštem slučaju, ovaj uslov ne može da se reši analitički. Korištenjem programa „Wolfram Mathematica” jednačina (7.66) je rešavana numerički. Dobijeni rezultati su prikazani u sledećem potpoglavlju.

7.3.1 Ekstremalni analitički slučaj - rezultati

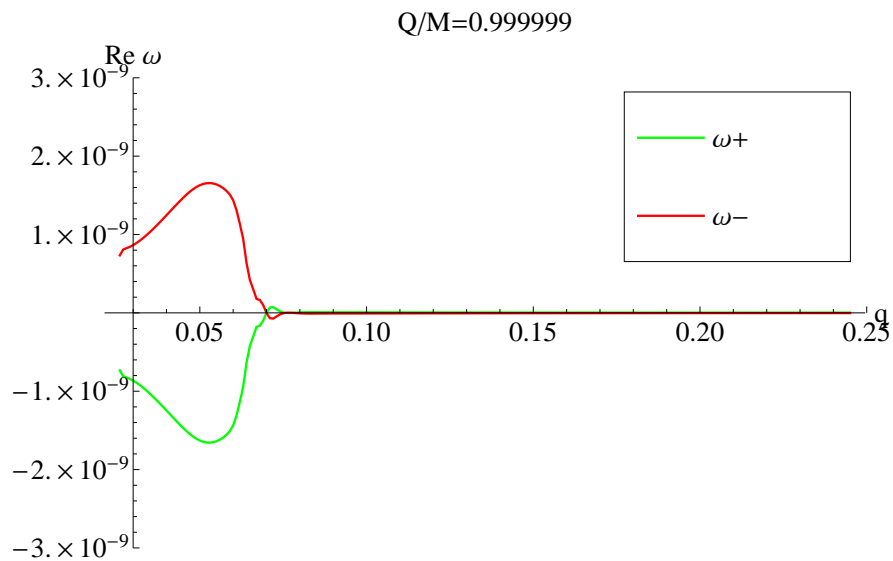


Slika 25: Zavisnost realnog dela frekvencije ω od q za dati odnos Q/M .

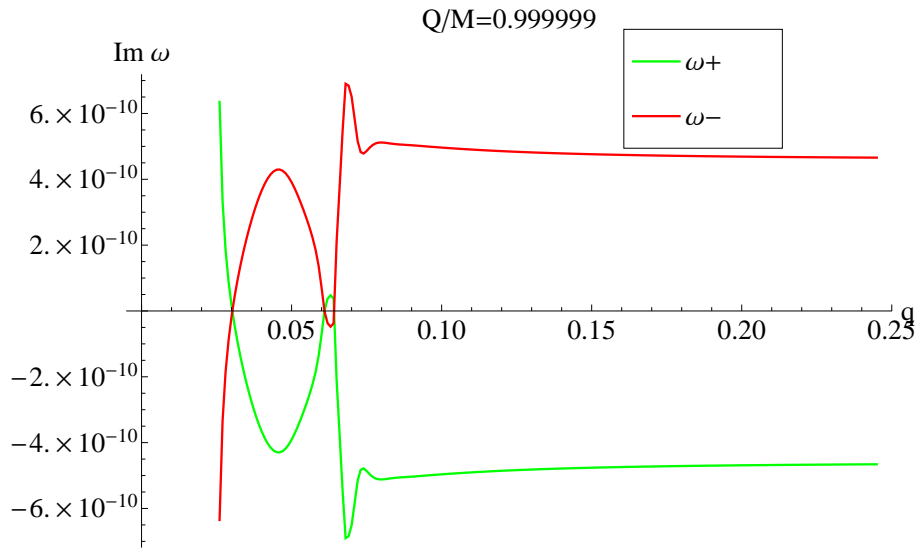


Slika 26: Zavisnost imaginarnog dela frekvencije ω od q za dati odnos Q/M .

Dobijeni rezultati su dobijeni za vrednosti parametara $l = 1$, $\mu = 0.05$. Kada je odnos $Q/M = 0.999999$, tada je $\tau = 0.0028244321$, pa je u skladu sa tim $a = 0.01$. U slučaju kada je $Q/M = 0.9999$, parametar ekstremalnosti je $\tau = 0.0278891617$ i tada je parametar nekomutativnosti $a = 0.1$. Poređenjem ovih rezultata sa rezultatima dobijenim metodom verižnih razlomaka, dobija se dobro poklapanje za realni deo, dok se za imaginarni deo dobijaju rezultati istog reda veličine sa istim kvalitativnim ponašanjima grafika. Treba napomenuti da je u približno ekstremalnom slučaju $q \simeq qQ$.

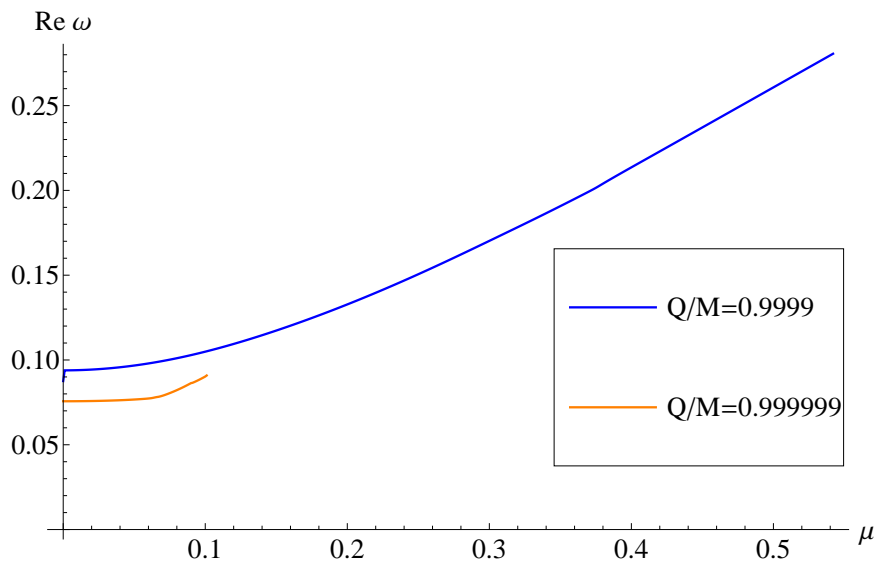


Slika 27: Zavisnost realnog dela razlika frekvencija ω^\pm od q za dati odnos $Q/M = 0.5$.



Slika 28: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od q za dati odnos $Q/M = 0.5$.

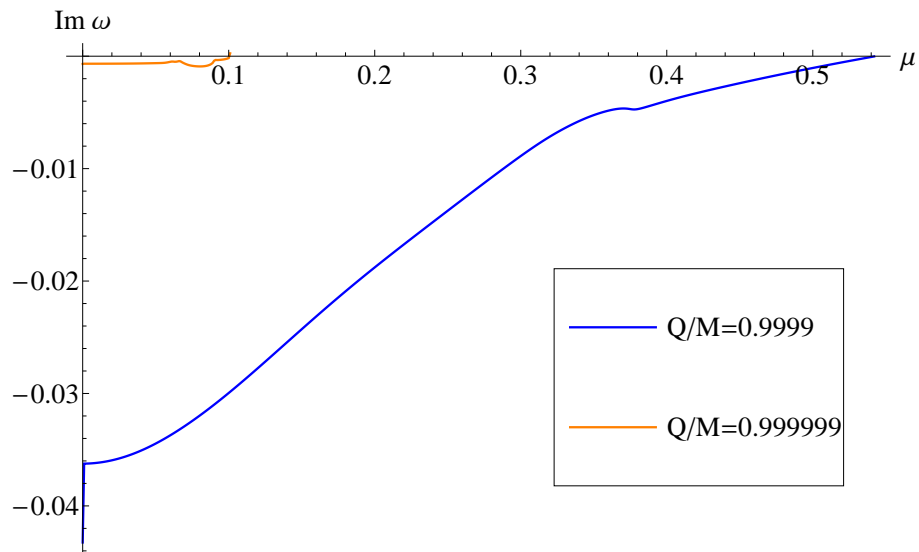
Poređenje razlika frekvencija nije moguće jer ne postoji zadovoljavajuće slaganje ni samih rezultata.



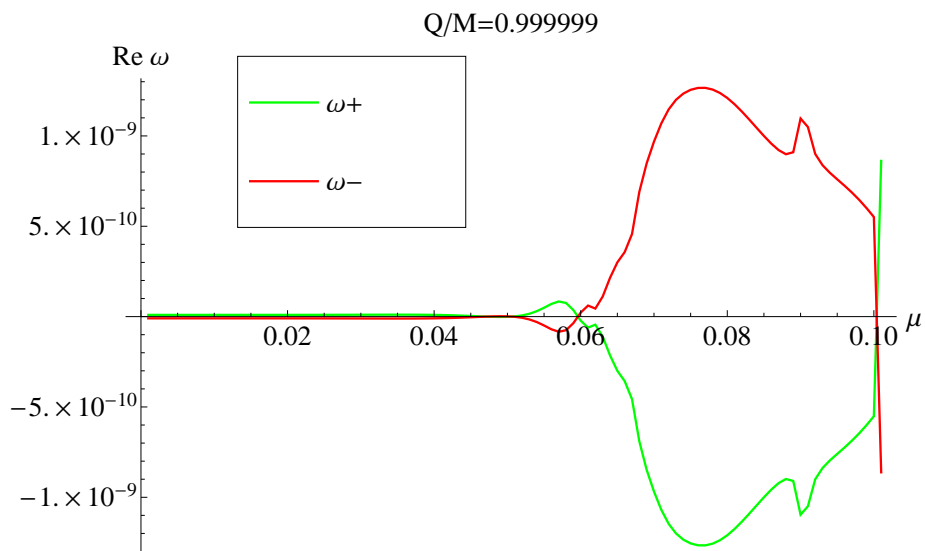
Slika 29: Zavisnost realnog dela frekvencije ω od μ za dati odnos Q/M .

Kao i u slučaju računanja metodom verižnih razlomaka i ovde se vidi pojava kvazirezonanci, međutim vrednosti masa za koje se dobijaju nisu bliske. Takođe i sami rezultati se ne slažu. Rezultati dobijeni metodom verižnih razlomaka i dobijeni analitičkim metodom se razlikuju za jedan red veličine. Vrednosti parametara

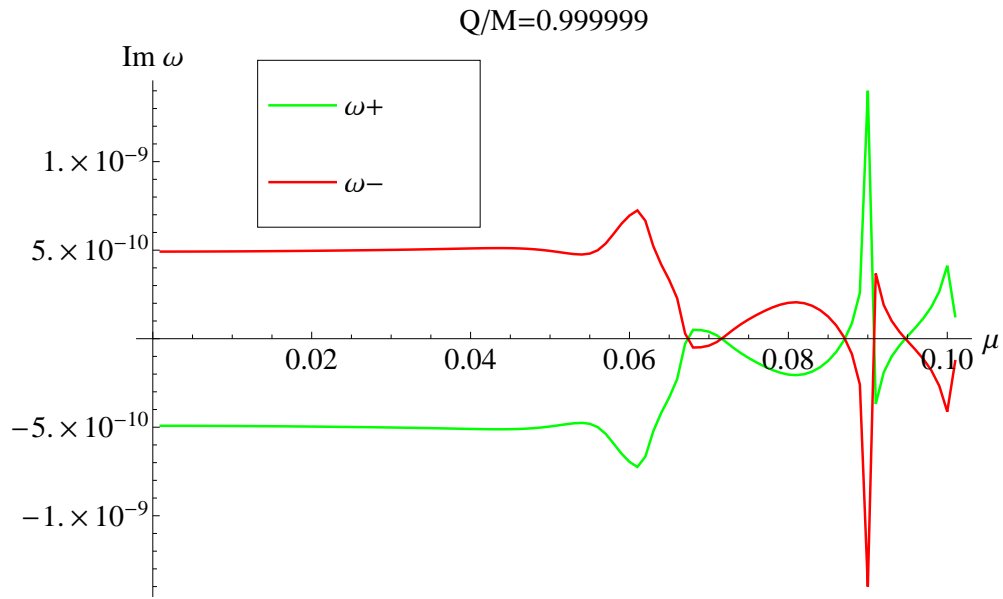
su iste kao i u slučaju računanja zavisnosti od naelektrisanja, sa razlikom što je sada vrednost naelektrisanja fiksirana da bude $q = 0.075$ dok se masa polja meja.



Slika 30: Zavisnost imaginarnog dela frekvencije ω od μ za dati odnos Q/M .



Slika 31: Zavisnost realnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.



Slika 32: Zavisnost imaginarnog dela razlika frekvencija ω^\pm od μ za dati odnos $Q/M = 0.5$.

Poređenjem rezultata metoda verižnih razlomaka sa analitičkim metodom pokazuje se da ova dva metoda ne daju zadovoljavajuće poklapanje rezultata. Pošto je poznato da metod verižnih rezultata ne konvergira dobro kada je crna rupa približno ekstremalna, ovo neslaganje nije neobično.

8 Zaključak

Nekomutativna geometrija, kao jedan od mogućih formalizama koji efektivno opisuju kvantnu gravitaciju, aktivno se izučava u poslednjih par decenija. Najčešće korišten pristup u nekomutativnoj geometriji je korišten i u ovom radu, a to je \star -proizvod pristup. U okviru \star -proizvod pristupa, najviše su izučavani Mojalova i κ -Minkovski nekomutativnost. Za razliku od ove dve nekomutativnosti, u ovom radu je prvi put uvedena angularna nekomutativnost koja u Dekartovim koordinatama podseća na κ -Minkovski nekomutativnost, jer su obe nekomutativnosti tada tipa Lijeve algebre. U sfernim ili cilindričnim koordinatama angularna nekomutativnost podseća na Mojalovu nekomutativnost. Da bi se angularna nekomutativnost primenila na fizičke sisteme korišten je tvist formalizam. Ideja je da se tvistom, koji je 2-kocikl, deformiše Hopfova algebra simetrije fizičkog sistema. Na taj način se po Drinfeldovoj teoremi dobija deformisana (tvistovana) Hopfova algebra simetrija. U ovom radu je angularnim tvistom deformisana Poenkareova Hopfova algebra. Pored Poenkareove Hopfove algebre, deformisan je i diferencijalni račun. Deformisani diferencijalni račun je iskorišten za daljnju deformaciju skalarne teorije polja, dok su deformisani koproizvodi iskorišteni da se ispita kakav je uticaj angularne nekomutativnosti na višestruka stanja. Naime, delovanjem koproizvoda impulsa na \star -proizvod n polja koja su svojstvena stanja operatora impulsa, dobija se da je svojstvena vrednost takvog proizvoda \star -suma datih svojstvenih vrednosti impulsa. Interesantno je da se ista \star -suma dobija iz \star -proizvoda ravnih talasa. Ovaj rezultat je veoma značajan jer opisuje na koji način je zakon održanja narušen. U ovome se i ogleda prednost tvist formalizma u odnosu na druge pristupe, jer iako nekomutativnost narušava neke simetrije koje su postojale u komutativnom slučaju, može da se odredi na koji način je simetrija narušena.

Takođe je razmatrana i teorija nekomutativnog kompleksnog skalarnog polja u zakrivljenom prostoru. Pri tome je geometrija prostorvremena tretirana kao fiksirana pozadinska geometrija na koju nekomutativna deformacija ne utiče. Ova aproksimacija sužava izbor geometrije na one za koje je angularni tvist istovremeno i Killingov tvist. Geometrija Rajsner-Nordstromove crne rupe ispunjava

ovaj uslov, pa je u nastavku razmatrana dinamika nekomutativnog naelektrisanog skalarnog polja u Rajsner-Nordstromovoj geometriji. Korištenjem tvist formalizma i Sajberg-Vitenovog preslikavanja je dobijena jednačina kretanja za skalarno polje u geometriji Rajsner-Nordstromove crne rupe. Dobijena jednačina je rešena sa graničnim uslovima kvazinormalnih moda. Spektar kvazinormalnih moda je prvo izračunat WKB metodom u limesu velikih kvantnih brojeva l . Nakon toga je spektar kvazinormalnih moda izračunat metodom verižnih razlomaka. Umesto tročlanih rekurentnih relacija koje se dobiju u komutativnom slučaju, u nekomutativnom slučaju se dobiju šestočlane rekurentne relacije. Gausovim metodom eliminacije se one mogu svesti na tročlane rekurentne relacije. U slučaju angularnog momenta $l = 1$ postoji cepanje spektralnih linija po magnetnom kvantnom broju m . Kvantitativno gledajući, vrednost cepanja je četiri reda veličine manja od vrednosti samih frekvencija. Kada se metod verižnih razlomaka uradi za veliko l tako da se vrednosti parametara poklope sa onima koji su korišteni u WKB metodu, rezultati se slažu samo kvalitativno. Ni same frekvencije, ni vrednost cepanja nisu u saglasnosti. Razlog za neslaganje leži u činjenici da je veliki broj aproksimacija neophodan za WKB metod. S druge strane, metod verižnih razlomaka ne konvergira najbolje u slučaju približno ekstremalne crne rupe. Zbog toga je taj slučaj analiziran posebnim metodom koji daje rešenje u analitičkoj formi. Rezultati koji su dobijeni korištenjem ova dva metoda se poklapaju kvalitativno, ali kvantitativno slaganje nije potpuno upravo iz razloga što metod verižnih razlomaka ne konvergira najbolje u ekstremalnom slučaju. Zbog toga bi trebalo u nastavku istraživanja izračunati spektar kvazinormalnih moda u slučaju ekstremalne crne rupe kao u [129] i tako dobijene rezultate uporediti sa onima dobijenim analitičkom metodom.

U ovom radu je predstavljen jedan model nekomutativnog prostora koji je dobijen deformacijom Poenkareove Hopfove algebre angularnim tvistom. Ovakva deformacija se pokazala kao veoma pogodna za proučavanje nekih fenomenoloških aspekata, što gravitacionih, što vezanih za fiziku čestica. Ovaj model nekomutativnosti primenjen na kvazinormalne mode predviđa razbijanje degeneracije i cepanje spektralnih linija. Ovu činjenicu bi bilo zanimljivo proveriti i eksperimentalno na nekom od eksperimenata koji se bave merenjem spektara kvazinormalnih moda. Treba istaći da je nakon otkrića gravitacionih talasa [17, 18], ovaj aspekt fizike našao u centru pažnje mnogih današnjih istraživanja. Kako nekomutativni aspekt kvazinormalnih moda u četiri dimenzije nikad ranije pre ovog rada nije izučavan, ovaj rad može da posluži i kao pokazatelj za neka daljnja istraživanja u ovoj oblasti, što potencijalno može da rezultira potvrdom da je prostorvreme nekomutativno. Drugi fenomenološki aspekt ovog modela koji je ovde izučavan

se odnosi na deformisani zakon (ne)održanja impulsa. Međutim, u ovom radu je ispitana samo kinematika ovakvih raspada na nivou zakona održanja impulsa.

U nastavku istraživanja kvazinormalnih moda biće analiziran neki realističniji slučaj. Naime, astrofizičke crne rupe su u najvećem broju rotirajuće crne rupe koje su nenaelektrisane ili slabo naelektrisane. Pored skalarne materije, u okolini crnih rupa bi trebalo da ima i fermionske materije i vektorskih bozona. To znači da bi, pored spektara skalarnih kvazinormalnih moda, trebalo analizirati i fermionske, vektorske i na kraju gravitacione kvazinormalne mode u okolini Kerr-Njumanove crne rupe da bi se dobila realističnija slika. Da bi se izračunao spektar gravitacionih kvazinormalnih moda, neophodno je konstruisati odgovarajuću teoriju gravitacije koja bi bila deformisana angularnim tvistom. Nekomutativna gravitacija je konstruisana u [132, 100] i može da bude dobar pokazatelj kako bi trebalo da se konstruiše nekomutativna teorija gravitacije u slučaju angularne nekomutativnosti.

Drugi pravac budućeg istraživanja će se odnositi na uticaj deformisanog zakona održanja impulsa na čestičnu dinamiku, na primeru neke dobro definisane reakcije koju standardni model predviđa. Put kojim bi se ispitala ta reakcija je manje-više pravolinijski. Dejstvo koje je invarijantno na gradijentne transformacije treba napisati preko nekomutativnih polja i \star -proizvoda. Zatim bi trebalo preći u impulsni prostor i izvesti modifikovana Fajnmanova pravila. Otvoreno pitanje je da li bi se nekomutativna polja prepisala preko komutativnih putem Sajberg-Vitenovog preslikavanja, ili bi se uvodili novi stepeni slobode u teoriji. Iz tako dobijenih rezultata se, dobro razvijenim metodama mogu izračunati efikasni presek ili širina raspada, u zavisnosti od same reakcije. Dobijeni rezultati bi mogli da se uporede sa izmerenim rezultatima u dosadašnjim eksperimentima ili da se sačekaju neki budući eksperimenti koji bi bili na višim energijama. Ovo bi takođe mogao da bude jedan korak napred u eksperimentalnom potvrđivanju nekomutativnosti.

Dodaci

Dodatak A Proizvod ravnih talasa

Potrebno je da se izračuna

$$e^{ip \cdot x} \star e^{iq \cdot x} = \exp \left\{ \frac{aq_0}{2} (y\partial_x - x\partial_y) \right\} e^{ip \cdot x} \exp \left\{ \frac{ap_0}{2} (y\partial_x - x\partial_y) \right\} e^{iq \cdot x}. \quad (\text{A.1})$$

U cilju pronalaženja izraza za \star -proizvod između ravnih talasa potrebno je izračunati dva pomoćna rezultata.

1.

Ukoliko tri operatora A , B i C formiraju Lijevu algebru:

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = -\lambda A, \quad [B, C] = \lambda B, \quad (\text{A.2})$$

gde je λ kompleksan broj, onda za proizvoljni kompleksni broj τ važi sledeća jednakost:

$$\exp \{ \tau (A + B) \} = \exp \{ \alpha(\tau) B \} \exp \{ \beta(\tau) C \} \exp \{ \gamma(\tau) A \}, \quad (\text{A.3})$$

gde su

$$\alpha(\tau) = \gamma(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot \tau \right), \quad \beta(\tau) = \frac{2}{\lambda} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot \tau \right). \quad (\text{A.4})$$

Detaljan dokaz se može videti dodatku knjige [133].

2.

Za proizvoljnu funkciju $\mathcal{F}(z)$ važi sledeć izraz:

$$\exp \{ kz\partial_z \} \mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(\exp(k) z). \quad (\text{A.5})$$

Dokaz:¹⁰ Uvedena je nova promenjiva $w = \ln(z)$ i iskorištena činjenica da je izvod generator translacija.

U nastavku su dati sledeći koraci. Prvi faktor sa desne strane jednakosti (A.1) ima strukturu leve strane izraza (A.3) za

$$A = y\partial_x, \quad B = -x\partial_y, \quad \tau = \frac{aq_0}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Računanjem komutatora između A i B dolazi se do strukture Lijeve algebre (A.2) sa elementima

$$C = x\partial_x - y\partial_y, \quad \lambda = -2. \quad (\text{A.7})$$

na osnovu toga (A.3) daje

$$\exp\left\{\frac{aq_0}{2}(y\partial_x - x\partial_y)\right\} = \alpha \beta \gamma, \quad (\text{A.8})$$

gde su

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \exp\left\{\tan\left(\frac{aq_0}{2}\right)x\partial_y\right\}, \\ \beta &\equiv \exp\left\{-\ln\left(\cos\left(\frac{aq_0}{2}\right)(x\partial_x - y\partial_y)\right)\right\}, \\ \gamma &\equiv \exp\left\{-\tan\left(\frac{aq_0}{2}\right)y\partial_x\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dejstvo operatora definisanih u (A.9) na ravne talase je zadato na sledeći način:

$$\gamma e^{-ipx} = e^{-ip'x}, \quad p' = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 - \tan\left(\frac{aq_0}{2}\right)p_1 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Koristeći izraz (A.5) direktno se dobija

$$\beta e^{-ip'x} = e^{-ip''x}, \quad p'' = \begin{pmatrix} p'_0 \\ (\cos\left(\frac{aq_0}{2}\right))^{-1}p'_1 \\ \cos\left(\frac{aq_0}{2}\right)p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

¹⁰Dokaz može da se nađe u knjizi [133].

Konačno,

$$\alpha e^{-ip''x} = e^{-ip'''x}, \quad p''' = \begin{pmatrix} p_0'' \\ p_1'' + \tan\left(\frac{aq_0}{2}\right)p_2'' \\ p_2'' \\ p_3'' \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Kombinujući (A.10), (A.11) i (A.12) dolazi se do deformisane sume (\star -suma):

$$e^{-p \cdot x} \star e^{-iq \cdot x} = e^{-(p+\star q) \cdot x}, \quad (\text{A.13})$$

gde je \star -suma dva četveroimpulsa definisana sa:

$$p + \star q = R(q_0)p + R(-p_0)q, \quad (\text{A.14})$$

gde je

$$R(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{at}{2}\right) & \sin\left(\frac{at}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{at}{2}\right) & \cos\left(\frac{at}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Dodatak B Dobijanje šestočlanih rekurentnih relacija

Polazeći od $R(r) = e^{i\Omega r}\psi(r)$, jednačina (6.25) postaje

$$\begin{aligned} & (r - r_+)(r - r_-) \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left[2(r - M) + 2i\Omega(r - r_+)(r - r_-) \right. \\ & \left. - iamqQ \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} \right] \frac{d\psi}{dr} + \left[2(r - M)i\Omega - \Omega^2(r - r_+)(r - r_-) \right. \\ & \left. - l(l + 1) + \frac{r^4}{(r - r_+)(r - r_-)} \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 - \mu^2 r^2 - iamqQ \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) \right. \\ & \left. - iamqQi\Omega \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Uvođenjem nove promenjive $z = \frac{r-r_+}{r-r_-}$, dobija se

$$r = \frac{r_+ - zr_-}{1 - z}, \quad r - r_- = \frac{r_+ - r_-}{1 - z}, \quad r - r_+ = \frac{z(r_+ - r_-)}{1 - z}. \quad (\text{B.17})$$

Uz napomenu da jednačina (6.25) ima iregularan singularitet u $r = +\infty$ i tri regularna singulariteta u $r = 0$, $r = r_-$ i $r = r_+$, rešenje može da se napiše u obliku stepenog reda u okolini $r = r_+$

$$\psi(r) = (r - r_-)^\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{n+\delta} = \frac{(r_+ - r_-)^\epsilon}{(1 - z)^\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta}. \quad (\text{B.18})$$

Celokupno radijalno rešenje

$$R(r) = e^{i\Omega r} (r - r_-)^\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{n+\delta}, \quad (\text{B.19})$$

mora da zadovolji granične uslove (7.25) na horizontu i u beskonačnosti. Pored toga, treba imati u vidu da se prelaskom sa radijalne koordinate na promenjivu z izvod transformiše u

$$\frac{dF}{dr} = \frac{(1 - z)^2}{r_+ - r_-} \frac{dF}{dz}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} = \frac{(1 - z)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[(1 - z) \frac{d^2F}{dz^2} - 2 \frac{dF}{dz} \right]. \quad (\text{B.21})$$

Ubacivanjem izraza (B.18) u (B.16) i korištenjem dekompozicije $r = \frac{r_+ - zr_-}{1 - z} = r_- + \frac{r_+ - r_-}{1 - z}$, sledi

$$\begin{aligned} & z(1 - z)^2 (r_+ - r_-)^\epsilon \left[\frac{\epsilon(\epsilon + 1)}{(1 - z)^{\epsilon+2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + \frac{2\epsilon}{(1 - z)^{\epsilon+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \delta) z^{n+\delta-1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1 - z)^\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \delta)(n + \delta - 1) z^{n+\delta-2} \right] + \left[(1 - z)^2 + 2i\Omega z (r_+ - r_-) \right. \\ & \left. - iamqQ \frac{(r_+ - r_-)z(1 - z)^2}{(r_+ - zr_-)^2} \right] (r_+ - r_-)^\epsilon \left[\frac{\epsilon}{(1 - z)^{\epsilon+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1 - z)^\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \delta) z^{n+\delta-1} \right] + \left[i\Omega (r_+ - r_-) \frac{1 + z}{1 - z} - \Omega^2 z \frac{(r_+ - r_-)^2}{(1 - z)^2} - l(l + 1) \right. \\ & \left. + \frac{(r_+ - zr_-)^2}{z(r_+ - r_-)^2} \left(\omega \left(r_- + \frac{r_+ - r_-}{1 - z} \right) - qQ \right)^2 - \mu^2 \left(r_- + \frac{r_+ - r_-}{1 - z} \right)^2 \right. \\ & \left. - iamqQ \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) + amqQ\Omega \frac{(r_+ - r_-)^2 z}{(r_+ - zr_-)^2} \right] \frac{(r_+ - r_-)^\epsilon}{(1 - z)^\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Nakon množenja izraza sa $(1-z)^\epsilon$, ostaje nekoliko članova u obliku razlomaka. Svi ovi članovi imaju $1-z$ ili njegov stepen u imeniocu. Kada se takvi članovi saberu, dobije se pojednostavljeni izraz koji nema razlomke u sebi,

$$\begin{aligned}
& \frac{2\omega^2 r_-(r_+ - r_-)}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} + \left[2\omega \frac{(r_+ - r_-)(\omega r_+ - qQ)}{1-z} + 2i\Omega \frac{(r_+ - r_-)\epsilon z}{1-z} \right. \\
& + i\Omega(r_+ - r_-) \frac{1+z}{1-z} - \Omega^2(r_+ - r_-)^2 \frac{z}{(1-z)^2} + \omega^2 \frac{(r_+ - r_-)^2 z}{(1-z)^2} \\
& \left. - \mu^2 \left(2 \frac{r_-(r_+ - r_-)}{1-z} + \frac{(r_+ - r_-)^2}{(1-z)^2} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left[i\Omega(r_+ - r_-) + 2\omega(\omega r_+ - qQ)(r_+ - r_-) - \mu^2(r_+ + r_-)(r_+ - r_-) \right] a_n z^{n+\delta}.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Izraz (7.27) za ϵ je takođe iskorišten u gornjem izrazu. Vraćanjem izraza (B.23) u jednačinu (B.22), dobije se uprošćeni izraz koji više u sebi nema članove u obliku razlomka

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta) z^{n+\delta-1} + (2\epsilon - 2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta) z^{n+\delta} \\
& + (1 - 2\epsilon) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta) z^{n+\delta+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta)(n+\delta-1) z^{n+\delta-1} \\
& - l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} - \mu^2 r_-^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta)(n+\delta-1) z^{n+\delta} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta)(n+\delta-1) z^{n+\delta+1} + 2i\Omega(r_+ - r_-) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\delta) z^{n+\delta} \\
& + \omega^2 r_-^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} + \frac{2\omega r_-^2}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \\
& - \frac{2\omega r_-^2}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} + \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta-1} \\
& - 2 \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} \\
& + 4\omega r_- (\omega r_+ - qQ) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + \frac{2r_-}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta-1} \\
& - \frac{2r_-}{r_+ - r_-} (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + (\omega r_+ - qQ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \left[i\Omega(r_+ - r_-) + 2\omega(\omega r_+ - qQ)(r_+ - r_-) - \mu^2(r_+ + r_-)(r_+ - r_-) \right] \\
& - iamqQ \frac{(r_+ - r_-)\epsilon(1-z)}{(r_+ - zr_-)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} \\
& - iamqQ(r_+ - r_-) \frac{(1-z)^2}{(r_+ - zr_-)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\delta)z^{n+\delta} \\
& - iamqQ \frac{(1-z)^2}{(r_+ - zr_-)^2} \left(M - Q^2 \frac{1-z}{r_+ - zr_-} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \\
& + amqQ\Omega \frac{(r_+ - r_-)^2}{(r_+ - zr_-)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} = 0,
\end{aligned} \tag{B.24}$$

gde su $2M = r_+ + r_-$ i $Q^2 = r_+ r_-$. Članovi koji u sebi nemaju parametar deformacije a dovode do tročlanih rekurentnih relacija kao u [125, 124] tako da (B.24) može da se svede na

$$\begin{aligned}
& (r_+ - zr_-)^3 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1}] z^{n+\delta} + (r_+ - zr_-)^3 (\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0) z^\delta \\
& + (r_+ - zr_-)^3 \left[\delta^2 + (\omega r_+ - qQ)^2 \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)^2} \right] a_0 z^{\delta-1} \\
& - iamqQ(r_+ - r_-)\epsilon(r_+ - zr_-)(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} \\
& - iamqQ(r_+ - r_-)(r_+ - zr_-)(1-z)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\delta)z^{n+\delta} \\
& - iamqQM(r_+ - zr_-)(1-z)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} \\
& + iamqQr_+ r_- (1-z)^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta} + amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 (r_+ - zr_-) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\delta+1} = 0,
\end{aligned}$$

sa $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ datim u (7.29). Obzirom na to da opšte rešenje (7.26) treba da bude nesingularno na horizontu $z = 0$, i da je $z^{\delta-1}$ član najnižeg reda z , njegov koeficijent u (B.25) treba da nestane, što se poklapa sa dobijenim rezultatom za δ od ranije (7.27).

Kada se izrazu (B.25) dodaju članovi koji u sebi sadrže parametar nekomutativnosti a , treba sve dobijene članove grupisati po stepenima veličine z uz od-

govarajuće pomeranje indeksa u sumi gde je potrebno da svi članovi imaju opšti stepen $z^{n+\delta}$. Članovi kod kojih je $n \geq 4$ formiraju šestočlane rekurentne relacije što je karakterističan problem za ovaj nekomutativni model. Pored toga, potrebno je grupisati i sve preostale članove kod kojih je $n < 4$. Ovi članovi na neki način imaju ulogu inicijalnih rekurentnih relacija. Dobijeni su analizom koeficijenata koji stoje uz stepene redom $z^\delta, z^{\delta+1}, z^{\delta+2}$ i $z^{\delta+3}$. Kao rezultat se dobije sledeći izraz

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=4}^{\infty} \left[A_n a_{n+1} + B_n a_n + C_n a_{n-1} + D_n a_{n-2} + E_n a_{n-3} + F_n a_{n-4} \right] z^{n+\delta} \\
& + \left[\left(3r_+ r_-^2 \gamma_1 + iamqQ(r_+ - r_-)r_- \delta - r_-^3 \beta_0 - iamqQ(r_+ - r_-)r_- \epsilon \right. \right. \\
& + iamqQM r_- - iamqQ r_+ r_- \left. \right) a_0 + \left(3r_+ r_-^2 \beta_1 + iamqQ(r_+^2 - r_-^2) \epsilon \right. \\
& - iamqQ(r_+ - r_-)(r_+ + 2r_-)(\delta + 1) - iamqQM(r_+ + 2r_-) + 3iamqQ r_+ r_- \\
& - amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_- - 3r_+^2 r_- \gamma_2 - r_-^3 \alpha_0 \left. \right) a_1 \\
& + \left(r_+^3 \gamma_3 + iamqQ(r_+ - r_-)(2r_+ - r_-)(\delta + 2) - 3r_+^2 r_- \beta_2 \right. \\
& - iamqQ(r_+ - r_-)r_+ \epsilon + iamqQM(2r_+ + r_-) - 3iamqQ r_+ r_- \\
& + amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_+ + 3r_+ r_-^2 \alpha_1 \left. \right) a_2 + \left(r_+^3 \beta_3 - iamqQ(r_+ - r_-)r_+(\delta + 3) \right. \\
& \left. - iamqQM r_+ + iamqQ r_+ r_- - 3r_+^2 r_- \alpha_2 \right) a_3 + r_+^3 \alpha_3 a_4 \left. \right] z^{\delta+3} \\
& + \left[\left(3r_+ r_-^2 \beta_0 + iamqQ(r_+ - r_-)(r_+ + r_-) \epsilon - iamqQ(r_+ - r_-)(r_+ + 2r_-) \delta \right. \right. \\
& - iamqQM(r_+ + 2r_-) + 3iamqQ r_+ r_- - amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_- - 3r_+^2 r_- \gamma_1 \left. \right) a_0 \\
& + \left(r_+^3 \gamma_2 + iamqQ(r_+ - r_-)(2r_+ + r_-)(\delta + 1) - 3r_+^2 r_- \beta_1 - iamqQ(r_+ - r_-)r_+ \epsilon \right. \\
& + iamqQM(2r_+ + r_-) - 3iamqQ r_+ r_- + amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_+ + 3r_+ r_-^2 \alpha_0 \left. \right) a_1 \\
& + \left(r_+^3 \beta_2 - iamqQ(r_+ - r_-)r_+(\delta + 2) - iamqQM r_+ - 3r_+^2 r_- \alpha_1 \right. \\
& \left. + iamqQ r_+ r_- \right) a_2 + r_+^3 \alpha_2 a_3 \left. \right] z^{\delta+2} + \left[\left(r_+^3 \gamma_1 + amqQ\Omega(r_+ - r_-)^2 r_+ - 3r_+^2 r_- \beta_0 \right. \right. \\
& - iamqQ(r_+ - r_-)r_+ \epsilon + iamqQ(r_+ - r_-)(2r_+ + r_-) \delta \\
& \left. + iamqQM(2r_+ + r_-) - 3iamqQ r_+ r_- \right) a_0 + \left(r_+^3 \beta_1 - iamqQ(r_+ - r_-)r_+(\delta + 1) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - iamqQMr_+ + iamqQr_+r_- - 3r_+^2r_-\alpha_0 \right) a_1 + r_+^3\alpha_1a_2 \Big] z^{\delta+1} + \left[\left(r_+^3\beta_0 \right. \right. \\
& \left. \left. + iamqQr_+r_- - iamqQ(r_+ - r_-)r_+\delta - iamqQMr_+ \right) a_0 + r_+^3\alpha_0a_1 \right] z^\delta = 0. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Koeficijenti $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ su dati u (7.38). Treba primetiti da se koeficijenti koji stoje uz a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 i koji se pojavljuju ispred najnižih stepena $z^\delta, z^{\delta+1}, z^{\delta+2}$ i $z^{\delta+3}$ zapravo poklapaju sa vrednostima koeficijenata $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$. Naime, mogu se napisati u vidu $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, i = 0, 1, 2, 3$. Prema tome, deo rekurentne relacije polazeći od (B.25) može da se zapiše kao

$$\begin{aligned}
A_n a_{n+1} + B_n a_n + C_n a_{n-1} + D_n a_{n-2} + E_n a_{n-3} + F_n a_{n-4} &= 0, \\
A_3 a_4 + B_3 a_3 + C_3 a_2 + D_3 a_1 + E_3 a_0 &= 0, \\
A_2 a_3 + B_2 a_2 + C_2 a_1 + D_2 a_0 &= 0, \\
A_1 a_2 + B_1 a_1 + C_1 a_0 &= 0, \\
A_0 a_1 + B_0 a_0 &= 0. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Dodatak C Gausov metod eliminacije

Kada se identifikuje odgovarajuća rekurentna relacija, ona treba da se svede na odgovarajuću tročlanu pomoću sukcesivne i sistematske primene Gausovog metoda eliminacije. Tročlana rekurentna relacija može da se reši primenom već opisanog pravolinijskog algoritma.

Ako se pođe od opšte rekurentne relacije sa p članova,

$$A_{1,n}^{(0)} a_{n+1} + A_{2,n}^{(0)} a_n + A_{3,n}^{(0)} a_{n-1} + \cdots + A_{p-1,n}^{(0)} a_{n-(p-2)+1} + A_{p,n}^{(0)} a_{n-(p-2)} = 0, \tag{C.27}$$

i izvrši u celosti k , Gauss-ovih eliminacija $k \leq p - 3$, kao rezultat se dobija rekurentna relacija sa $p - k$ članova,

$$A_{1,n}^{(k)} a_{n+1} + A_{2,n}^{(k)} a_n + \cdots + A_{p-k-1,n}^{(k)} a_{n-(p-k-2)+1} + A_{p-k,n}^{(k)} a_{n-(p-k-2)} = 0, \tag{C.28}$$

Ova dva izraza se mogu zapisati na kompaktniji način,

$$\sum_{i=1}^p A_{i,n}^{(0)} a_{n+2-i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{p-k} A_{i,n}^{(k)} a_{n+2-i} = 0. \quad (\text{C.29})$$

Nakon prve Gauss-ove eliminacije, dobija se rekurentna veza sa $p - 1$ članova i koeficijentima $A_{i,n}^{(1)}$ datim kao

$$\begin{aligned} A_{1,n}^{(1)} &= A_{1,n}^{(0)}, & n &\geq p - 2 \\ A_{2,n}^{(1)} &= A_{2,n}^{(0)} - \frac{A_{p,n}^{(0)}}{A_{p-1,n-1}^{(1)}} A_{1,n-1}^{(1)}, & n &\geq p - 2 \\ A_{i,n}^{(1)} &= A_{i,n}^{(0)} - \frac{A_{p,n}^{(0)}}{A_{p-1,n-1}^{(1)}} A_{i-1,n-1}^{(1)}, & n &\geq p - 2 \\ A_{p-1,n}^{(1)} &= A_{p-1,n}^{(0)} - \frac{A_{p,n}^{(0)}}{A_{p-1,n-1}^{(1)}} A_{p-2,n-1}^{(1)}, & n &\geq p - 2 \\ A_{i,n}^{(1)} &= A_{i,n}^{(0)}, & n &\leq p - 3 \end{aligned}$$

Slično, nakon k -te Gauss-ove eliminacije, dobija se rekurentna veza (C.28) sa koeficijentima

$$\begin{aligned} A_{1,n}^{(k)} &= A_{1,n}^{(k-1)} = A_{1,n}^{(0)}, & n &\geq p - 2 - (k - 1) \\ A_{2,n}^{(k)} &= A_{2,n}^{(k-1)} - \frac{A_{p-(k-1),n}^{(k-1)}}{A_{p-k,n-1}^{(k)}} A_{1,n-1}^{(k)}, & n &\geq p - 2 - (k - 1) \\ A_{p-i,n}^{(k)} &= A_{p-i,n}^{(k-1)} - \frac{A_{p-(k-1),n}^{(k-1)}}{A_{p-k,n-1}^{(k)}} A_{p-i-1,n-1}^{(k)}, & n &\geq p - 2 - (k - 1) \\ A_{p-k,n}^{(k)} &= A_{p-k,n}^{(k-1)} - \frac{A_{p-(k-1),n}^{(k-1)}}{A_{p-k,n-1}^{(k)}} A_{p-k-1,n-1}^{(k)}, & n &\geq p - 2 - (k - 1) \\ A_{i,n}^{(k)} &= A_{i,n}^{(k-1)} = A_{i,n}^{(0)}, & n &\leq p - 2 - k \end{aligned}$$

U slučaju koji je analiziran u ovom radu, ove veze se svode na (7.42),(7.43), (7.45),(7.46),(7.47),(7.48) koje su korišćene u poglavlju 7.

Dodatak D Mathematica fajl za računanje frekvencija i crtanje grafika

```

Clear[rp, rm, q, Q, M, l, μ]
rp = M + Sqrt[M^2 - Q^2];
rm = M - Sqrt[M^2 - Q^2];
l = 1;
μ = 0.05;
q =  $\frac{5}{Q}$ ;
M = 1;
m = 1;
a = 0.01;
Q = 0.5;
Ω[ω_] := Sqrt[ω^2 - μ^2]
α[n_, ω_] := - $\frac{rm * (n+1)^2 + rp * (n+1) * (-2 I * q * Q - (n) + 2 I * rp * ω - 1)}{rp - rm}$ 
β[n_, ω_] :=

$$-\frac{1}{2 * Ω[ω] * (rp - rm)} (rp * (2 * (-2 * q^2 * Q^2 * (ω + Ω[ω]) + I * Q * q * (2 * n + 1) * (2 * Ω[ω] + ω) +$$


$$(1 * (1 + 1) + 2 * n^2 + 2 * n + 1) * Ω[ω]) +$$


$$rp * (4 * ω * (ω + Ω[ω]) * (3 * q * Q - 2 * I * n - I) + 3 * I * μ^2 * (2 * I * q * Q + 2 * n + 1)) +$$


$$2 * rp^2 * (μ^2 * (3 * ω + Ω[ω]) - 4 * ω^2 * (ω + Ω[ω]))) -$$


$$2 * rm * (I * rp * (-2 * ω^2 * (2 * n + 1) + μ^2 * (2 + 4 * n + I * q * Q)) + I * Q * q * ω * (2 * n + 1) +$$


$$(1 * (1 + 1) + 2 * n^2 + 2 * n + 1) * Ω[ω] + μ^2 * rp^2 * (ω + Ω[ω])) + I * μ^2 * rm^2 * (2 * n + 1)$$

γ[n_, ω_] :=  $\left( \frac{I * (q * Q * ω - \frac{1}{2} * (ω^2 + Ω[ω]^2)) * (rp + rm)}{Ω[ω]} + I * Q * q * n - I * ω * (rp + rm) \right) *$ 

$$\left( n - I * \left( -2 * (rp - rm) * \left( q * Q * ω - \frac{1}{2} * (rp + rm) * (ω^2 + (Ω[ω])^2) \right) + \right.$$


$$\left. Ω[ω] * (rp + rm) * (ω * (rp + rm) - 2 * q * Q) + ω * Ω[ω] * (rp - rm)^2 \right) / (2 * Ω[ω] * (rp - rm)) \right)$$

α0[n_, ω_] := rp^3 * α[n, ω]
β0[n_, ω_] := -3 * rp^2 * rm * α[n - 1, ω] + rp^3 * β[n, ω] -

$$I * m * a * q * Q * rp * \left( \frac{rp - rm}{2} + n * (rp - rm) - I * rp * (ω * rp - q * Q) \right)$$

γ0[n_, ω_] := 3 * rp * rm^2 * α[n - 2, ω] - 3 * rp^2 * rm * β[n - 1, ω] + rp^3 * γ[n, ω] +

$$m * a * q * Q * rp * Ω[ω] * (rp - rm)^2 + I * m * a * q * Q * \left( (rp - rm)^2 + \frac{rm}{2} * (rp - rm) \right) -$$


$$I * m * a * q * Q * (rp - rm) * \left( -1 - I * q * Q * \frac{ω}{Ω[ω]} + I * (rp + rm) * \frac{(Ω[ω])^2 + ω^2}{2 * Ω[ω]} \right) * rp +$$


$$I * m * a * q * Q * (2 * rp + rm) * ((n - 1) * (rp - rm) - I * rp * (ω * rp - q * Q))$$

δ0[n_, ω_] := -rm^3 * α[n - 3, ω] + 3 * rp * rm^2 * β[n - 2, ω] - 3 * rp^2 * rm * γ[n - 1, ω] -

$$I * m * a * q * Q * (rp - rm)^2 - m * a * q * Q * (rp - rm)^2 * rm * Ω[ω] + I * m * a * q * Q * rp * \frac{rp - rm}{2} +$$


$$I * m * a * q * Q * (rp - rm) * \left( -1 - I * q * Q * \frac{ω}{Ω[ω]} + I * (rp + rm) * \frac{(Ω[ω])^2 + ω^2}{2 * Ω[ω]} \right) * (rp + rm) -$$


$$I * m * a * q * Q * (2 * rm + rp) * ((n - 2) * (rp - rm) - I * rp * (ω * rp - q * Q))$$

ε0[n_, ω_] := -rm^3 * β[n - 3, ω] + 3 * rp * rm^2 * γ[n - 2, ω] - I * m * a * q * Q * (rp - rm) *  $\frac{rm}{2}$  -

```

$$\begin{aligned}
& I * m * a * q * Q * (rp - rm) * \left(-1 - I * q * Q * \frac{\omega}{\Omega[\omega]} + I * (rp + rm) * \frac{(\Omega[\omega])^2 + \omega^2}{2 * \Omega[\omega]} \right) * rm + \\
& I * m * a * q * Q * rm * ((n - 3) * (rp - rm) - I * rp * (\omega * rp - q * Q)) \\
\theta 0[n_ , \omega_] & := -rm^3 * \gamma[n - 3, \omega] \\
\beta 1[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 4, \beta 0[n, \omega] - \frac{\alpha 0[n - 1, \omega] * \theta 0[n, \omega]}{\epsilon 1[n - 1, \omega]}, \beta 0[3, \omega]] \\
\gamma 1[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 4, \gamma 0[n, \omega] - \frac{\beta 0[n - 1, \omega] * \theta 0[n, \omega]}{\epsilon 1[n - 1, \omega]}, \gamma 0[3, \omega]] \\
\delta 1[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 4, \delta 0[n, \omega] - \frac{\gamma 0[n - 1, \omega] * \theta 0[n, \omega]}{\epsilon 1[n - 1, \omega]}, \delta 0[3, \omega]] \\
\epsilon 1[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 4, \epsilon 0[n, \omega] - \frac{\delta 0[n - 1, \omega] * \theta 0[n, \omega]}{\epsilon 1[n - 1, \omega]}, \epsilon 0[3, \omega]] \\
\\
\beta 2[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 3, \beta 1[n, \omega] - \frac{\alpha 0[n - 1, \omega] * \epsilon 1[n, \omega]}{\delta 2[n - 1, \omega]}, \beta 0[2, \omega]] \\
\gamma 2[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 3, \gamma 1[n, \omega] - \frac{\beta 1[n - 1, \omega] * \epsilon 1[n, \omega]}{\delta 2[n - 1, \omega]}, \gamma 0[2, \omega]] \\
\delta 2[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 3, \delta 1[n, \omega] - \frac{\gamma 1[n - 1, \omega] * \epsilon 1[n, \omega]}{\delta 2[n - 1, \omega]}, \delta 0[2, \omega]] \\
\\
\beta 3[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 2, \beta 2[n, \omega] - \frac{\alpha 0[n - 1, \omega] * \delta 2[n, \omega]}{\gamma 3[n - 1, \omega]}, \beta 0[n, \omega]] \\
\gamma 3[n_ , \omega_] & := \text{If}[n \geq 2, \gamma 2[n, \omega] - \frac{\beta 2[n - 1, \omega] * \delta 2[n, \omega]}{\gamma 3[n - 1, \omega]}, \gamma 0[1, \omega]] \\
(* -1 + \frac{\text{Sqrt}[2 * I * \omega * (rm - rp)]}{\text{Sqrt}[3]} + \frac{0.75 - I * q * Q + 2 * I * \omega * rp}{3} *) \\
\text{FindRoot}\left[\beta 3[0, \omega] - \frac{\alpha 0[0, \omega] * \gamma 3[1, \omega]}{\beta 3[1, \omega] - \frac{\alpha 0[1, \omega] * \gamma 3[2, \omega]}{\beta 3[2, \omega] - \frac{\alpha 0[2, \omega] * \gamma 3[3, \omega]}{\beta 3[3, \omega] - \frac{\alpha 0[3, \omega] * \gamma 3[4, \omega]}{\beta 3[4, \omega] - \frac{\alpha 0[4, \omega] * \gamma 3[5, \omega]}{\beta 3[5, \omega] - \frac{\alpha 0[5, \omega] * \gamma 3[6, \omega]}{\beta 3[6, \omega] - \frac{\alpha 0[6, \omega] * \gamma 3[7, \omega]}{\beta 3[7, \omega] - \frac{\alpha 0[7, \omega] * \gamma 3[8, \omega]}{\beta 3[8, \omega] - \frac{\alpha 0[8, \omega] * \gamma 3[9, \omega]}{\beta 3[9, \omega]}}}}}}}}}}}}\right] == 0, \\
\{\omega, 3.12247121217051 - 0.1248829730444607313 i\} \\
\{\omega \rightarrow 2.73867 - 0.124352 i\} \\
0.1501081314568543 - 0.09245318602882008 i - (0.1500861442426022 - 0.09203467302645624 i) \\
0.0000219872 - 0.000418513 i
\end{aligned}$$

```

broj = 61;
Clear[resenja];
resenja = Array[res, broj];
resenja[[1]] = 2.738668299644288` - 0.1243522008717129` i;
For[i = 2, i <= broj, i++, Clear[q];
  q =  $\frac{1}{Q} * (5 - (i - 1) * 0.1)$ ;

  resenja[[i]] = FindRoot[ $\beta_3[0, \omega] - \frac{\alpha_0[0, \omega] * \gamma_3[1, \omega]}{\beta_3[1, \omega] - \frac{\alpha_0[1, \omega] * \gamma_3[2, \omega]}{\beta_3[2, \omega] - \frac{\alpha_0[2, \omega] * \gamma_3[3, \omega]}{\beta_3[3, \omega] - \frac{\alpha_0[3, \omega] * \gamma_3[4, \omega]}{\beta_3[4, \omega] - \frac{\alpha_0[4, \omega] * \gamma_3[5, \omega]}{\beta_3[5, \omega] - \frac{\alpha_0[5, \omega] * \gamma_3[6, \omega]}{\beta_3[6, \omega] - \frac{\alpha_0[6, \omega] * \gamma_3[7, \omega]}{\beta_3[7, \omega] - \frac{\alpha_0[7, \omega] * \gamma_3[8, \omega]}{\beta_3[8, \omega] - \frac{\alpha_0[8, \omega] * \gamma_3[9, \omega]}{\beta_3[9, \omega]}}}}}}}}}}}} = 0,$ 

  { $\omega$ , resenja[[i - 1]]}, MaxIterations -> 1000][[1, 2]];
resenja
realni = Table[{5 - (j - 1) * 0.1, Re[resenja[[j]]]}, {j, 1, broj}]
imaginarni = Table[{5 - (j - 1) * 0.1, Im[resenja[[j]]]}, {j, 1, broj}]
{2.73867 - 0.124352 i, 2.68618 - 0.124346 i, 2.63374 - 0.124339 i,
  2.58133 - 0.124331 i, 2.52897 - 0.124323 i, 2.47666 - 0.124313 i, 2.4244 - 0.124302 i,
  2.37219 - 0.12429 i, 2.32004 - 0.124276 i, 2.26794 - 0.124261 i, 2.21591 - 0.124243 i,
  2.16394 - 0.124224 i, 2.11205 - 0.124202 i, 2.06022 - 0.124178 i, 2.00848 - 0.12415 i,
  1.95682 - 0.124119 i, 1.90526 - 0.124085 i, 1.85378 - 0.124045 i, 1.80241 - 0.124001 i,
  1.75115 - 0.123951 i, 1.70001 - 0.123895 i, 1.64899 - 0.123831 i, 1.59811 - 0.123759 i,
  1.54737 - 0.123677 i, 1.49678 - 0.123584 i, 1.44636 - 0.123479 i, 1.39613 - 0.12336 i,
  1.34608 - 0.123224 i, 1.29624 - 0.123069 i, 1.24663 - 0.122894 i, 1.19726 - 0.122694 i,
  1.14816 - 0.122466 i, 1.09934 - 0.122206 i, 1.05083 - 0.121909 i, 1.00266 - 0.121571 i,
  0.95485 - 0.121186 i, 0.907437 - 0.120747 i, 0.860453 - 0.120246 i, 0.813937 - 0.119677 i,
  0.767928 - 0.119031 i, 0.722471 - 0.118297 i, 0.677613 - 0.117467 i, 0.633406 - 0.116531 i,
  0.589905 - 0.115477 i, 0.547168 - 0.114296 i, 0.505259 - 0.112979 i, 0.464244 - 0.111515 i,
  0.424195 - 0.109898 i, 0.385187 - 0.108121 i, 0.347304 - 0.106182 i, 0.310637 - 0.10408 i,
  0.275293 - 0.101823 i, 0.241396 - 0.0994335 i, 0.2091 - 0.0969532 i, 0.17859 - 0.0944545 i,
  0.150086 - 0.0920347 i, 0.123839 - 0.0897805 i, 0.100089 - 0.0876897 i,
  0.0789798 - 0.0855982 i, 0.0604608 - 0.0831967 i, 0.044268 - 0.0801066 i}
{{5., 2.73867}, {4.9, 2.68618}, {4.8, 2.63374}, {4.7, 2.58133}, {4.6, 2.52897},
  {4.5, 2.47666}, {4.4, 2.4244}, {4.3, 2.37219}, {4.2, 2.32004}, {4.1, 2.26794}, {4., 2.21591},
  {3.9, 2.16394}, {3.8, 2.11205}, {3.7, 2.06022}, {3.6, 2.00848}, {3.5, 1.95682},
  {3.4, 1.90526}, {3.3, 1.85378}, {3.2, 1.80241}, {3.1, 1.75115}, {3., 1.70001},
  {2.9, 1.64899}, {2.8, 1.59811}, {2.7, 1.54737}, {2.6, 1.49678}, {2.5, 1.44636},
  {2.4, 1.39613}, {2.3, 1.34608}, {2.2, 1.29624}, {2.1, 1.24663}, {2., 1.19726},
  {1.9, 1.14816}, {1.8, 1.09934}, {1.7, 1.05083}, {1.6, 1.00266}, {1.5, 0.95485},
  {1.4, 0.907437}, {1.3, 0.860453}, {1.2, 0.813937}, {1.1, 0.767928}, {1., 0.722471},
  {0.9, 0.677613}, {0.8, 0.633406}, {0.7, 0.589905}, {0.6, 0.547168}, {0.5, 0.505259},
  {0.4, 0.464244}, {0.3, 0.424195}, {0.2, 0.385187}, {0.1, 0.347304}, {0., 0.310637},
  {-0.1, 0.275293}, {-0.2, 0.241396}, {-0.3, 0.2091}, {-0.4, 0.17859}, {-0.5, 0.150086},
  {-0.6, 0.123839}, {-0.7, 0.100089}, {-0.8, 0.0789798}, {-0.9, 0.0604608}, {-1., 0.044268}}

```



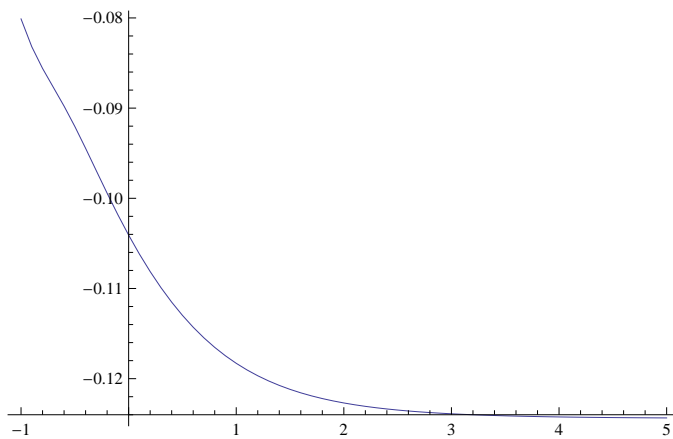
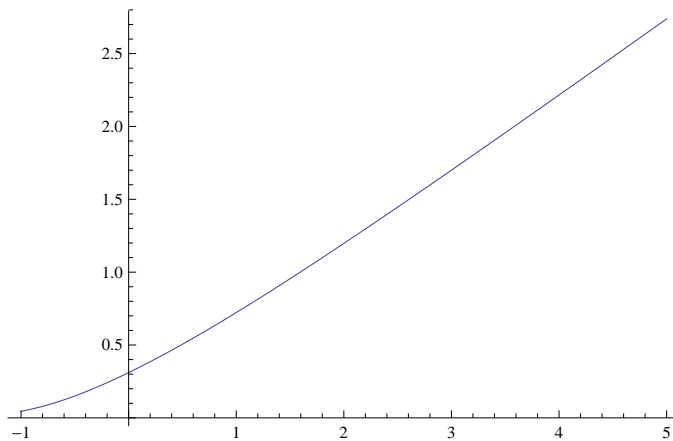
```

{{5., -0.124352}, {4.9, -0.124346}, {4.8, -0.124339}, {4.7, -0.124331}, {4.6, -0.124323},
 {4.5, -0.124313}, {4.4, -0.124302}, {4.3, -0.12429}, {4.2, -0.124276}, {4.1, -0.124261},
 {4., -0.124243}, {3.9, -0.124224}, {3.8, -0.124202}, {3.7, -0.124178}, {3.6, -0.12415},
 {3.5, -0.124119}, {3.4, -0.124085}, {3.3, -0.124045}, {3.2, -0.124001}, {3.1, -0.123951},
 {3., -0.123895}, {2.9, -0.123831}, {2.8, -0.123759}, {2.7, -0.123677}, {2.6, -0.123584},
 {2.5, -0.123479}, {2.4, -0.12336}, {2.3, -0.123224}, {2.2, -0.123069}, {2.1, -0.122894},
 {2., -0.122694}, {1.9, -0.122466}, {1.8, -0.122206}, {1.7, -0.121909}, {1.6, -0.121571},
 {1.5, -0.121186}, {1.4, -0.120747}, {1.3, -0.120246}, {1.2, -0.119677}, {1.1, -0.119031},
 {1., -0.118297}, {0.9, -0.117467}, {0.8, -0.116531}, {0.7, -0.115477}, {0.6, -0.114296},
 {0.5, -0.112979}, {0.4, -0.111515}, {0.3, -0.109898}, {0.2, -0.108121},
 {0.1, -0.106182}, {0., -0.10408}, {-0.1, -0.101823}, {-0.2, -0.0994335},
 {-0.3, -0.0969532}, {-0.4, -0.0944545}, {-0.5, -0.0920347}, {-0.6, -0.0897805},
 {-0.7, -0.0876897}, {-0.8, -0.0855982}, {-0.9, -0.0831967}, {-1., -0.0801066}}

```

ListLinePlot[realni]

ListLinePlot[imaginarni]



U ovom dodatku je predstavljen jedan primer na kome je biti prikazano na koji način su računane frekvencije i crtani grafici za određeni skup parametara skalarnog polja, crne rupe i nekomutativnog parametra a .

Literatura

- [1] K. Becker, M. Becker, and J.H. Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] H Nastase. Introduction to Supergravity. *arXiv: 1112.3502*, 2011.
- [3] C. Rovelli and F. Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press, 2014.
- [4] W. Heisenberg. Letter of Heisenberg to Peierls (1930). *Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, II (15)*, 1985.
- [5] H. S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71 (38), 1947.
- [6] N. Seiberg and E. Witten. String Theory and Noncommutative Geometry. *JHEP*, 9909 (032), 1999.
- [7] G. Landi. An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries. *Springer Verlag*, 90, 1997. [arXiv:hep-th/9701078].
- [8] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Varilly, and H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhauser, Boston, MA, 2000.
- [9] A. Connes. Noncommutative Differential Geometry. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 257 (62), 1985.
- [10] J. Madore. *An introduction to noncommutative differential geometry and physical applications*. Lond. Math. Soc. Lect. Note, 2000.
- [11] P. Aschieri, M. Dimitrijević, P. Kulish, F. Lizzi, and J. Wess. *Noncommutative Spacetimes*. Springer Verlag, 2009.
- [12] R. J. Szabo. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. *Phys. Rept.*, 378: 207–299, 2003. [ArXiv:hep/th 0109162].
- [13] A. Connes, M. R. Douglas, and A. S. Schwarz. Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori. *JHEP*, 9802 (003), 1998. [arXiv:hep-th/9711162].
- [14] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondia, B. Iochum, T. Schucker, and J. C. Varilly. Moyal Planes are Spectral Triples. *Commun.Math.Phys.*, 246 (1), 2004.

- [15] M. Fiolhais and J. Birman. Gauge invariance and spontaneous symmetry breaking in two-gap superconductors. *Physics Letters A*, 378 (35), 2014.
- [16] D. Baumann and L. McAllister. *Inflation and String Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2015.
- [17] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116 (061102), 2016.
- [18] B. P. Abbott et al. A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 119 (141101), 2017. [arXiv:1709.09660].
- [19] C. V. Vishevara. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole. *Nature*, 227 (936), 1970.
- [20] R. A. Konoplya and A. Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, 83 (793), 2011. [arXiv:1102.4014].
- [21] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa, and F. Mendez. Noncommutativity in field space and Lorentz invariance violation. *Phys. Lett. B*, 565 (222), 2003.
- [22] K. Farid. Noncommutative Complex Scalar Field and Casimir Effect. *Phys. Rev. D*, 82 (125013), 2012.
- [23] A. P. Balachandran, A. R. Queiroz, A. M. Marques, and P. Teotonio-Sobrinho. Quantum fields with noncommutative target spaces. *Phys. Rev. D*, 77 (105072), 2008.
- [24] L. Barosi, F. A. Brito, and A. R. Queiroz. Noncommutative field gas driven inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008 (42), 2008.
- [25] Francisco A. B. and Elisama E. M. L. Exploring the thermodynamics of noncommutative scalar fields. *Int. J. Mod. Phys. A*, 31 (1650057), 2016.
- [26] K. S. Gupta, E. Harikumar, T. Jurić, S. Meljanac, and A. Samsarov. Noncommutative scalar quasinormal modes and quantization of entropy of a BTZ black hole. *JHEP*, 1509 (025), 2015.
- [27] K. S. Gupta, T. Jurić, and A. Samsarov. Noncommutative duality and fermionic quasinormal modes of the BTZ black hole. *JHEP*, 1706 (107), 2017.

- [28] R. J. Szabo. Quantum Gravity, Field Theory and Signatures of Noncommutative Spacetime. *Gen.Rel.Grav.*, I (42):1–29, 2010. [ArXiv:hep/th 0906.2913].
- [29] R. J. Szabo. Symmetry, Gravity and Noncommutativity. *Classical and Quantum Gravity.*, I (23):1–29, 2006.
- [30] S. Galluccio, F. Lizzi, and P. Vitale. Translation Invariance, Commutation Relations and Ultraviolet/Infrared Mixing. *JHEP*, 0909 (054), 2009.
- [31] H. Grosse and R. Wulkenhaar. Renormalisation of ϕ^4 -theory on noncommutative R^4 to all orders. *Lett. Math. Phys.*, 71 (1):13–26, 2005.
- [32] A.Kobakhidze. Noncommutative corrections to classical black holes. *Phys. Rev. D*, 79 (047701), 2009.
- [33] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [34] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt. Quasinormal modes of stars and black holes. *Living Rev. Rel.*, 2:2, 1999. [arXiv: 9909058].
- [35] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quant. Grav.*, 26:163001, 2009. [arXiv: 0905.2975].
- [36] Shahar Hod. Bohr’s correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4293, 1998.
- [37] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, 1957.
- [38] F. J. Zerilli. Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Phys. Rev. D*, 2:2141–2160, 1970.
- [39] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [40] M. Davis, R. Ruffini, W. H. Press, and R. H. Price. Gravitational radiation from a particle falling radially into a schwarzschild black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 27:1466–1469, 1971.
- [41] S. A. Teukolsky. Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 29:1114–1118, Oct 1972.

- [42] S. Chandrasekhar and S. L. Detweiler. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A344:441–452, 1975.
- [43] J. W. York. Dynamical origin of black-hole radiance. *Phys. Rev. D*, 28:2929–2945, 1983.
- [44] B. Mashhoon. Dynamical origin of black-hole radiance. *in Proceedings of the Third Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments of General Relativity*, edited by H. Ning, Amsterdam, 1983, North-Holland.
- [45] B. F. Schutz and C. M. Will. Black Hole Normal Modes: A Semyanalytic Approach. *Astrophys. J.*, 291:L33–L36, 1985.
- [46] E. W. Leaver. An Analytic representation for the quasi normal modes of Kerr black holes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A402:285–298, 1985.
- [47] E. W. Leaver. Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. *Phys. Rev.*, D34:384–408, 1986.
- [48] Gary T. Horowitz and Veronika E. Hubeny. Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Phys. Rev.*, D62:024027, 2000.
- [49] Danny Birmingham, Ivo Sachs, and Sergey N. Solodukhin. Conformal field theory interpretation of black hole quasinormal modes. *Phys. Rev. Lett.*, 88:151301, 2002.
- [50] M. Dimitrijević Ćirić, N. Konjik, and A. Samsarov. Noncommutative scalar quasinormal modes of the Reissner–Nordström black hole. *Class. Quant. Grav.*, 35(17):175005, 2018.
- [51] M. Dimitrijević Ćirić, N. Konjik, and A. Samsarov. Noncommutative scalar field in the non-extremal Reissner–Nordström background: QNM spectrum . *Under revision*, 2019. [arXiv:1904.04053].
- [52] A. Klimyk and K. Schmugden. *Quantum Groups and their representations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [53] P. Aschieri, F. Lizzi, and P. Vitale. Twisting all the way: from Classical Mechanics to Quantum Fields. *Phys. Rev.*, D77 (025037), 2008. [arXiv:0708.3002].
- [54] P. Aschieri and L. Castellani. Noncommutative $D = 4$ gravity coupled to fermions. *JHEP*, 0906 (086), 2009. [arXiv:0902.3817[hep-th]].

- [55] M. Dimitrijević and L. Jonke. A Twisted look on kappa-Minkowski: $U(1)$ gauge theory. *JHEP*, 1112 (080), 2011. [arXiv:1107.3475[hep-th]].
- [56] M. Dimitrijevic and L. Jonke. Gauge theory on kappa-Minkowski revisited: The Twist approach. *J. Phys. Conf. Ser.*, 343:012049, 2012.
- [57] M. Dimitrijevic Ciric, N. Konjik, M. A. Kurkov, F. Lizzi, and P. Vitale. Non-commutative field theory from angular twist. *Phys. Rev.*, D98(8):085011, 2018.
- [58] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover, New York, 1931.
- [59] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. 1. *Lett. Math. Phys.*, 66:157–216, 2003.
- [60] M.A. Rieffel. Deformation Quantization for Actions of \mathbb{R}^d . *Mem. Am. Math. Soc.*, 106, 1993.
- [61] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, Jun 1932.
- [62] J.E. Moyal. Quantum Mechanics as a Statistical Theory. *Cambridge Phil. Soc.*, 45 (99), 1947.
- [63] H. J. Groenewold. On the Principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12:405–460, 1946.
- [64] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation Theory and Quantization. 1. Deformations of Symplectic Structures. *Annals Phys.*, 111:61, 1978.
- [65] H. Garcia-Compean and J. F. Plebanski. D-branes on group manifolds and deformation quantization. *Nucl. Phys.*, B618:81–98, 2001.
- [66] H. S. Snyder. The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time. *Phys. Rev.*, 72:68–71, 1947.
- [67] G. 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys.*, B72:461, 1974. [,337(1973)].
- [68] T. Filk. Divergencies in a field theory on quantum space. *Phys. Lett.*, B376:53–58, 1996.
- [69] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, and N. Seiberg. Noncommutative perturbative dynamics. *JHEP*, 02:020, 2000.

- [70] J. C. Varilly and J. M. Gracia-Bondia. On the ultraviolet behavior of quantum fields over noncommutative manifolds. *Int. J. Mod. Phys.*, A14:1305, 1999.
- [71] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [72] D. N. Blaschke, E. Kronberger, A. Rofner, M. Schweda, R. I. P. Sedmik, and M. Wohlgenannt. On the Problem of Renormalizability in Non-Commutative Gauge Field Models: A Critical Review. *Fortsch. Phys.*, 58:364–372, 2010.
- [73] J. Gomis and T. Mehen. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys.*, B591:265–276, 2000.
- [74] N. Seiberg, L. Susskind, and N. Toumbas. Space-time noncommutativity and causality. *JHEP*, 06:044, 2000.
- [75] S. Denk and M. Schweda. Time ordered perturbation theory for nonlocal interactions: Applications to NCQFT. *JHEP*, 09:032, 2003.
- [76] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, and G. Piacitelli. On the Unitarity problem in space-time noncommutative theories. *Phys. Lett.*, B533:178–181, 2002.
- [77] H. Grosse and R. Wulkenhaar. Renormalization of ϕ^4 theory on noncommutative \mathbb{R}^2 in the matrix base. *JHEP*, 12:019, 2003.
- [78] H. Grosse and R. Wulkenhaar. Renormalization of ϕ^4 theory on noncommutative \mathbb{R}^4 in the matrix base. *Commun. Math. Phys.*, 256:305–374, 2005.
- [79] E. Langmann and R. J. Szabo. Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces. *Phys. Lett.*, B533:168–177, 2002.
- [80] R. Gurau, J. Magnen, V. Rivasseau, and A. Tanasa. A Translation-invariant renormalizable non-commutative scalar model. *Commun. Math. Phys.*, 287:275–290, 2009.
- [81] A. de Goursac, J.-C. Wallet, and R. Wulkenhaar. Noncommutative Induced Gauge Theory. *Eur. Phys. J.*, C51:977–987, 2007.
- [82] D. N. Blaschke, H. Grosse, and M. Schweda. Non-commutative $U(1)$ gauge theory on $\mathbb{R}^4(\Theta)$ with oscillator term and BRST symmetry. *EPL*, 79(6):61002, 2007.

- [83] Maja Buric and Michael Wohlgenannt. Geometry of the Grosse-Wulkenhaar Model. *JHEP*, 03:053, 2010.
- [84] M. Buric, H. Grosse, and J. Madore. Gauge fields on noncommutative geometries with curvature. *JHEP*, 07:010, 2010.
- [85] H. Hopf. Uber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen. *Annals of Mathematics*, 42 , 1941.
- [86] V. G. Drinfeld. Quantum Groups. *J. Sov. Math.*, 41 (898), 1988.
- [87] V. D. Drienfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Sov. Math. Dokl.*, 32 (254), 1985.
- [88] M. Jimbo. A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10 (63), 1985.
- [89] M. Jimbo. A Q Analog of $U(GL(N + 1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11 (247), 1986.
- [90] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan, and L. D. Faddeev. Quantization of Lie groups and Lie algebras. *Leningrad Math. J.*, 1 , 1990.
- [91] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations. *Jour. Sov. Math.*, 23 , 1983.
- [92] V. G. Drinfeld. Quasi-Hopf algebras. *Leningrad Math. J.*, 1 (1419), 1990.
- [93] V. G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningrad Math. J.*, 2 (829), 1991.
- [94] V. G. Drinfeld. Structure of quasitriangular quasi-hopf algebras. *Funct. Anal. Appl.*, 26 (63), 1992.
- [95] H. Grosse and R. Wulkenhaar. 8D-spectral triple on 4D-Moyal space and the vacuum of noncommutative gauge theory. *J. Geom. Phys.*, 62:1583–1599, 2012.
- [96] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Construction of nonAbelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C21:383–388, 2001.
- [97] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess, and M. Wohlgenannt. The Standard model on noncommutative space-time. *Eur. Phys. J.*, C (23), 2002. [arXiv:hep-ph/0111115].

- [98] M. Burić, D. Latas, V. Radovanović, and J. Trampetić. Nonzero $Z \rightarrow \gamma\gamma$ decays in the renormalizable gauge sector of the noncommutative standard model. *Phys. Rev. D*, 75 (097701), 2007. [arXiv:hep-ph/0611299].
- [99] P. Aschieri and L. Castellani. Noncommutative gauge fields coupled to noncommutative gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 45:581–598, 2013.
- [100] M. Dimitrijević Ćirić, B. Nikolić, and V. Radovanović. Noncommutative $SO(2,3)_*$ gravity: Noncommutativity as a source of curvature and torsion. *Phys. Rev.*, D96(6):064029, 2017.
- [101] J. Lukierski, H. Ruegg, A. Nowicki, and V. N. Tolstoi. Q deformation of Poincare algebra. *Phys. Lett.*, B264:331–338, 1991.
- [102] J. Lukierski, A. Nowicki, and H. Ruegg. New quantum Poincare algebra and k deformed field theory. *Phys. Lett.*, B293:344–352, 1992.
- [103] H. Grosse and M. Wohlgenannt. On κ -Deformation and UV/IR Mixing. *Nucl. Phys.*, B (748), 2006. [arXiv:hep-th/0507030].
- [104] M. Dimitrijević and L. Jonke. A twisted look on kappa-Minkowski: U(1) gauge theory. *JHEP*, 2011 (80), 2011.
- [105] M. Dimitrijević Ćirić and N. Konjik. Landau levels from noncommutative $U(1)_*$ gauge theory in κ -Minkowski space-time. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15(08):1850141, 2018.
- [106] P. Aschieri, A. Borowiec, and A. Pachoł. Observables and dispersion relations in κ -Minkowski spacetime. *JHEP*, 10:152, 2017.
- [107] A. Pachoł and P. Vitale. κ -Minkowski star product in any dimension from symplectic realization. *J. Phys.*, A48(44):445202, 2015.
- [108] M. Dimitrijevic, L. Jonke, L. Moller, E. Tsouchnika, J. Wess, and M. Wohlgenannt. Deformed field theory on kappa space-time. *Eur. Phys. J.*, C31:129–138, 2003.
- [109] H. Grosse and M. Wohlgenannt. On kappa-deformation and UV/IR mixing. *Nucl. Phys.*, B748:473–484, 2006.
- [110] S. Meljanac, A. Samsarov, J. Trampetić, and M. Wohlgenannt. Scalar field propagation in the ϕ^4 κ -Minkowski model. *JHEP*, 1112 (010), 2011. [arXiv:1111.5553].

- [111] T. Poulain and J.-C. Wallet. κ -Poincaré invariant quantum field theories with KMS weight. *Under revision*, 2018. [arXiv:1801.02715].
- [112] M. Dimitrijevic, L. Jonke, and A. Pachol. Gauge Theory on Twisted κ -Minkowski: Old Problems and Possible Solutions. *SIGMA*, 10:063, 2014.
- [113] A. Agostini, F. Lizzi, and A. Zampini. Generalized Weyl systems and kappa Minkowski space. *Mod. Phys. Lett.*, A17:2105–2126, 2002.
- [114] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p, 2004.
- [115] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Construction of nonAbelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C21:383–388, 2001.
- [116] P. Aschieri and L. Castellani. Noncommutative gravity coupled to fermions: second order expansion via Seiberg-Witten map. *JHEP*, 07:184, 2012.
- [117] S. Hod. Relaxation dynamics of charged gravitational collapse. *Phys. Lett.*, A374:2901, 2010.
- [118] S. Hod. Quasinormal resonances of a charged scalar field in a charged Reissner-Nordstroem black-hole spacetime: A WKB analysis. *Phys. Lett.*, B710:349–351, 2012.
- [119] P. Kraus and F. Wilczek. Some applications of a simple stationary line element for the Schwarzschild geometry. *Mod. Phys. Lett.*, A9:3713–3719, 1994.
- [120] M. K. Parikh and F. Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5042–5045, 2000.
- [121] R. A. Konoplya and A. Zhidenko. Massive charged scalar field in the Kerr-Newman background I: quasinormal modes, late-time tails and stability. *Phys. Rev.*, D88:024054, 2013.
- [122] S. Iyer and C. M. Will. Black Hole Normal Modes: A WKB Approach. 1. Foundations and Application of a Higher Order WKB Analysis of Potential Barrier Scattering. *Phys. Rev.*, D35:3621, 1987.
- [123] H.-P. Nollert. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. *Phys. Rev.*, D47:5253–5258, 1993.

- [124] A. Chowdhury and N. Banerjee. Quasinormal modes of a charged spherical black hole with scalar hair for scalar and Dirac perturbations. *Eur. Phys. J.*, C78(7):594, 2018.
- [125] M. Richartz and D. Giugno. Quasinormal modes of charged fields around a Reissner-Nordström black hole. *Phys. Rev.*, D90(12):124011, 2014.
- [126] J.-L. Jing. Neutrino quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom black hole. *JHEP*, 12:005, 2005.
- [127] S. Hod. Quasinormal spectrum and quantization of charged black holes. *Class. Quant. Grav.*, 23:L23–L28, 2006.
- [128] W. Gautschi. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM Review*, 9(1):24–82, 1967.
- [129] M. Richartz. Quasinormal modes of extremal black holes. *Phys. Rev.*, D93(6):064062, 2016.
- [130] V. Cardoso, J. P. S. Lemos, and S. Yoshida. Scalar gravitational perturbations and quasinormal modes in the five-dimensional Schwarzschild black hole. *JHEP*, 12:041, 2003.
- [131] C. F. B. Macedo, V. Cardoso, L. C. B. Crispino, and Paolo Pani. Quasinormal modes of relativistic stars and interacting fields. *Phys. Rev.*, D93(6):064053, 2016.
- [132] P. Aschieri, L. Castellani, and M. Dimitrijević. Noncommutative gravity at second order via Seiberg-Witten map. *Phys. Rev.*, D87(2):024017, 2013.
- [133] D. A. Kirzhnits. *Field theoretical methods in many-body systems*. Pergamon press, 1967.

Biografija

Nikola Konjik je rođen 9. marta 1990. godine u Banjoj Luci. Po završetku Gimnazije u Banjoj Luci 2009. godine započeo je osnovne studije na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Teorijska i eksperimentalna fizika. Ove studije je završio 2013. godine, sa prosečnom ocenom 9,66. Master studije na Fizičkom fakultetu završio je 2014. godine sa prosečnom ocenom 10 i završnim radom pod nazivom „Linearizovana masena gravitacija”, koja je urađena pod rukovodstvom prof. dr Marije Dimitrijević Ćirić.

Od marta 2015. godine zaposlen je na Fizičkom fakultetu na projektu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja. U septembru 2018. godine je izabran za istraživača saradnika na Fizičkom fakultetu. Drži vežbe iz Aplikativnog softvera, Fizike elementarnih čestica, Elektrodinamike 1 i 2 i Teorije elementarnih čestica.

Naučna oblast istraživanja Nikole Konjika je gravitacija, klasična i kvantna teorija polja na nekomutativnim prostorima. Ova oblast je jedna od vrlo aktuelnih oblasti istraživanja u fizici visokih energija.