

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Докторска теза

Симетрије у вишим градијентним
теоријама

студент Павле Стипсић
ментор др Марко Војиновић
22. септембар 2025.

Симетрије у вишим градијентним теоријама

Сажетак

У овом раду је испитана симетрија и механизми експлицитног и спонтаног нарушења симетрије класичне 3BF теорије са везама која описује Стандардни Модел спрегнут са Ајнштајн-Картановом гравитацијом. Затим је конструисана непертурбативна веза између квантне 3BF теорије и квантне теорије гравитације са Стандардним Моделом. Коначно, дата је дефиниција квантне 3BF теорије са везама на триангулацији и прелиминарно је анализиран њен семикласичан лимес.

Кључне речи: квантна гравитација, Стандардни Модел, више градијентне теорије, симетрија, Хигсов механизам

Научна област: Квантна поља, честице и гравитација

Ужа научна област: Квантна гравитација

Садржај

1	Увод	4
2	Преглед досадашњих резултата, дефиниције, нотација и конвенције	6
2.1	Тополошко 3BF дејство	6
2.2	3BF дејство са везама	9
2.3	Ајнштајн-Картанова дејства	13
2.4	Симетрије тополошког 3BF дејства	14
2.5	Тополошка инваријанта за квантну 3BF теорију	16
3	Механизми нарушења симетрије 3BF дејства са везама	18
3.1	Експлицитно нарушење симетрије	18
3.1.1	Веза за гравитационо поље	19
3.1.2	Веза за скаларна поља	19
3.1.3	Веза за Диракова поља	20
3.1.4	Веза за Јанг-Милсова поља	21
3.1.5	Везе за Хигсов и Јукавин потенцијал, спинска и веза са космолошким константом	21
3.1.6	Преглед нарушења симетрије	22
3.2	Спонтано нарушење симетрије и Хигсов механизам	24
3.2.1	3BF дејство са везама за Прокино поље	25
3.2.2	3BF дејство са везама за теорију електрослабих интеракција	28
3.2.3	Преглед Хигсовог механизма	30
3.2.4	Трансформација дејства	32
3.2.5	Спонтано нарушење 3-групе симетрије и масени спектар фермиона	38
4	Веза између формулација квантне Ајнштајн-Картанове и 3BF теорије са везама	41
4.1	Квантне опсервабле	41
4.1.1	Математички резултати	41
4.1.2	Очекиване вредности опсервабли	43
4.2	Примери	50
4.2.1	Густина четворозапремине просторвермена	50
4.2.2	Гравитациони таласи	51
5	Конструкција квантне 3BF теорије са везама	54
5.1	Дискретизација дејства	54
5.2	Прелазак са интеграције по пољима на интеграцију по групама	64
5.2.1	Делта на групи и Питер-Вејлова теорема	66
5.3	Подела дејства на тополошки део и везе	69
5.4	Прелиминарна анализа семикласичног лимеса	72
6	Закључак	79

A	Додаци	80
A.1	Доказ Теореме 1	80
A.2	Произвольност k -билинеарне форме	80
A.3	Докази идентитета који садрже Диракову делту	82

1 Увод

Формулација теорије квантне гравитације представља један од главних отворених проблема у савременој фундаменталној теоријској физици. Током година је развијено више различитих приступа решавању овог проблема као што су Теорија Струна (ST) [1, 2], Квантна гравитација на петљама (LQG) [3, 4] и остали приступи. Сваки од њих има своје предности и мане. Конкретно, приступ коваријантне квантизације теорије гравитације на петљама [5] се заснива на прецизној дефиницији интеграла по трајекторијама, помоћу ког се дефинише остатак квантне теорије. Једна од главних предности овог приступа је управо тада се оваква прецизна дефиниција може дефинисати коришћењем процедуре квантизације модела спинске пене и да се том процедуром може успешно квантовати гравитационо поље. Са друге стране, главна мана овог приступа је да се квантизација може спровести само за чисто гравитационо поље без осталих поља која постоје у природи [6, 7, 8].

Другим речима, иако је једноставно квантовати гравитацију, није очигледно на који начин је истовремено могуће квантовати и гравитацију и осталу материју.

Последњих година је направљен напредак по питању превазилажења овог проблема. Једно од обећавајућих предлога решења је засновано на вишим градијентним теоријама [9, 10], које представљају уопштење појма симетрије коришћењем више теорије категорија. Пажња је усмерена првенствено на структуре под називом n -групе, које су одређен облик уопштења појма групе и користе се за опис градијентне симетрије теорије уместо појма групе [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Конкретно, испоставља се да структура 3-групе најбоље одговара алгебарском опису свих поља у природи (гравитационог, Јанг-Милсовог, Дираковог и скаларног)[25]. Са друге стране, структура 3-групе омогућава директно уопштење процедуре квантизације у моделу спинске пене на сва остала поља поред гравитационог [26], што омогућава конструкцију квантне теорије гравитације и материје јединственим математичким описом.

Један од главних елемената у конструкцији теорије је дејство BF теорије и његово категоријско уопштење за pBF теорије. Прве резултате формулисања опште теорије релативности и других теорија гравитације заснованих на BF теорији је дао Плебански у свом раду [27], а остале примене за конструкцију различитих модела се могу наћи у [28, 29, 30]. Формулација теорије помоћу 2-групе, названа 2BF или BF CG модел, је по први пут уведена у [31, 32] и даље проучавана у [33, 34, 35, 36, 37, 38], а класичне 3BF и 4BF теорије су формулисане у [25] и [39], редом. На квантном нивоу, pBF теорије дају класу тополошких теорија поља први пут уведених у раду Портера [40], касније у [26, 41].

Добијен је значајан број конкретних резултата у оквиру програма истраживања виших градијентних теорија заснованих на структури 3-групе. Прво је формулисан поступак конструкције класичног дејства који описује цео Стандардни Модел (SM) природно спрегнут са Ајнштајн-Картановом гравитацијом, у форми која је компатибилна са процедуром квантизације модела спинске пене [25]. Овај поступак доводи до реформулације класичне теорије у теорију описану 3BF дејством са везема. Ово дејство се састоји из два главна дела, тополошког 3BF дејства, одређеног структуром 3-групе и дела са везама које деформишу тополошку у нетополошку теорију, дајући јој пропагирајуће степене слободе. Доста истраживања је већ урађено на једноставнијим моделима заснованим на BF и 2BF теоријама [28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], а постоји и модел заснован на 4BF теорији [39].

Даље, процедура квантизације тополошког дела је успешно формулисана у облику интеграла по конфигурацијама поља, која одговара тополошкој квантној теорији поља (TQFT) заснованој на датој 3-групи [26]. Осим тога, детаљно су испитане симетрије тополошке 3BF

теорије [43, 44], што је довело до бољег разумевања различитих особина модела. Неки од значајних математичких резултата се такође могу наћи у [17, 45, 46].

У наставку рада ће у глави 2 бити дат детаљнији преглед постојећих резултата од значаја за даљи рад, дефиниције појмова, нотација и конвенције. У глави 3 ће бити изложена анализа симетрије и механизма њеног нарушења у теорији заснованој на 3BF моделу са везама. Резултат ове анализе је потврда еквиваленције између стандардне класичне Ајнштајн-Картанове теорије гравитације и Стандардног Модела са једне стране и класичне теорије засноване на 3BF моделу са везама са друге, у погледу симетрије дејства и Хигсовог механизма спонтаног нарушења симетрије дела који одговара електрослабој интеракцији [47]. У глави 4 је разматрана веза између квантних теорија које се добијају конзистентном квантизацијом Ајнштајн-Картанове теорије гравитације и Стандардног модела с једне и 3BF теорије са везама са друге стране [48], док је у глави 5 дата дефиниција квантне 3BF теорије са везама.

2 Преглед досадашњих резултата, дефиниције, нотација и конвенције

У овој глави је изложен преглед четири класичне теорије које су релевантне за даљу анализу. У првом поглављу је уведено тополошко 3BF дејство засновано на структури 3-групе. У следећем поглављу је дат метод за конструкцију реалистичне нетополошке теорије додавањем веза. У трећем поглављу је дат преглед стандардног Ајнштајн-Картановог дејства спрегнутог са Стандардним Моделом на уобичајен начин, а потом и у случају постојања сабирка са спин-спин контактном интеракцијом, названом Ајнштајн-Картанова контактна теорија. У четвртном поглављу је преглед укупне симетрије дополошког 3BF дејства, а у петом кратка формулација тополошке 3BF квантне теорије поља. Резултати у овој глави проистичу из радова Т.Раденковић и М.Војиновић [25, 26, 43, 44].

Нотација и конвенција су следеће. Просторвременски индекси су означени словима из средине Грчког алфабета $\mu, \nu, \dots$, и подижу се и спуштају просторвременском метриком $g_{\mu\nu}$, када је дефинисана. Лоренцова метрика је означена са $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Индекси који пребројавају генераторе Лијевих група G , H , и L су означени почетним словима Грчког алфабета $\alpha, \beta, \dots$, малим латиничним словима са почетка абецеде $a, b, c, \dots$, и великим латиничним словима са почетка абецеде $A, B, C, \dots$, редом. Сами генератори су означени као τ_α , t_a и T_A , редом. Коришћен је природни систем јединица, дефинисан са $c = \hbar = 1$ и $G = l_p^2$, где је l_p Планкова дужина.

Индекси који одговарају Лоренцовој групи су парови индекса ab и величине које зависе од њих су антисиметричне на замену њихових места. То значи да су све независне компоненте ових величина према Ајнштајновој сумационој конвенцији пребројане два пута. Због тога је резултат суме потребно поделити са два. Алтернативно, у циљу избегавања овог проблема, може се увести нотација $[ab]$ која репрезентује пар индекса као један индекс за који је увек претпостављено да важи $a > b$. Сумација по оваквим индексима пребројава сваку независну компоненту тачно једном, па суму није потребно поделити са два. На пример, за дату величину K^{ab} , добија се

$$K^{[ab]} \sigma_{[ab]} = \frac{1}{2} K^{ab} \sigma_{ab}. \quad (1)$$

У овом раду ће правоугаоне заграде међу индексима бити коришћене искључиво за означавање пара Лоренцових индекса, уместо уобичајене примене за антисиметризацију индекса.

2.1 Тополошко 3BF дејство

У циљу конструисања тополошког 3BF дејства, потребно је кренути од појма стриктне Лијеве 3-групе, која је уопштење појма Лијеве групе проистекло из више теорије категорија. Ова структура је еквивалентна структури Лијевог 2-укрштеног модула. Лијев 2-укрштени модул је уређена тројка три Лијеве групе, G , H и L , заједно са два хомоморфизма између њих,

$$\partial : H \rightarrow G, \quad \delta : L \rightarrow H, \quad (2)$$

дејства групе G на све три групе,

$$\triangleright : G \times X \rightarrow X, \quad X = G, H, L, \quad (3)$$

и пресликавања Пајферовог подизања,

$$\{ _ , _ \}_{\text{pf}} : H \times H \rightarrow L. \quad (4)$$

Сва три пресликавања су обухваћена одређеним скупом аксиома и заједно чине структуру звану Лијев 2-укрштени модул, који се означава као

$$(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{_, _\}_{\text{pf}}). \quad (5)$$

Ова структура представља појам 3-групе на најуобичајенији начин. Даље математичке аксиоме и дефиниције се могу наћи у референцама [9, 17, 25, 26, 41, 44, 45, 46, 49].

Дата математичка структура 3-групе намеће природан избор дејства звано 3BF дејство. Ово дејство је чисто тополошко, дефинисано са:

$$S_{3BF}^{\text{top}} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}}. \quad (6)$$

Лагранжеви множитељи B , C и D су два-, један- и нула-форме и истовремено елементи Лијевих алгебри $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{l}$, које одговарају Лијевим групама G , H и L , редом. Јачине поља $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ су дефинисане као

$$\mathcal{F} = d\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta, \quad \mathcal{G} = d\beta + \alpha \wedge^\triangleright \beta - \delta\gamma, \quad \mathcal{H} = d\gamma + \alpha \wedge^\triangleright \gamma + \{\beta \wedge \beta\}_{\text{pf}}, \quad (7)$$

и називају се лажним кривинама за конекције један-форме α , два-форме β и три-форме γ , које су такође елементи алгебра $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{l}$, редом. Билинеарне форме $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{h}}$ и $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{l}}$ треба да буду симетрична, недегенерисана и G -инваријантна пресликавања пара елемената алгебре у скуп реалних бројева. На основу структуре 3-групе, може се још увести и појам коваријантног извода дефинисаног као

$$\nabla = d + \alpha \wedge^\triangleright \quad (8)$$

у смислу да када ∇ делује на, на пример, компоненте ϕ^A елемента $\phi \in \mathfrak{l}$, дејство $\triangleright$ представља дејство елемента Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$ на елемент Лијеве алгебре $\mathfrak{l}$, на начин:

$$\nabla \phi^A = d\phi^A + \triangleright_{\alpha B}^A \alpha^A \wedge \phi^B, \quad (9)$$

и слично за елементе алгебри $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Коришћењем ове нотације се лажне кривине (7) могу преписати у функцији од обичних кривина:

$$\mathcal{F} = \nabla^2 - \partial\beta, \quad \mathcal{G} = \nabla\beta - \delta\gamma, \quad \mathcal{H} = \nabla\gamma + \{\beta \wedge \beta\}_{\text{pf}}. \quad (10)$$

Дејство свих пресликавања $\triangleright$, ∂ , δ и $\{_, _\}_{\text{pf}}$, као и билинеарних форми на базис генератора Лијевих група је:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha \triangleright \tau_\beta &= \triangleright_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma, & \tau_\alpha \triangleright t_a &= \triangleright_{\alpha a}^b t_b, & \tau_\alpha \triangleright T_A &= \triangleright_{\alpha A}^B T_B, \\ \partial t_a &= \partial_a^\alpha \tau_\alpha, & \delta T_A &= \delta_A^a t_a, & \{t_a, t_b\} &= X_{ab}^A T_A, \\ \langle \tau_\alpha, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} &= g_{\alpha\beta}, & \langle t_a, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} &= g_{ab}, & \langle T_A, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} &= g_{AB}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пошто су билинеарне форме недегенерисане, постоје њихови инверзи и компоненте тих инверза су означене са $g^{\alpha\beta}$, g^{ab} и g^{AB} . Такође се користе за подизање и спуштање групних индекса.

Да би се помоћу ове структуре конструисало дејство које одговара Стандардном Моделу и Ајнштајн-Картановој гравитацији, потребно је изабрати одговарајућу 3-групу, звану 3-група Стандардног Модела [25, 47, 50]. Три Лијеве групе G , H и L се бирају да буду:

$$G = SO(3, 1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1), \quad H = \mathbb{R}^4, \quad L = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64}. \quad (12)$$

Физичка интерпретација овог избора је следећа. Група G представља уобичајену групу градијентних симетрија Стандардног Модела, заједно са групом локалне Лоренцове симетрије. Група H представља просторвременске транслације, док група L одговара пољима материје. Конкретно, $\mathbb{C}^4$ одговара Хигсовом сектору, док три Грасманове групе $\mathbb{G}^{64}$ одговарају трима фамилијама фермиона.

Да би 3-група Стандардног Модела била у потпуности дефинисана, потребно је одабрати и сва пратећа пресликавања. Хомоморфизми ∂ и δ се бирају тако да буду тривијални, као и Пајферово подизање $\{_, _ \}_{\text{pf}}$. Дејство $\triangleright$, је дефинисано на следећи начин. Група G се може природно поделити на Лоренцов део $SO(3, 1)$ (генератори су пребројани коришћењем пара индекса $[ab]$) и унутрашње градијентне симетрије $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (генератори су пребројани индексима $\alpha, \beta, \dots$). Дејство групе G на саму себе је онда дато избором дејства Лоренцовог дела на самог себе и део унутрашњих симетрија, као

$$\triangleright_{[ab][cd]}^{[ef]} \equiv f_{[ab][cd]}^{[ef]} = \frac{1}{2} \left(\eta_{[a|c} \delta_{|b]}^{[f} \delta_d^{e]} - \eta_{[a|d} \delta_{|b]}^{[f} \delta_c^{e]} \right), \quad \triangleright_{[ab]\beta}^\gamma = 0, \quad (13)$$

док је дејство унутрашње групе симетрије на саму себе и Лоренцов део дато са

$$\triangleright_{\alpha\beta}^\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma, \quad \triangleright_{\alpha[ab]}^{[cd]} = 0. \quad (14)$$

Даље, дејство групе G на групу H је дефинисано природно, претпостављајући да је група H интерпретирана као група четворофимензионалних транслација. Тада Лоренцов део групе G делује на стандардан начин на транслације, док унутрашњи део групе G делује тривијално:

$$\triangleright_{[cd]a}^b = \frac{1}{2} \eta_{a[d} \delta_{c]}^b, \quad \triangleright_{\alpha a}^b = 0. \quad (15)$$

Коначно, дејство целе групе G на L је такође дато на природан начин, у складу са трансформационим особинама различитих фермиона и Хигсовог поља. На пример, дејство групе G на фермион левог изоспина је:

$$\triangleright_{[cd]A}^B = (\sigma_{cd})_A^B, \quad \triangleright_{\alpha A}^B = \frac{1}{2} (\sigma_\alpha)_A^B. \quad (16)$$

Матрице $(\sigma_\alpha)_A^B$ су Паулијеве матрице и $(\sigma_{ab})_A^B = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b]_A^B$, где су γ_a стандардне Диракове матрице које задовољавају антикомутациону релацију $\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = -2\eta_{ab}$. Стандардно се може увести и матрица $\gamma_5 \equiv -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. На сличан начин се може дефинисати и дејство групе G на све остале фермионе и скаларна поља у групи L , зависно од њихових трансформационих особина [25].

Додатно, поред прецизирања 3-групе Стандардног Модела, дејство (6) такође зависи од избора билинеарних форми. У случају не-Абелове групе је природан избор ове форме Картан-Килингова форма (Картанов тензор), док у случају Абелових група не постоји природан избор, али је он ограничен захтевом да билинеарна форма мора да буде G -инваријантна. Узимајући ово у обзир, за 3-групу Стандардног Модела и дејство (6) се бирају следеће билинеарне форме. За алгебру $\mathfrak{g}$:

$$g_{[ab][cd]} = \frac{1}{2} \eta_{d[a} \eta_{b]c}, \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha[ab]} = 0. \quad (17)$$

За алгебру $\mathfrak{h}$, због G -инваријантности

$$g_{ab} = \eta_{ab}. \quad (18)$$

Коначно, у случају алгебре $\mathfrak{l}$ је ситуација компликованија јер Грасманови бројеви антикомутирају. Конкретно, за било који избор $A, B \in \mathfrak{l}$, важи:

$$\langle A, B \rangle_{\mathfrak{l}} = A^I B^J g_{IJ}, \quad \langle B, A \rangle_{\mathfrak{l}} = B^J A^I g_{JI}. \quad (19)$$

Пошто билинеарне форме морају да буду симетричне, два израза морају да буду једнака. Међутим, у зависности да ли су коефицијенти A^I и B^J Грасманови бројеви или обични реални бројеви, они ће или антикомутирати или комутирати, што за последицу има да је матрица компонената билинеарне форме g_{IJ} антисиметрична или симетрична, редом. Због тога се генератори T_A алгебре $\mathfrak{l}$ могу груписати у три класе: $T_{\tilde{A}}$ која припада Хигсовом сектору, и пару $T_{\hat{A}}, T^{\hat{A}}$ који припада фермионском сектору. Онда се компоненте билинеарне форме могу записати као

$$g_{AB} = \left[\begin{array}{c|cc} \delta_{\tilde{A}\tilde{B}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}} \\ 0 & -\delta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}} & 0 \end{array} \right]. \quad (20)$$

Горњи леви блок одговара алгебри $\mathbb{C}^4$, док доњи десни блок одговара алгебри $\mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64}$.

Након задавања 3-групе за Стандардни Модел, дејство за одговарајућу тополошку 3BF теорију (6) се може записати у следећем облику:

$$S_{3BF}^{\text{top}} = \int B_{\alpha} \wedge F^{\alpha} + B^{[ab]} \wedge R_{[ab]} + e_a \wedge \nabla \beta^a + \phi^A (\nabla \tilde{\gamma})_A + \bar{\psi}_A (\vec{\nabla} \gamma)^A - (\bar{\gamma} \overleftarrow{\nabla})_A \psi^A, \quad (21)$$

где је уведена нова нотација. Прво, $\mathcal{F}$ је подељен на јачину поља која одговара групи унутрашње симетрије F^{α} (која је функција унутрашње конекције α^{α}) и два-форму Риманове кривине $R_{[ab]}$ (која је функција спинске конекције $\omega^{[ab]}$). Лагранжев множитељ C је замењен један-формом поља тетраде e_a , а Лагранжев множитељ D је замењен компонентама Хигсовог поља и поља фермиона $(\phi^A, \psi^A, \bar{\psi}_A)$. Ова замена нотације представља физичку интерпретацију поља у дејству (6).

2.2 3BF дејство са везама

Иако дејство (21) има одговарајућу симетрију описану 3-групом Стандардног Модела и садржи сва градијентна, гравитационо и поља материје, једначине кретања које се добијају варијацијом по пољима не одговарају класичним једначинама кретања ових поља. Заправо, ово дејство је пример *тополошког* 3BF дејства, и као такво даје тривијалне једначине кретања, без пропадајућих степени слободе. У циљу кориговања теорије се додају сабирци у дејству који представљају везе зване *симплицијалне везе*. Пажљивим избором ових веза које се додају у дејство, могуће је конструисати нетополошко дејство које даје једначине кретања за поља сагласне једначинама кретања у Стандардном Моделу спрегнутим са Ајнштајн-Картановом гравитацијом. Такво дејство се често назива 3BF дејство са везама, и има следећи облик:

$$S_{3BF} = S_{3BF}^{\text{top}} + S_{\text{grav}} + S_{\text{scal}} + S_{\text{Dirac}} + S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{Higgs}} + S_{\text{Yukawa}} + S_{\text{spin}} + S_{\text{CC}}. \quad (22)$$

Његови појединачни делови су:

$$S_{3BF}^{\text{top}} = \int B_\alpha \wedge F^\alpha + B^{[ab]} \wedge R_{[ab]} + e_a \wedge \nabla \beta^a + \phi^A (\nabla \tilde{\gamma})_A + \bar{\psi}_A (\vec{\nabla} \gamma)^A - (\bar{\gamma} \vec{\nabla})_A \psi^A, \quad (23)$$

$$S_{\text{grav}} = - \int \lambda_{[ab]} \wedge \left(B^{[ab]} - \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} e_c \wedge e_d \right), \quad (24)$$

$$S_{\text{scal}} = \int \tilde{\lambda}^A \wedge (\tilde{\gamma}_A - H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \Lambda^{abA} \wedge (H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b), \quad (25)$$

$$S_{\text{Dirac}} = \int \bar{\lambda}_A \wedge \left(\gamma^A + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) - \lambda^A \wedge \left(\bar{\gamma}_A - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right), \quad (26)$$

$$S_{\text{Yang-Mills}} = \int \lambda^\alpha \wedge (B_\alpha - 12 C_{\alpha\beta} M^\beta_{ab} e^a \wedge e^b) + \zeta_\alpha^{ab} (M^\alpha_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F^\alpha \wedge e_a \wedge e_b), \quad (27)$$

$$S_{\text{Higgs}} = - \int \frac{2}{4!} \chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (28)$$

$$S_{\text{Yukawa}} = - \int \frac{2}{4!} Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (29)$$

$$S_{\text{spin}} = \int 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^a \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (30)$$

$$S_{\text{CC}} = - \int \frac{1}{96\pi l_p^2} \Lambda \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (31)$$

Док би записивање целог дејства у једном изразу било компликовано и нечитко, овако издељено се сваком сабирку може протумачити значење и сврха:

- тополошки 3BF сабирак (23) је идентичан једначини (21), која набраја сва поља присутна у теорији (онако како намеће структура 3-групе Стандардног Модела),
- веза за гравитационо поље (24) задужена за стварање гравитационих степени слободе,
- веза за скаларна поља (25) gives задужена за стварање степени слободе безмасених скаларних поља,
- веза за Диракова поља (26) задужена за стварање степени слободе Диракових поља,
- веза за Јанг-Милсова поља (27) задужена за стварање степени слободе градијентних поља,
- веза за Хигсов потенцијал (28) описује самоинтеракције и масу Хигсових поља,
- веза за Јукавину интеракцију (29) описује интеракцију између Хигсових и Диракових поља, као и матрице мешања фермиона,
- спинска веза (30) је неопходна за исправан опис интеракције између спина фермиона и торзије, и

- веза са космолошком константом (31) уводи сабирак пропорционалан космолошкој константи.

Слободни параметри присутни у дејству су::

- l_p је Планкова дужина, садржана у S_{grav} , S_{spin} и S_{CC} ,
- $C_{\alpha\beta}$ представља билинеарну форму интеракционих константи градијентних поља, садржана у $S_{\text{Yang-Mills}}$,
- χ је интеракциона константа за самоинтеракцију четвртог степена Хигсовог поља, садржана у S_{Higgs} ,
- v је вакуумски очекивана вредност Хигсовог поља, такође садржана у S_{Higgs} ,
- Y_{ABC} представља константе Јукавине интеракције и матрице мешања фермиона, садржане у S_{Yukawa} , и
- Λ је космолошка константа, садржана у S_{CC} .

Тополошко део S_{3BF}^{top} и везе S_{scal} и S_{Dirac} не садрже слободне параметре.

Једначине кретања добијене варијацијом целог дејства се могу поделити у две групе. Прву чине једначине кретања за Лагранжеве множитеље које се могу решити тако да се Лагранжеви множитељи изразе у функцији од динамичких поља и њихових извода ([25, 47]):

$$\begin{aligned}
M_{\alpha ab} &= -\frac{1}{48}\varepsilon_{abcd}F_{\alpha}^{\mu\nu}e_{\mu}^ce_{\nu}^d, & \zeta^{\alpha ab} &= \frac{1}{4}C_{\beta}^{\alpha}\varepsilon^{abcd}F^{\beta}_{\mu\nu}e_c^{\mu}e_d^{\nu}, \\
\lambda_{\alpha\mu\nu} &= -F_{\alpha\mu\nu}, & B_{\alpha\mu\nu} &= -\frac{e}{2}C_{\alpha}^{\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\beta}^{\rho\sigma}, \\
\lambda_{[ab]\mu\nu} &= R_{[ab]\mu\nu}, & B_{[ab]\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{[ab]cd}e_{\mu}^ce_{\nu}^d, \\
\tilde{\lambda}^A_{\mu} &= (\nabla_{\mu}\phi)^A, & \tilde{\gamma}^A_{\mu\nu\rho} &= -e\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla^{\sigma}\phi)^A, \\
H^{abcA} &= \frac{1}{6e}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla_{\mu}\phi)^A e_{\nu}^a e_{\rho}^b e_{\sigma}^c, & \Lambda^{abA}_{\mu} &= \frac{1}{6e}g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}(\nabla_{\nu}\phi)^A e_{\rho}^a e_{\sigma}^b, \\
\gamma^A_{\mu\nu\rho} &= -i\varepsilon_{abcd}e_{\mu}^a e_{\nu}^b e_{\rho}^c (\gamma^d\psi)^A, & \bar{\gamma}_{A\mu\nu\rho} &= i\varepsilon_{abcd}e_{\mu}^a e_{\nu}^b e_{\rho}^c (\bar{\psi}\gamma^d)_A, \\
\lambda^A_{\mu} &= \left(\vec{\nabla}_{\mu}\psi\right)^A, & \bar{\lambda}_{A\mu} &= \left(\bar{\psi}\vec{\nabla}_{\mu}\right)_A, \\
\beta^a_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Другу групу чине једначине кретања за динамичка поља. Спинска конексија $\omega^{[ab]}_{\mu}$ није еквивалентна Леви-Чивита конексији, будући да фермионска поља генеришу ненулту торзију. Због тога је потребно прво поделити спинску конексију на збир Ричијевих ротационих коефицијената $\Delta^{[ab]}_{\mu}$ и тензор конторзије $K^{[ab]}_{\mu}$:

$$\omega^{[ab]}_{\mu} = \Delta^{[ab]}_{\mu} + K^{[ab]}_{\mu}. \tag{33}$$

Ричијеви ротациони коефицијенти су дати као линеарна комбинација комутационих коефицијената

$$\Delta^{ab}_{\mu} = \frac{1}{2}(c^{abc} - c^{bac} - c^{cab})e_{c\mu}, \tag{34}$$

који су дефинисани као

$$c^{abc} = e^{b\mu} e^{c\nu} (\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu) . \quad (35)$$

Тензор конторзије је дат изразом:

$$K^{ab}{}_\mu = \frac{1}{2} (T^{cab} + T^{bac} - T^{abc}) e_{c\mu} . \quad (36)$$

Овде је $T^{abc} \equiv T^a{}_{\mu\nu} e^{b\mu} e^{c\nu}$, где су $T^a{}_{\mu\nu}$ компоненте 2-форме торзије, дефинисане као:

$$T^a \equiv \nabla e^a = \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad T^a{}_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu e^a{}_\nu - \nabla_\nu e^a{}_\mu . \quad (37)$$

Комбиновањем свих претходних једначина, једначина кретања за торзију се може записати у облику:

$$T^a = 2\pi i l_p^2 s^a , \quad s^a \equiv \varepsilon^{abcd} e_b \wedge e_c \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma_d \psi^A . \quad (38)$$

Сада је очигледно да је 2-форма торзије пропорционална спинској 2-форми s^a . Као што ће се испоставити у следећем поглављу, овај резултат је исти и у Ајнштајн-Картановој теорији гравитације. Такође, коришћењем (36), компоненте 1-форме конторзије су

$$K^{ab}{}_\mu = -2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma_d \psi^A \varepsilon^{abcd} e_{c\mu} , \quad (39)$$

па се веза између конторзије и торзије поједностављује и постаје:

$$T^a = K^{ab} \wedge e_b . \quad (40)$$

Даље, Ајнштајнова једначина има уобичајен облик:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi l_p^2 T_{\mu\nu} , \quad (41)$$

где је тензор енергије-импулса:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & F^\alpha{}_{\mu\rho} C^\beta{}_\alpha F_{\beta\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^\alpha{}_{\rho\sigma} C^\beta{}_\alpha F_{\beta}{}^{\rho\sigma} \\ & + \nabla_\mu \phi^A \nabla_\nu \phi_A - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\nabla_\rho \phi^A \nabla^\rho \phi_A + 2\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 \right) \\ & + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi}_A \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \gamma_d \psi^A \right) e_\nu^d - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(i \left(\bar{\psi}_A \overleftrightarrow{\nabla}_\rho \gamma^d \psi^A \right) e_d^\rho - 2Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C \right) . \end{aligned} \quad (42)$$

Тензор садржи три дела који одговарају Јанг-Милсово, скаларно и Дираково поље, редом.

Једначине кретања за фермионска и скаларна поља су:

$$\left(i\gamma^\mu \overrightarrow{\nabla}_\mu \delta_B^A - Y^A{}_{BC} \phi^C \right) \psi^B = 0 , \quad (43)$$

$$\bar{\psi}_B \left(\delta_A^B i \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu + Y_{BAC} \phi^C \right) = 0 , \quad (44)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi^A - 4\chi (\phi^B \phi_B - v^2) \phi^A = 0 , \quad (45)$$

док је једначина кретања за Јанг-Милсово поље:

$$\nabla_\mu F^\mu{}_\alpha{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} C^{-1}{}_\alpha{}^\beta \left(\triangleright_{\beta AB} (\phi^A \nabla^\nu \phi^B - \phi^B \nabla^\nu \phi^A) + i \bar{\psi}_A \psi_B (\triangleright_{\beta C}{}^A \gamma^{\nu CB} - \gamma^{\nu AC} \triangleright_{\beta C}{}^B) \right) = 0 . \quad (46)$$

На основу претходних једначина се може закључити да све једначине кретања тачно одговарају једначинама кретања Стандардног модела спрегнутог са Ајнштајн-Картановом гравитацијом са космолошким константом.

Из дефиниције дејства (22) следи да цео конфигурациони простор теорије садржи и не-динамичка поља-Лагранжеве множитеље

$$M_{\alpha ab}, \zeta^{\alpha ab}, \lambda_{\alpha\mu\nu}, B_{\alpha\mu\nu}, \lambda_{[ab]\mu\nu}, B_{[ab]\mu\nu}, \tilde{\lambda}^A_\mu, \tilde{\gamma}^A_{\mu\nu\rho}, H^{abcA}, \Lambda^{abA}_\mu, \gamma^A_{\mu\nu\rho}, \bar{\gamma}_{A\mu\nu\rho}, \lambda^A_\mu, \bar{\lambda}_{A\mu}, \beta^a_{\mu\nu}, \quad (47)$$

као и динамичка поља

$$\omega^{[ab]}_\mu, e^a_\mu, \phi^A, \psi^A, \bar{\psi}_A, \alpha^\alpha_\mu. \quad (48)$$

Разлика између динамичких и нединамичких поља је последица једначина кретања. Једначине кретања за Лагранжеве множитеље су алгебарске, док су једначине кретања за динамичка поља диференцијалне. Једини изузетак од овог правила је једначина кретања за торзију (38), која се може решити по спинској конексији као функцији тетрада и Диракових поља, указујући на то да је спинска конексија такође нединамичко поље. Ово је добро позната особина Ајнштајн-картанове теорије, али је уобичајено да се спинска конексија ипак убраја у динамичка поља, јер у општијим теоријама у Риман-Картановим просторима спинска конексија може да постане право динамичко поље [42, 51].

2.3 Ајнштајн-Картанова дејства

Стандардно Ајнштајн-Картаново (ЕС) дејство је уобичајено наведено у литератури (на пример у [42]) као збир дејства за Стандардни Модел минимално спрегнуто са гравитацијом и Ајнштајн-Хилбертовог дејства за гравитационо поље (израженог у формализму првог реда). У досадашњој нотацији је то:

$$\begin{aligned} S_{EC}[e, \omega, \phi, \psi, \bar{\psi}, \alpha] = & \int \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} R_{ab} \wedge e_c \wedge e_d - F^\alpha \wedge C_{\alpha\beta} \star F^\beta - (\nabla\phi)^A \wedge (\star\nabla\phi)_A \\ & - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \left[(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla})_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\vec{\nabla}\psi)^A \right] \\ & - \frac{1}{12} \left[\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right] \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned} \quad (49)$$

Овде $\star F$ означава Хоџов дуал 2-форме F , слично као и дуал 1-форме $\nabla\phi$:

$$\star F^\alpha = \frac{1}{4} F^\alpha_{cd} \varepsilon^{abcd} e_a \wedge e_b, \quad (\star\nabla\phi)_A = \frac{1}{3!} (\nabla_d\phi)_A \varepsilon^{dabc} e_a \wedge e_b \wedge e_c. \quad (50)$$

Конфигурациони простор ове теорије је еквивалентан конфигурационом простору динамичких поља ЗВФ теорије (48), где спинска конексија поново задовољава алгебарску једначину

$$\omega_{ab\mu} = \Delta_{ab\mu} - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^c_\mu, \quad (51)$$

добијену из једначине кретања за торзију аналогну једначини (38), па не представља динамичко поље. Због тога је заменом ове једначине натраг у дејство могуће конструисати еквивалентну класичну теорију са редукованим конфигурационим простором и истим једначинама кретања. Ова еквивалентна теорија се у литератури обично назива *теорија другог*

реда [42]. Ова замена се изводи раздвајањем спинске конекције на конторзију и Ричијеве ротационе коефицијенте, и раздвајањем њихових доприноса у дејству. То је еквивалентно следећој замени:

$$\nabla_{(\omega)} = \nabla_{(\Delta)} + \frac{1}{2} K^{ab} \sigma_{ab} \quad (52)$$

У Ајнштајн-Картановом дејству постоје само два сабирка која зависе од спинске конекције. То су сабирак са Римановим тензором кривине и Лагранжијан за Дираково поље. После замене ови сабирци постају:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= d\omega_{ab} + (\omega \wedge \omega)_{ab} = d\Delta_{ab} + (\Delta \wedge \Delta)_{ab} + dK_{ab} + (\Delta \wedge K)_{ab} + (K \wedge \Delta)_{ab} + K_a^c \wedge K_{cb} \\ &= R_{ab}(\Delta) + (\nabla_{(\Delta)} K)_{ab} + K_a^c \wedge K_{cb}, \end{aligned} \quad (53)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla} \right)_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla \psi)^A &= \left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_{(\Delta)} \right)_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla_{(\Delta)} \psi)^A - \frac{1}{2} \bar{\psi}_A \{ \sigma^{ab}, \gamma^d \} \psi^A K_{ab} \\ &= \left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_{(\Delta)} \right)_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla_{(\Delta)} \psi)^A + \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma_c \psi^A K_{ab}. \end{aligned} \quad (54)$$

Када се ови сабирци замене натраг у стандардно Ајнштајн-Картаново дејство, након сређивања се добије дејство истог облика као почетно са додатним сабирком који представља контактну спин-спин интеракцију и фиксирану спинску конекцију Δ_{ab} . Овај додатни сабирак, изражен преко конторзије, је $\frac{1}{8\pi l_p^2} K^{ab} \wedge \star K_{ab}$, па се коришћењем релације између тензора спина и конторзије из стандардног Ајнштајн-Картановог дејства може елиминисати конторзија:

$$\begin{aligned} S_{ECC}[e, \phi, \psi, \bar{\psi}, \alpha] &= \int \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} R_{ab} \wedge e_c \wedge e_d - F^\alpha \wedge C_{\alpha\beta} \star F^\beta - (\nabla \phi)^A \wedge (\star \nabla \phi)_A \\ &\quad - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \left[(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla})_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla \psi)^A \right] + \frac{3}{(4\pi l_p^2)^3} s^a \wedge \star s_a \\ &\quad - \frac{1}{12} \left[\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right] \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned} \quad (55)$$

На тај начин је добијено Ајнштајн-Картаново дејство за контактну теорију (ЕСС), са интеракцијом четвртог степена између фермиона, садржане у сабирку $s^a \wedge \star s_a$. Једначине кретања ове теорије су еквивалентне једначинама кретања стандардне Ајнштајн-Картанове теорије и 3BF теорије са везама, али је конфигурациони простор другачији и једнак динамичком конфигурационом простору ових теорија:

$$e^a{}_\mu, \phi^A, \psi^A, \bar{\psi}_A, \alpha^\alpha{}_\mu. \quad (56)$$

Овим је закључена анализа 3BF дејства са везама, стандардне Ајнштајн-Картанове теорије и Ајнштајн-Картанове теорије с контактном интеракцијом.

2.4 Симетрије тополошког 3BF дејства

Укупна група симетрије тополошког 3BF дејства је проучена у [44, 52], и показано је да је њен облик $\mathcal{G}_{3BF} = (\tilde{G} \ltimes (\tilde{H}_L \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M}))) \ltimes HT$. Семидиректни и директни производ група

$\tilde{G}$, $\tilde{H}_L$, $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ одговара уобичајеној градијентној симетрији дејства, док HT група одговара такозваној Ено-Таителблом (НТ) симетрији, која је тривијална на једначинама кретања [52].

Избор 3-групе Стандардног Модела, уведене у претходним поглављима, имплицира специјалнију структуру групе градијентне симетрије $\mathcal{G}_{3BF}$. Конкретно, у општем случају, генератори групе $\tilde{H}_L$ могу природно да се поделе на $\tilde{H}$ -генераторе и $\tilde{L}$ -генераторе, који задовољавају комутационе релације Лијеве алгебре у облику

$$[\hat{H}, \hat{H}] \sim \hat{L}, \quad [\hat{H}, \hat{L}] \sim 0, \quad [\hat{L}, \hat{L}] \sim 0, \quad (57)$$

где су структурне константе у првом комутатору пропорционалне компонентама пресликавања Пајферовог подизања у датој 3-групи [44]. У случају избора тривијалног Пајферовог подизања, комутационе релације постају

$$[\hat{H}, \hat{H}] \sim 0, \quad [\hat{H}, \hat{L}] \sim 0, \quad [\hat{L}, \hat{L}] \sim 0. \quad (58)$$

То значи да група $\tilde{H}_L$ има структуру директног производа

$$\tilde{H}_L = \tilde{H} \times \tilde{L} \quad (59)$$

своје две Абелове нормалне подгрупе $\tilde{H}$ и $\tilde{L}$. Додатно, будући да су $\hat{H}$ -генератори одговорни за структуру семидиректног производа $\tilde{H}_L \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M})$ унутар $\mathcal{G}_{3BF}$, са комутационим релацијама у облику

$$[\hat{H}, \hat{N}] \sim \hat{M}, \quad [\hat{H}, \hat{M}] \sim 0, \quad [\hat{L}, \hat{M}] \sim 0, \quad [\hat{L}, \hat{N}] \sim 0, \quad (60)$$

могуће је директно закључити да у случају сваке 3-групе са тривијалним Пајферовим подизањем, одговарајућа група симетрије $\mathcal{G}_{3BF}$ има облик:

$$\mathcal{G}_{3BF} = (\tilde{G} \ltimes (\tilde{L} \times (\tilde{H} \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M})))) \ltimes HT. \quad (61)$$

Дакле, (61) представља групу градијентне симетрије 3BF теорије засноване на 3-групи Стандардног Модела.

Дејство ове групе на поља присутна у 3BF дејству у случају произвољне 3-групе је дато инфинитезималним трансформацијама у [44] и побројано као варијација форме, док су инфинитезималне НТ трансформације дефинисане у [52]. У специјалном случају 3-групе Стандардног Модела, обичне градијентне трансформације су дате експлицитно као варијација форме:

$$\begin{aligned} \delta_0^g \alpha^\alpha &= -\nabla \epsilon_g^\alpha, \\ \delta_0^g \omega^{[ab]} &= -\nabla \epsilon_g^{[ab]}, \\ \delta_0^g \beta^a &= \triangleright_{ab}^a \epsilon_g^\alpha \beta^b - \nabla \epsilon_h^a, \\ \delta_0^g \gamma^A &= \triangleright_{\alpha B}^A \epsilon_g^\alpha \gamma^B + \nabla \epsilon_l^A, \\ \delta_0^g B^\alpha &= f_{\beta\gamma}^\alpha \epsilon_g^\beta B^\gamma + e_a \wedge \epsilon_h^b \triangleright_{b^a}^\alpha - D_A \triangleright_{B^A}^\alpha \epsilon_l^B - \nabla \epsilon_m^\alpha + \beta_b \triangleright_a^\alpha \epsilon_n^a, \\ \delta_0^g B^{[ab]} &= f_{[gh][ij]}^{[ab]} B^{[ij]} \epsilon_g^{[gh]} - \nabla \epsilon_m^{[ab]} + e_c \wedge \epsilon_h^d \triangleright_{d^{[ab]}}^{[ab]} + \beta_d \triangleright_c^{[ab]} \epsilon_n^c - \epsilon_l^A \triangleright_{A^{[ab]}}^{[ab]} D_B, \\ \delta_0^g e^a &= -\nabla \epsilon_n^a + \epsilon_g^\alpha \triangleright_{ab}^\alpha e^b, \\ \delta_0^g D^A &= \triangleright_{\alpha B}^A \epsilon_g^\alpha D^B. \end{aligned} \quad (62)$$

Трансформације су задате помоћу пет слободних параметара који одговарају својим Лијевим алгебрама. Параметри ϵ_g^α и ϵ_n^a су нула-форме, ϵ_h^a и ϵ_m^α су један-форме, и ϵ_l^A су три-форме.

Инфинитезималне трансформације НТ симетрије је најлакше изразити у пратећој матричној форми [52]:

$$\begin{pmatrix} \delta_0^{HT} B^{\alpha}_{\mu\nu} \\ \delta_0^{HT} C^a_{\mu} \\ \delta_0^{HT} D^A \\ \delta_0^{HT} \alpha^{\alpha}_{\mu} \\ \delta_0^{HT} \beta^a_{\mu\nu} \\ \delta_0^{HT} \gamma^A_{\mu\nu\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma\lambda} & \epsilon^{\alpha b}_{\mu\nu\sigma} & \epsilon^{\alpha B}_{\mu\nu} & \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} & \epsilon^{\alpha b}_{\mu\nu\sigma\lambda} & \epsilon^{\alpha B}_{\mu\nu\sigma\lambda\xi} \\ \mu^{a\beta}_{\mu\sigma\lambda} & \epsilon^{ab}_{\mu\sigma} & \epsilon^{aB}_{\mu} & \epsilon^{a\beta}_{\mu\sigma} & \epsilon^{ab}_{\mu\sigma\lambda} & \epsilon^{aB}_{\mu\sigma\lambda\xi} \\ \mu^{A\beta}_{\sigma\lambda} & \mu^{Ab}_{\sigma} & \epsilon^{AB} & \epsilon^{A\beta}_{\sigma} & \epsilon^{Ab}_{\sigma\lambda} & \epsilon^{AB}_{\sigma\lambda\xi} \\ \mu^{\alpha\beta}_{\mu\sigma\lambda} & \mu^{\alpha b}_{\mu\sigma} & \mu^{\alpha B}_{\mu} & \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\sigma} & \epsilon^{\alpha b}_{\mu\sigma\lambda} & \epsilon^{\alpha B}_{\mu\sigma\lambda\xi} \\ \mu^{a\beta}_{\mu\nu\sigma\lambda} & \mu^{ab}_{\mu\nu\sigma} & \mu^{aB}_{\mu\nu} & \mu^{a\beta}_{\mu\nu\sigma} & \epsilon^{ab}_{\mu\nu\sigma\lambda} & \epsilon^{aB}_{\mu\nu\sigma\lambda\xi} \\ \mu^{A\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\lambda} & \mu^{Ab}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mu^{AB}_{\mu\nu\rho} & \mu^{A\beta}_{\mu\nu\rho\sigma} & \mu^{Ab}_{\mu\nu\rho\sigma\lambda} & \epsilon^{AB}_{\mu\nu\rho\sigma\lambda\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta B^{\beta}_{\sigma\lambda}} \\ \frac{\delta S}{\delta C^b_{\sigma}} \\ \frac{\delta S}{\delta D^B} \\ \frac{\delta S}{\delta \alpha^{\beta}_{\sigma}} \\ \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta \beta^b_{\sigma\lambda}} \\ \frac{1}{3!} \frac{\delta S}{\delta \gamma^B_{\sigma\lambda\xi}} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Да би се осигурала антисиметричност параметара матрице, морају да буду задовољени следећи идентитети:

$$\begin{aligned} \mu^{b\alpha}_{\sigma\mu\nu} &= -\epsilon^{\alpha b}_{\mu\nu\sigma}, & \mu^{B\alpha}_{\mu\nu} &= -\epsilon^{\alpha B}_{\mu\nu}, & \mu^{\beta\alpha}_{\sigma\mu\nu} &= -\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}, \\ \mu^{b\alpha}_{\sigma\lambda\mu\nu} &= -\epsilon^{\alpha b}_{\mu\nu\sigma\lambda}, & \mu^{B\alpha}_{\sigma\lambda\xi\mu\nu} &= -\epsilon^{\alpha B}_{\mu\nu\sigma\lambda\xi}, \\ \mu^{Ba}_{\mu} &= -\epsilon^{aB}_{\mu}, & \mu^{\beta a}_{\sigma\mu} &= -\epsilon^{a\beta}_{\mu\sigma}, \\ \mu^{ba}_{\sigma\lambda\mu} &= -\epsilon^{ab}_{\mu\sigma\lambda}, & \mu^{Ba}_{\sigma\lambda\xi\mu} &= -\epsilon^{aB}_{\mu\sigma\lambda\xi}, \\ \mu^{\beta A}_{\sigma} &= -\epsilon^{A\beta}_{\sigma}, & \mu^{bA}_{\sigma\lambda} &= -\epsilon^{Ab}_{\sigma\lambda}, & \mu^{BA}_{\sigma\lambda\xi} &= -\epsilon^{AB}_{\sigma\lambda\xi}, \\ \mu^{b\alpha}_{\sigma\lambda\mu} &= -\epsilon^{\alpha b}_{\mu\sigma\lambda}, & \mu^{B\alpha}_{\sigma\lambda\xi\mu} &= -\epsilon^{\alpha B}_{\mu\sigma\lambda\xi}, & \mu^{Ba}_{\sigma\lambda\xi\mu\nu} &= -\epsilon^{aB}_{\mu\nu\sigma\lambda\xi}. \end{aligned} \quad (64)$$

За више детаља о особинама и значају НТ трансформација погледати [52].

2.5 Тополошка инваријанта за квантну 3BF теорију

У процесу конструкције тополошке квантне теорије поља засноване на 3BF дејству, потребно је дефинисати суму по стањима:

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}D \exp \left(i \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}} \right). \quad (65)$$

Интеграција по пољима B , C и D се добија структура суме по стањима у облику интеграла по конексијама:

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\gamma \delta(\mathcal{F}) \delta(\mathcal{G}) \delta(\mathcal{H}). \quad (66)$$

Израчунавање вредности ове суме по стањима је могуће тек након формалног дефинисања мере у интегралу и домена интеграције. Ова мера се дефинише тако што се многоструконост издели на ћелије и потом свакој ћелији додели вредност поља које на њој живи, тако да 0-форме живе у вертексима, 1-форме на ивицама, 2-форме на површинама, 3-форме на тро-запреминама и 4-форме на четворозапреминама. Особине тополошких теорија су такве да вредност суме по стањима не зависи од начина на који је многоструконост издељена на ћелије, односно, сума по стањима је инваријантна на Пахнерове потезе (додавање нових елемената и

ћелија). Најелементарнија подела на ћелије је дата триангулацијом, односно у четвородимензијалном случају дељењем на 4-симплексе. Инваријантна сума по стањима на многострукости издењеној на 4-симплексе је:

$$\begin{aligned}
Z = & |G|^{-|v|+|l|+|\Delta|} |H|^{|v|-|l|+|\Delta|-|\tau|} |L|^{-|v|+|l|-|\Delta|+|\tau|-|\sigma|} \\
& \times \left(\prod_{(jk) \in \varepsilon} \int_G dg_{jk} \right) \left(\prod_{(jkl) \in \Delta} \int_H dh_{jkl} \right) \left(\prod_{(jklm) \in \tau} \int_L dl_{jklm} \right) \\
& \times \left(\prod_{(jkl) \in \Delta} \delta_G \left(\partial(h_{jkl}) g_{kl} g_{jk} g_{jl}^{-1} \right) \right) \left(\prod_{(jklm) \in \tau} \delta_H \left(\delta(l_{jklm}) h_{jlm} (g_{lm} \triangleright h_{jkl}) h_{klm}^{-1} h_{jkm}^{-1} \right) \right) \\
& \times \prod_{(jklmn) \in \sigma} \delta_L \left(l_{jlmn}^{-1} h_{jln} \triangleright' \{h_{lmn}, (g_{mn} g_{lm}) \triangleright h_{jkl}\}_{\mathbb{P}} l_{jklm}^{-1} (h_{jkn} \triangleright' l_{klmn}) l_{jkmn} h_{jmn} \triangleright' (g_{mn} \triangleright l_{jklm}) \right),
\end{aligned} \tag{67}$$

где су $|G|$, $|H|$ и $|L|$ број елемената група G , H и L , редом, $|v|$, $|l|$, $|\Delta|$, $|\tau|$ и $|\sigma|$ број вертекса, ивица, троуглова, тетраедара и 4-симплекса редом, и дејство $\triangleright'$ је дефинисано као:

$$h \triangleright' l = \{h, \delta l\}_{\mathbb{P}}, \quad h \in H, \quad l \in L. \tag{68}$$

Пресликавања δ_G , δ_H и δ_L су делте на групама G , H и L [26].

3 Механизми нарушења симетрије 3BF дејства са везама

У наредним поглављима ће бити изложен преглед механизма нарушења симетрије тополошког 3BF дејства, прво експлицитно, додавањем веза, а потом ће бити спроведен поступак спонтаног нарушења симетрије електрослабе интеракције и Хигсов механизм.

На овом месту, пре почетка дискусије о нарушењу симетрије, је важно истаћи једну везу између 3-групе и три билинеарне форме, јер ће ова веза имати значајну улогу у механизму нарушења симетрије и Хигсовом механизму. Специјалан услов који билинеарне форме морају да задовоље јесте да буду G -инваријантне. Ово намеће нетривијалне услове на избор дејства $\triangleright$. Ови услови су одређени теоремом.

Теорема 1. *За дат 2-укрштени модул $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{_, _\}_{\text{pf}})$ и симетричне, недегенерисане билинеарне форме $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{h}}$ и $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{l}}$, важи да ако су билинеарне форме G -инваријантне, онда компоненте дејства $\triangleright_{\alpha\beta\gamma}$, $\triangleright_{\alpha ab}$ и $\triangleright_{\alpha AB}$ морају да буду антисиметричне на замену другог и трећег индекса. Додатно, постоје избори базиса у Лијевим алгебрама $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{l}$ такви да $\triangleright_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, $\triangleright_{\alpha a}{}^b$ и $\triangleright_{\alpha A}{}^B$ имају нулте елементе на дијагонали у односу на други и трећи индекс, а билинеарне форме су у овом базису дијагоналне.*

За доказ теореме погледати Додатак [A.1](#). Потребно је нагласити да су ове рестрикције на дејство $\triangleright$ последица искључиво G -инваријантности билинеарних форми и да не важе у општем случају.

3.1 Експлицитно нарушење симетрије

Трансформације задате једначинама (62) и (63) чувају облик тополошког 3BF дејства. Међутим, у случају 3BF дејства са везама (22), ово више није испуњено, јер свака од додатих веза може експлицитно да наруши једну или више симетрија тополошког дејства. У циљу одређивања која симетрија је очувана, а која нарушена додавањем које везе, потребно је дефинисати помоћна дејства за сваку везу посебно у облику

$$S = S_{3BF} + S_{\text{constraint}}, \quad (69)$$

и варирати ово дејство према једначинама (62). Тополошки део S_{3BF} ће свакако остати непромењен при овим трансформацијама, што имплицира да је услов очуваности целог дејства дат захтевом да је и веза очувана

$$\delta_0^g S_{\text{constraint}} = 0. \quad (70)$$

Овај захтев не мора да буде аутоматски задовољен, већ може да се деси да је потребно неке од параметара трансформација $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}$ и $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a$ фиксирати на нулу. Сваки параметар који је потребно фиксирати указује да је одговарајућа подгрупа симетрије нарушена посматраном везом. У наредним одељцима ће бити испитано која веза (24)-(31) нарушава коју подгрупу симетрије, на основу услова (70).

Треба истаћи да је претходни метод заснован на услову (70) употребљив само за испитивање стандардних градијентних симетрија, док се НТ симетрија не може проверити на овакав начин. Конкретно, пошто дефиниција НТ симетрије (63) експлицитно зависи од облика дејства, додавање веза у дејство мења НТ групу симетрије на нетривијалан начин, најчешће тако што *повећава* број њених генератора и параметара. То значи да је нова НТ група *већа* од

НТ групе тополошког дејства [52]. Пошто је оваква промена НТ групе у потпуној супротности у односу на промену групе градијентне симетрије, која се нарушава додавањем веза, под нарушењем симетрије додавањем веза се може сматрати само нарушење градијентне групе симетрије.

3.1.1 Веза за гравитационо поље

Као што је претходно објашњено, процедура за анализу нарушења симетрије у случају везе за гравитационо поље се своди на одређивање варијације форме једначине (24) задатим са (62) и потом испитивање испуњености захтева (70). Конкретно, добија се:

$$\delta_0^g S_{\text{grav}} = - \int \left(\delta_0^g \lambda_{[ab]} \wedge \left(B^{[ab]} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} e_c \wedge e_d \right) + \lambda_{[ab]} \wedge \left(\delta_0^g B^{[ab]} + \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} \delta_0^g e_c \wedge e_d \right) \right). \quad (71)$$

Варијација Лагранжевог множитеља $\lambda_{[ab]}$ није у старту дефинисана, па се његова варијација може изабрати тако да симетрија буде очувана што је више могуће. Заменом (62) у (71), се добија да варијација везе за гравитацију постаје:

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{grav}} &= \int \left(\delta_0^g \lambda_{[ij]} - \lambda_{[i|h} \epsilon_{g|j]}^h \right) \wedge \left(B^{[ij]} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{[ij]nm} e_n \wedge e_m \right) \\ &+ \lambda_{[ab]} \wedge e_d \wedge \left(\epsilon_b^{[a} \eta^{b]d} - \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} \eta_{fc} \nabla \epsilon_n^f \right) \\ &+ \lambda_{[ab]} \wedge \left(\epsilon_n^{[a} \beta^{b]} - \nabla \epsilon_m^{[ab]} - \epsilon_l^A \triangleright^{[ab]} A^B D_B \right), \end{aligned} \quad (72)$$

одакле се може изабрати варијација множитеља $\lambda_{[ab]}$ у облику:

$$\delta_0^g \lambda_{[ij]} = -\lambda_{[ab]} f_{[gh][ij]}^{[ab]} \epsilon_g^{[gh]} = \lambda_{[i|h} \epsilon_{g|j]}^h. \quad (73)$$

Овај избор уклања цео први ред у једначини (72). Међутим, преостала два реда указују да се захтев (70) може испунити само фиксирањем вредности параметара ϵ_h^a , ϵ_n^a , ϵ_m^a и ϵ_l^A . Једини параметар који остаје слободан је ϵ_g^a . Ово имплицира да веза нарушава све подгрупе симетрије $\tilde{M}$, $\tilde{N}$, $\tilde{L}$, и $\tilde{H}$, осим $\tilde{G}$, која је у потпуности очувана.

3.1.2 Веза за скаларна поља

Коришћењем претходне процедуре се могу испитати и све остале везе. У случају везе за скаларна поља се добија:

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{scal}} &= \int \left[\delta_0^g \tilde{\lambda}_A \wedge (\tilde{\gamma}^A - H_{abc}^A e^a \wedge e^b \wedge e^c) \right. \\ &+ \tilde{\lambda}_A \wedge (\delta_0^g \tilde{\gamma}^A - \delta_0^g H_{abc}^A e^a \wedge e^b \wedge e^c - 3H_{abc}^A \delta_0^g e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\ &+ \delta_0^g \Lambda^{ab}{}_A \wedge (H_{abc}^A \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \nabla \phi^A \wedge e_a \wedge e_b) \\ &+ \Lambda^{ab}{}_A \wedge \left(\delta_0^g H_{abc}^A \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + 3H_{abc}^A \varepsilon^{cdef} \delta_0^g e_d \wedge e_e \wedge e_f \right. \\ &\left. \left. - \nabla \delta_0^g \phi^A \wedge e_a \wedge e_b - \delta_0^g \alpha^{[kl]} \triangleright_{[kl]B}^A \phi^B \wedge e_a \wedge e_b - 2\nabla \phi^A \wedge \delta_0^g e_a \wedge e_b \right) \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Замена (62) у (74) даје:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{scal}} &= \int \left[(\delta_0^g \tilde{\lambda}_A + \tilde{\lambda}_B \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[ij]} \triangleright_{[ij]A}{}^B) \wedge (\tilde{\gamma}^A - H_{abc}{}^A e^a \wedge e^b \wedge e^c) \right. \\
&- (\delta_0^g H_{abc}{}^A - \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[ij]} H_{abc}{}^B \triangleright_{[ij]B}{}^A) (\tilde{\lambda}_A \eta^{ad} \eta^{be} \eta^{cf} - \Lambda^{ab}{}_A \varepsilon^{cdef}) \wedge e_d \wedge e_e \wedge e_f \\
&+ (\delta_0^g \Lambda^{ab}{}_A + \Lambda^{ab}{}_B \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[cd]} \triangleright_{[cd]A}{}^B) \wedge (H_{abc}{}^A \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \nabla \phi^A \wedge e_a \wedge e_b) \\
&+ (\tilde{\lambda}_A \eta^{ad} \eta^{be} \eta^{cf} - \Lambda^{ab}{}_A \varepsilon^{cdef}) \wedge 3 H_{abc}{}^A (\nabla \epsilon_{nd}) \wedge e_e \wedge e_f \\
&\left. + 2 \Lambda^{ab}{}_A \wedge \nabla \phi^A \wedge \nabla \epsilon_{na} \wedge e_b + \tilde{\lambda}_A \wedge \nabla \epsilon_{\mathfrak{l}}^A \right]. \quad (75)
\end{aligned}$$

Очигледно је да из четвртог и петог реда следи да ова веза нарушава само подгрупе $\tilde{N}$ и $\tilde{L}$, док $\tilde{H}$ и $\tilde{M}$ симетрије остају очуване јер се њихови параметри $\epsilon_{\mathfrak{h}}^a$ и $\epsilon_{\mathfrak{m}}^a$ и не појављују у једначини за варијацију (75). Коначно, у циљу очувања $\tilde{G}$ симетрије, могу се изабрати дефиниције варијација нових множитеља:

$$\delta_0^g \tilde{\lambda}^A = \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[ij]} \tilde{\lambda}^B \triangleright_{[ij]B}{}^A, \quad \delta_0^g H_{abc}{}^A = H_{abc}{}^B \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[ij]} \triangleright_{[ij]B}{}^A, \quad \delta_0^g \Lambda^{abA} = \epsilon_{\mathfrak{g}}^{[cd]} \Lambda^{abB} \triangleright_{[cd]B}{}^A. \quad (76)$$

3.1.3 Веза за Диракова поља

На исти начин, варијација везе за Диракова поља даје:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Dirac}} &= \int (\delta_0^g \bar{\lambda}_A) \wedge \left(\gamma^A + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
&- (\delta_0^g \lambda^A) \wedge \left(\bar{\gamma}_A - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right) \\
&+ \bar{\lambda}_A \wedge \left((\delta_0^g \gamma^A) + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d (\delta_0^g \psi))^A + \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} (\delta_0^g e^a) \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
&- \lambda^A \wedge \left((\delta_0^g \bar{\gamma}_A) - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d (\delta_0^g \bar{\psi}))_A - \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} (\delta_0^g e^a) \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \bar{\psi})_A \right) \quad (77)
\end{aligned}$$

Заменом (62) у (77) се добија:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Dirac}} &= \int (\delta_0^g \bar{\lambda}_A + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \triangleright_{\alpha A}{}^B \bar{\lambda}_B) \wedge \left(\gamma^A + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
&- (\delta_0^g \lambda^A + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \triangleright_{\alpha}{}^A{}_B \lambda^B) \wedge \left(\bar{\gamma}_A - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right) \\
&+ \bar{\lambda}_A \wedge \left(\nabla \epsilon_{\mathfrak{l}}^A + \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} (\nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}^a) \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
&- \lambda^A \wedge \left(\nabla \bar{\epsilon}_{\mathfrak{l}A} - \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} (\nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}^a) \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right). \quad (78)
\end{aligned}$$

Ова веза такође нарушава само $\tilde{N}$ и $\tilde{L}$ симетрије, слично као и веза за скаларна поља. Варијација нових множитеља се може изабрати да буде:

$$\delta_0^g \bar{\lambda}_A = \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \triangleright_{\alpha}{}^B{}_A \bar{\lambda}_B, \quad \delta_0^g \lambda^A = \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \triangleright_{\alpha}{}^A{}_B \lambda^B. \quad (79)$$

3.1.4 Веза за Јанг-Милсова поља

Веза за Јанг-Милсова поља је слична вези за гравитационо поље, али садржи више Лагранжевих множитеља. Применом исте процедуре се добија:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Yang-Mills}} &= \int \delta_0^g \lambda^\alpha \wedge (B_\alpha - 12C^{\alpha\beta} M_{\beta ab} e^a \wedge e^b) \\
&+ \lambda^\alpha \wedge (\delta_0^g B_\alpha - 12C^{\alpha\beta} \delta_0^g M_{\beta ab} e^a \wedge e^b - 24C^{\alpha\beta} M_{\beta ab} \delta_0^g e^a \wedge e^b) \\
&+ \delta_0^g \zeta^{\alpha ab} (M_{\alpha ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F_\alpha \wedge e_a \wedge e_b) \\
&+ \zeta^{\alpha ab} ((\delta_0^g M_{\alpha ab}) \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f + 4M_{\alpha ab} \varepsilon_{cdef} (\delta_0^g e^c) \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f \\
&- (\delta_0^g F_\alpha) \wedge e_a \wedge e_b - 2F_\alpha \wedge (\delta_0^g e_a) \wedge e_b) ,
\end{aligned} \tag{80}$$

где је

$$\delta_0^g F_\alpha = \epsilon_g^\beta F^\gamma \triangleright_{\alpha\beta\gamma} . \tag{81}$$

Варијација јачине поља (81) је добијена по дефиницији (7) коришћењем (62). Комбинација једначина (62), (80) и (81) даје:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Yang-Mills}} &= \int (\delta_0^g \lambda^\alpha + \lambda^\gamma \epsilon_g^\beta \triangleright_{\gamma\beta}{}^\alpha) \wedge (B_\alpha - 12C^{\alpha\beta} M_{\beta ab} e^a \wedge e^b) \\
&+ (\delta_0^g M_{\alpha ab} - \epsilon_g^\beta M^\gamma{}_{ab} \triangleright_{\alpha\beta\gamma}) (\zeta^{\alpha ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - 12C^\alpha{}_\beta \lambda^\beta \wedge e^a \wedge e^b) \\
&+ (\delta_0^g \zeta^{\alpha ab} + \triangleright_{\gamma\beta}{}^\alpha \zeta^{\gamma ab} \epsilon_g^\beta) (M_{\alpha ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F_\alpha \wedge e_a \wedge e_b) \\
&+ \lambda^\alpha \wedge (-\nabla \epsilon_{m\alpha} - \epsilon_l^A \triangleright_{\alpha A}{}^B D_B + \epsilon_n^a \triangleright_{\alpha a}{}^b \beta_b \\
&- \epsilon_h^a \wedge e_b \triangleright_{\alpha a}{}^b + 24C^{\alpha\beta} M_{\beta ab} (\nabla \epsilon_n^a) \wedge e^b) \\
&+ \zeta^{\alpha ab} (-4M_{\alpha ab} \varepsilon_{cdef} (\nabla \epsilon_n^c) \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f + 2F_\alpha \wedge (\nabla \epsilon_{na}) \wedge e_b) .
\end{aligned} \tag{82}$$

Слично као и у случају везе за гравитационо поље, све симетрије $\tilde{H}$, $\tilde{L}$, $\tilde{N}$ и $\tilde{M}$, осим $\tilde{G}$, су нарушене. Варијација нових множитеља се може изабрати да буде:

$$\delta_0^g \lambda^\alpha = \epsilon_g^\beta \lambda^\gamma \triangleright_{\beta\gamma}{}^\alpha , \quad \delta_0^g M_{\alpha ab} = \epsilon_g^\beta M^\gamma{}_{ab} \triangleright_{\alpha\beta\gamma} , \quad \delta_0^g \zeta^{\alpha ab} = \epsilon_g^\beta \zeta^{\gamma ab} \triangleright_{\beta\gamma}{}^\alpha . \tag{83}$$

3.1.5 Везе за Хигсов и Јукавин потенцијал, спинска и веза са космолошком константом

Варијација везе за Хигсов потенцијал даје

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Higgs}} &= -\frac{1}{3} \chi \int 2(\phi_A \phi^A - v^2) \phi_A (\delta_0^g \phi^A) \varepsilon^{abcd} e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d \\
&+ (\phi_A \phi^A - v^2)^2 \varepsilon^{abcd} (\delta_0^g e_a) \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d .
\end{aligned} \tag{84}$$

Одатле следи

$$\delta_0^g S_{\text{Higgs}} = \frac{1}{3} \chi \int (\phi_A \phi^A - v^2)^2 \varepsilon^{abcd} (\nabla \epsilon_{na}) \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d, \quad (85)$$

након коришћења идентитета $\triangleright_{\alpha AB} = -\triangleright_{\alpha BA}$ из Теореме 1. Ова веза не нарушава $\tilde{G}$ симетрију јер њен параметар нестаје из једначине (85) иако је иницијално био присутан у дефиницији варијација ϕ^A и e_a , па је наручена само $\tilde{N}$ симетрија.

Варијација везе за Јукавин потенцијал је:

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{Yukawa}} &= -\frac{2}{4!} \int Y_{ABC} \delta_0^g (\bar{\psi}^A \psi^B) \phi^C \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \delta_0^g \phi^C \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 4 Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C \varepsilon_{abcd} \delta_0^g e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned} \quad (86)$$

Поново, заменом варијације поља (62) у (86) се добија:

$$\delta_0^g S_{\text{Yukawa}} = \frac{1}{3} \int Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C \varepsilon_{abcd} (\nabla \epsilon_n^a) \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (87)$$

Као и у претходном случају, само је $\tilde{N}$ симетрија нарушена, зато што је Y_{ABC} матрица дефинисана на такав начин да чува $\tilde{G}$ симетрију.

Спинска веза не нарушава $\tilde{G}$ симетрију из истих разлога као и претходне две везе, али нарушава $\tilde{N}$ и $\tilde{H}$ симетрије:

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{spin}} &= 2\pi i l_p^2 \varepsilon_{abcd} \int (\delta_0^g (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^a \psi) e^b \wedge e^c \wedge \beta^d + \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^a \psi \delta_0^g (e^b \wedge e^c \wedge \beta^d)) , \\ &= -2\pi i l_p^2 \varepsilon_{abcd} \int \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^a \psi (2(\nabla \epsilon_n^b) \wedge e^c \wedge \beta^d + e^b \wedge e^c \wedge (\nabla \epsilon_b^d)) . \end{aligned} \quad (88)$$

Коначно, веза за космолошку константу нарушава само $\tilde{N}$ симетрију:

$$\delta_0^g S_{\text{CC}} = - \int \frac{1}{24\pi l_p^2} \Lambda \varepsilon_{abcd} \delta_0^g e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = - \int \frac{1}{24\pi l_p^2} \Lambda \varepsilon_{abcd} \nabla \epsilon_n^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (89)$$

3.1.6 Преглед нарушења симетрије

У циљу сумирања резултата у овом одељку, може се конструисати табела симетрија и веза. Свако поље у табели означено са $\times$ одговара постојању нарушења дате симетрије датом везом:

	S_{grav}	S_{scal}	S_{Dirac}	$S_{\text{Yang-Mills}}$	S_{Higgs}	S_{Yukawa}	S_{spin}	S_{CC}
$\tilde{G}$								
$\tilde{H}$	$\times$			$\times$			$\times$	
$\tilde{L}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
$\tilde{M}$	$\times$			$\times$				
$\tilde{N}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Из ове табеле је могуће закључити неколико особина. Прва, $\tilde{G}$ симетрија је очувана у свим везама, док је $\tilde{N}$ симетрија наручена свим везама. Друга, гравитациона и Јанг-Милсова веза нарушавају све симетрије осим $\tilde{G}$, и ове везе су једине такве. Коначно, везе за Хигсов и Јукавин потенцијал, као и веза за космолошку константу нарушавају само $\tilde{N}$ симетрију.

Додатно се, поред ових веза, могу испитати и везе које се не појављују у дејству (22) али ће се појавити у следећем поглављу о спонтаном нарушењу симетрије. Прва од ових веза је веза за масу скаларних поља:

$$S_{\text{scalar mass}} = -\frac{m^2}{4!} \varepsilon_{abcd} \int \phi_A \phi^A e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (90)$$

Варијација ове везе је

$$\delta_0^g S_{\text{scalar mass}} = -\frac{m^2}{4!} \varepsilon_{abcd} \int (2(\delta_0^g \phi_A) \phi^A e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 4\phi_A \phi^A (\delta_0^g e^a) \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d), \quad (91)$$

односно:

$$\delta_0^g S_{\text{scalar mass}} = \frac{m^2}{3!} \varepsilon_{abcd} \int \phi_A \phi^A (\nabla \epsilon_n^a) \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (92)$$

Одатле се може закључити да веза (90) нарушава само $\tilde{N}$ симетрију.

Друга нова веза је веза за масу Диракових поља:

$$S_{\text{Dirac mass}} = -\frac{m}{12} \varepsilon_{abcd} \int \bar{\psi}_A \psi^A e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (93)$$

Њена варијација је

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{Dirac mass}} = & -\frac{m}{12} \varepsilon_{abcd} \int ((\delta_0^g \bar{\psi}_A) \psi^A e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \bar{\psi}_A (\delta_0^g \psi^A) e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ & + 4\bar{\psi}_A \psi^A (\delta_0^g e^a) \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d), \end{aligned} \quad (94)$$

што је једнако:

$$\delta_0^g S_{\text{Dirac mass}} = \frac{m}{3} \varepsilon_{abcd} \int \bar{\psi}_A \psi^A (\nabla \epsilon_n^a) \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (95)$$

Слично као у случају масе скаларних поља, и ова веза нарушава само $\tilde{N}$ симетрију.

Трећа нова веза је Прокина веза. Ова веза се експлицитно појављује у следећем поглављу у једначини (103), као део дискусије дејства за Прокино поље. Облик ове везе је:

$$S_{\text{Proca}} = \int \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + \frac{M}{g} \alpha_\alpha \wedge e_a \wedge e_b \right) + \frac{M}{g} \alpha^\alpha \wedge \Xi_{\alpha abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c. \quad (96)$$

Варијација везе даје:

$$\begin{aligned} \delta_0^g S_{\text{Proca}} = & \int \left[\frac{M}{g} (\delta_0^g \alpha^\alpha \wedge \Xi_{\alpha abc} e^a + \alpha^\alpha \wedge \delta_0^g \Xi_{\alpha abc} e^a + 3\alpha^\alpha \wedge \Xi_{\alpha abc} \delta_0^g e^a) \wedge e^b \wedge e^c \right. \\ & + \delta_0^g \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + \frac{M}{g} \alpha_\alpha \wedge e_a \wedge e_b \right) \\ & + \Theta^{\alpha ab} \wedge (\delta_0^g \Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + 3\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} \delta_0^g e_d \wedge e_e \wedge e_f) \\ & \left. + \frac{M}{g} \Theta^{\alpha ab} \wedge (\delta_0^g \alpha_\alpha \wedge e_a \wedge e_b + 2\alpha_\alpha \wedge \delta_0^g e_a \wedge e_b) \right]. \end{aligned} \quad (97)$$

Заменом варијације конексије α и поља тетрада, као и коришћењем чињенице да је $\triangleright_{\alpha a}^b = 0$, добија се:

$$\begin{aligned}
\delta_0^g S_{\text{Proca}} = & \int \left[\delta_0^g \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + \frac{M}{g} \alpha_\alpha \wedge e_a \wedge e_b \right) \right. \\
& + \delta_0^g \Xi_{\alpha abc} \left(\frac{M}{g} \alpha^\alpha \wedge e^a \wedge e^b \wedge e^c + \Theta^{\alpha ab} \wedge \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f \right) \\
& + \frac{M}{g} \nabla_{\epsilon_g}^\alpha \wedge (\Theta^{\alpha ab} \wedge e_a \wedge e_b - \Xi_{\alpha abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\
& - 3 \Xi_{\alpha abc} \left(\frac{M}{g} \alpha^\alpha \wedge \nabla_{\epsilon_n}^a \wedge e^b \wedge e^c + \Theta^{\alpha ab} \varepsilon^{cdef} \nabla_{\epsilon_{nd}} \wedge e_e \wedge e_f \right) \\
& \left. - 2 \frac{M}{g} \Theta^{\alpha ab} \wedge \alpha_\alpha \wedge \nabla_{\epsilon_{na}} \wedge e_b \right]. \tag{98}
\end{aligned}$$

Сада је могуће елиминисати прва два реда из једначине избором варијације множитеља:

$$\delta_0^g \Theta^{\alpha ab} = 0, \quad \delta_0^g \Xi_{\alpha abc} = 0. \tag{99}$$

Међутим, поред нарушења $\tilde{N}$ симетрије, Прокина веза је једина која нарушава и $\tilde{G}$ симетрију, јер се њен параметар експлицитно појављује у трећем реду.

Коначно, могуће је конструисати сличну табелу и за ове три везе:

	$S_{\text{scalar mass}}$	$S_{\text{Dirac mass}}$	S_{Proca}
$\tilde{G}$			$\times$
$\tilde{H}$			
$\tilde{L}$			
$\tilde{M}$			
$\tilde{N}$	$\times$	$\times$	$\times$

Овиме је завршена анализа експлицитног нарушења симетрије 3BF дејства са везама.

3.2 Спонтано нарушење симетрије и Хигсов механизам

Уобичајене формулације дејства за Стандардни Модел елементарних честица не укључују 3BF дејство са везама, већ су најчешће изражене помоћу Лагранжијана састављених од обичних тензора. Потом се спровођењем низа корака по угледу на Хигсов механизам, Лагранжијан преписује у облик у ком градијентна симетрија није експлицитно изражена. Додатна претпоставка је да вакуумско стање делимично нарушава ову градијентну симетрију на њену подгрупу и одговара делимичном фиксирању калибрације Лагранжијана, што доводи до спонтаног нарушења његове симетрије.

Сада је у контексту 3BF теорије са везама природно поставити питање да ли се Хигсов механизам може спровести над дејством (22), које представља Стандардни Модел изражен у другом облику, и репродуковати исти резултати као у случају стандардне дефиниције теорије.

3.2.1 3BF дејство са везама за Прокино поље

У циљу проучавања теорије електрослабих интеракција, спонтаног нарушења симетрије и Хигсовог механизма у контексту виших градијентних теорија је важно конструисати дејство за Прокино поље као 3BF дејство са везама, јер ће Хигсов механизам да генерише масене чланове у дејству за градијентна поља. Формулација 3BF дејства са везама за Прокино поље и његово проучавање ће касније олакшати анализу Хигсовог механизма.

У процесу дефинисања 3BF дејства са везама за Прокино поље, прво је потребно изабрати конкретну 3-групу. Уобичајен избор за три Лијеве групе које чине структуру 3-групе је:

$$G = SO(3, 1) \times SU(N), \quad H = \mathbb{R}^4, \quad L = \{\mathbb{1}_L\}. \quad (100)$$

Овај избор одговара $SU(N)$ Јанг-Милсовом пољу спрегнутим са Ајнштајн-Картановом гравитацијом без скаларних поља и фермиона (пошто је L група тривијална). Избор тривијалне L групе повлачи за собом услов да су и Пајферово подизање и хомоморфизам δ тривијални, као и дејство $\triangleright$ групе G на групу L . Преостаје да се дефинише хомоморфизам ∂ и дејство $\triangleright$ групе G на саму себе и на групу H . Као и у случају 3-групе за Стандардни Модел, хомоморфизам ∂ се бира да буде тривијалан, а дејство $\triangleright$ је дефинисано на следећи начин. Дејство групе G на саму себе је дато једначинама (13) и (14), слично као у случају Стандардног Модела, док је дејство групе G на групу H такође дато једначинама (15).

Такође, да би дејство било дефинисано, потребно је изабрати конкретне симетричне, не-дегенерисане, инваријантне, билинеарне форме $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{g}}$ и $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{h}}$. Њихов избор је одређен једначинама (17) и (18), редом, док је $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{l}}$ тривијална. Ови избори поједностављују 3BF дејство тако да оно постаје 2BF дејство, специјалан случај (23), дато са:

$$S_{2BF} = \int B_{\alpha} \wedge F^{\alpha} + B^{[ab]} \wedge R_{[ab]} + e_a \wedge \nabla \beta^a. \quad (101)$$

Овде је први члан BF дејство за $SU(N)$ Јанг-Милсово поље, док преостала два сабирка одговарају гравитационом пољу.

Након дефинисања тополошког дејства теорије, потребно је одредити везе којима се оно деформише тако да даје добре једначине кретања за Прокино и гравитационо поље. Веза за гравитационо поље је поново дата једначином (24), док се за Прокино поље морају додати везе за Јанг-Милсово поље (27), као и додатна веза, звана Прокина веза:

$$S = S_{2BF} + S_{\text{grav}} + S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{Proca}}. \quad (102)$$

Прокина веза има следећи облик:

$$S_{\text{Proca}} = \int \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + \frac{M}{g} \alpha_{\alpha} \wedge e_a \wedge e_b \right) + \frac{M}{g} \alpha^{\alpha} \wedge \Xi_{\alpha abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c, \quad (103)$$

где су 1-форма $\Theta^{\alpha ab}$ и 0-форма $\Xi_{\alpha abc}$ нови Лагранжеви множитељи, M је нови параметар, док је g константа интеракције Јанг-Милсовог поља, која одговара конкретном избору билинеарне форме интеракционих константи у (27) као:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{g^2} g_{\alpha\beta}. \quad (104)$$

У циљу провере да дејство (102) заиста одговара Прокином пољу, потребно је одредити једначине кретања. Слично као у случају дејства за Стандардни модел, варијација дејства по Лагранжевим множитељима даје алгебарске једначине које се могу решити по множитељима,

$$\begin{aligned} M_{\alpha ab} &= -\frac{1}{48}\varepsilon_{abcd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu F_\alpha{}^{\mu\nu}, & \lambda_{\alpha\mu\nu} &= -F_{\alpha\mu\nu}, & \zeta^{\alpha ab} &= \frac{1}{4g^2}\varepsilon^{abcd}e_{c\mu}e_{d\nu}F^{\alpha\mu\nu}, \\ \Theta^{\alpha ab}{}_\mu &= \frac{M}{6g}\varepsilon^{abcd}\alpha^\alpha{}_\nu e_c{}^\nu e_{d\mu}, & \lambda_{[ab]\mu\nu} &= R_{[ab]\mu\nu}, & \Xi_{\alpha abc} &= \frac{M}{6g}\varepsilon_{abcd}\alpha_{\alpha\mu}e^{d\mu}, \\ B_{\alpha\mu\nu} &= -\frac{e}{2g^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha{}^{\rho\sigma}, & \beta^a{}_{\mu\nu} &= 0, & B_{[ab]\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu, \end{aligned} \quad (105)$$

потом, Ајнштајнову једначину (41) за тензор енергије-импулса који је једнак:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g^2} \left(F^\alpha{}_{\mu\rho} F_{\alpha\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^\alpha{}_{\rho\sigma} F_\alpha{}^{\rho\sigma} \right) + \frac{M^2}{g^2} \left(\alpha_{\alpha\mu} \alpha^\alpha{}_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \alpha_\alpha{}^\rho \alpha^\alpha{}_\rho \right), \quad (106)$$

као и једначину за спинску конексију (33) и једначину за торзију $T^a \equiv \nabla e^a = 0$, и коначно, једначину кретања за поље векторских бозона

$$\nabla_\mu F^{\alpha\mu}{}_\nu - M^2 \alpha^\alpha{}_\nu = 0, \quad (107)$$

где је $F^\alpha{}_{\mu\nu}$ стандардни тензор јачине Јанг-Милсовог поља за $SU(N)$ конексију $\alpha^\alpha{}_\mu$. Ово је управо једначина кретања за Прокино поље масе M .

Додатно се осим решавањем једначина кретања може демонстрирати да дејство (102) одговара дејству за Прокино поље елиминацијом свих помоћних поља. Пошто су помоћна поља на једначинама кретања задата алгебарским једначинама динамичких поља, њихове једначине кретања се могу заменити натраг у дејство чиме се добија теорија другог реда. Конкретно, заменом свих једначина за помоћна поља (105) у (102), се добија управо стандардно дејство за Прокино поље спрегнуто са Ајнштајн-Картановом гравитацијом:

$$S = \int \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} R_{ab} \wedge e_c \wedge e_d - \frac{1}{g^2} F_\alpha \wedge \star F^\alpha - \frac{1}{4!} \frac{M^2}{g^2} \alpha_\alpha{}^\mu \alpha_\alpha{}^\mu \varepsilon^{abcd} e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d. \quad (108)$$

Овде је $\alpha_\alpha{}^\mu \equiv \alpha_{\alpha\nu} g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a{}^\mu e_b{}^\nu$. Такође, $\star F$ означава Хоцов дуал 2-форме F :

$$\star F^\alpha = \frac{1}{4} F^\alpha{}_{cd} \varepsilon^{abcd} e_a \wedge e_b. \quad (109)$$

Електрослабе интеракције у Стандардном Моделу садрже више Прокиних поља са различитим масама M . Да би овакав случај био обухваћен у теорији, потребно је уопштити дејство (102) тако да садржи више Прокиних поља. Ово уопштење се може извршити избором 3-групе са модификованом групом G у облику:

$$G = SO(3, 1) \times \prod_i U(1) \times \prod_j SU(N_j). \quad (110)$$

У односу на претходни избор три групе (100), може се уочити да је подгрупа $SU(N)$ у G замењена вишеструким копијама $U(1)$ и $SU(N_j)$ групе, у зависности од тога колико је Прокиних поља садржано у теорији. Структура 3-групе остаје непромењена, у смислу да је дејство $\triangleright$

само уопштено са $SU(N)$ случаја на стандардан начин, тако да једначине (13), (14) и (15) остају задовољене за општи избор (110).

Чак и у случају овог општијег избора 3-групе, дејство теорије и даље има исти облик као у једначини (102), али сада чланови S_{2BF} и $S_{Yang-Mills}$ одговарају новоизабраним групама унутрашње симетрије, а билинеарна форма константи интеракције $C_{\alpha\beta}$ не мора више да има облик (104), већ може да зависи од више константи g_i , од којих по једна одговара сваком чиниоцу у производу (110). Једини захтев који $C_{\alpha\beta}$ мора да задовољи је да буде симетрична, недегенерисана и G -инваријантна, будући да су јој својствене вредности $1/g_i^2$. Коначно, сабирак S_{Proca} постаје компликованији и има облик:

$$S_{Proca} = \int \Theta^{\alpha\beta} \wedge \left(\Xi_{\alpha\beta c} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + N_{\alpha\beta} \alpha^\beta \wedge e_a \wedge e_b \right) + \alpha^\alpha \wedge \tilde{N}_\alpha^\beta \Xi_{\beta abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c, \quad (111)$$

Ова веза садржи нову билинеарну форму $N_{\alpha\beta}$ и нову матрицу $\tilde{N}_\alpha^\beta$, које су константне, произвољне и представљају нове слободне параметре у дејству. У циљу разумевања њихове физичке интерпретације, потребно је одредити једначине кретања. Прво се добијају једначине кретања по множителјима:

$$\begin{aligned} M_{\alpha ab} &= -\frac{1}{48} \varepsilon_{abcd} e_\mu^c e_\nu^d F_\alpha^{\mu\nu}, & \lambda_{\alpha\mu\nu} &= -F_{\alpha\mu\nu}, & \zeta_\alpha^{ab} &= \frac{1}{4} C_{\alpha\beta} \varepsilon^{abcd} e_{c\mu} e_{d\nu} F^{\beta\mu\nu}, \\ \Theta^{\alpha ab}{}_\mu &= \frac{1}{6} \tilde{N}_\beta^\alpha \varepsilon^{abcd} \alpha_\nu^\beta e_c^\nu e_{d\mu}, & \lambda_{[ab]\mu\nu} &= R_{[ab]\mu\nu}, & \Xi_{\alpha abc} &= \frac{1}{6} N_{\alpha\beta} \varepsilon_{abcd} \alpha_\mu^\beta e^\mu e^\nu, \\ B_{\alpha\mu\nu} &= -\frac{e}{2} C_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\beta\rho\sigma}, & \beta_\mu^\alpha &= 0, & B_{[ab]\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon_{abcd} e_\mu^c e_\nu^d, \end{aligned} \quad (112)$$

где се појављују нови параметри $C_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ и $\tilde{N}_\alpha^\beta$. Следећа је једначина кретања за торзију $\nabla e^a = 0$ која је остала непромењена, док је једначина за тензор енергије-импулса за векторска поља у облику:

$$\nabla_\mu F^{\alpha\mu}{}_\nu - M^\alpha{}_\beta \alpha^\beta{}_\nu = 0, \quad (113)$$

$$T_{\mu\nu} = C_{\alpha\beta} \left(F^\alpha{}_{\mu\rho} F^\beta{}_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^\alpha{}_{\rho\sigma} F^{\beta\rho\sigma} \right) + C_{\alpha\beta} M^\beta{}_\gamma \left(\alpha^\alpha{}_\mu \alpha^\gamma{}_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \alpha^\alpha{}_\rho \alpha^\gamma{}^\rho \right). \quad (114)$$

Овде је нова матрица $M^\alpha{}_\beta$ добијена из $C_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ и $\tilde{N}_\alpha^\beta$ као:

$$M^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} (C^{-1})^{\alpha\gamma} \left(\tilde{N}_\gamma{}^\delta N_{\delta\beta} + \tilde{N}_\beta{}^\delta N_{\delta\gamma} \right). \quad (115)$$

Ова матрица се може интерпретирати као матрица квадрата маса. Ову матрицу је могуће конструисати јер је билинеарна форма $C_{\alpha\beta}$ недегенерисана, па је самим тим и инвертибилна. У циљу интерпретације $M^\alpha{}_\beta$ као матрице квадрата маса, параметри $C_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ и $\tilde{N}_\alpha^\beta$ морају да се изаберу тако да је (115) ненегативно дефинитна. У том случају се избором базиса у Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ који одговара својственом базису $M^\alpha{}_\beta$, са својственим вредностима означеним са $M_{(\alpha)}^2$, матрица квадрата маса може записати у облику

$$M^\alpha{}_\beta = M_{(\alpha)}^2 \delta_\beta^\alpha, \quad (116)$$

где заграде око индекса α означавају да се по индексу не сумира. Једначина кретања (113) је у овом базису представљена скупом распрегнутих једначина

$$\nabla_\mu F^{\alpha\mu}{}_\nu - M_{(\alpha)}^2 \alpha^\alpha{}_\nu = 0. \quad (117)$$

Овај скуп једначина за више Прокиних поља, потенцијално различитих маса $M_{(\alpha)}$, објашњава због чега се M^α_β може интерпретирати као матрица квадрата маса. Такође, треба приметити да су добијена једначина кретања (117), једначина тензора енергије-импулса (114), природна уопштења једначина (107) и (106), редом, добијених за једно Прокино поље. Штавише, као и у случају једног Прокиног поља, алгебарске једначине кретања за помоћна поља (112) се исто могу заменити натраг у дејство (102) са (111) чиме се добија стандардна теорија другог реда за више Прокиних поља спрегнутих са Ајнштајн-Картановом гравитацијом.

Да би дејство за Прокино поље било могуће успешно упоредити са дејством добијеним у наредним одељцима као резултат Хигсовог механизма члан по члан, потребно је још мало модификовати дејство. Конкретно, потребно је модификовати Прокину везу (111) увођењем још два Лагранжева множитеља, 1-форму θ^α и 3-форму ρ_α , на следећи начин:

$$\begin{aligned} S_{\text{Proca}} = & \int \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{def} e_d \wedge e_e \wedge e_f + N_{\alpha\beta} \alpha^\beta \wedge e_a \wedge e_b \right) + \alpha^\alpha \wedge \tilde{N}_\alpha{}^\beta \rho_\beta \\ & + \theta^\alpha \wedge (\rho_\alpha - \Xi_{\alpha abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c) . \end{aligned} \quad (118)$$

Два додатна Лагранжева множитеља повећавају конфигурациони простор на одговарајући начин, тако да он постаје компатибилан са конфигурационим простором који се појављује у одељку о Хигсовом механизму. Осим тога, множитељи не мењају ни једну другу особину дејства за Прокина поља. Конкретно, једначине кретања (112) и (117), као и тензор енергије-импулса (114) и једначина за торзију остају непромењене. Наравно, повећање конфигурационог простора значи да постоје додатне једначине кретања за два нова множитеља:

$$\theta^\alpha = -\tilde{N}_\beta{}^\alpha \alpha^\beta{}_\mu , \quad \rho_{\alpha\nu\rho\sigma} = e M_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^{\beta\mu} . \quad (119)$$

Као и до сада, и ове једначине су алгебарске и могу се заменити натраг у дејство чиме се добија стандардна теорија другог реда за Прокина поља.

Овим је закључена анализа реформулација Прокиног дејства заснованог на вишим градијентним теоријама. Облик сабирака у Прокиној вези (118) тачно одговара типу сабирака који се добијају у дејству за Стандардни модел након спонтаног нарушења симетрије електрослабе интеракције.

3.2.2 3BF дејство са везама за теорију електрослабих интеракција

Да би Хигсов механизам био спроведен на што једноставнији начин, поступак неће бити спроведен над целим дејством (22) већ само над електрослабим сектором и то без фермиона, који ће бити разматрани накнадно. Другим речима, одговарајући избор 3-групе је:

$$G = SO(3, 1) \times SU(2) \times U(1) , \quad H = \mathbb{R}^4 , \quad L = \mathbb{C}^4 . \quad (120)$$

Група G садржи Лоренцову подгрупу, подгрупу за слаб изоспин $SU(2)$ и подгрупу за слаб хипернабој $U(1)$. Група H остаје иста као до сада, описујући транслације, док је група L редукована тако да описује само дублет комплексних скаларних поља. Хомоморфизми δ и ∂ остају тривијални, као и Пајферово подизање $\{ _ , _ \}_{\text{pf}}$. Коначно, дејство групе је следеће. Група на саму себе делује коњугацијом, Лоренцова подгрупа делује на стандардан начин на групу H и тривијално на групу L , јер су све компоненте поља из групе L скаларна поља. Слаб изоспин и хипернабој делују тривијално на групу H , док делују нетривијално на групу

L . Да би ово дејство било експлицитно изражено, корисно је увести матричну репрезентацију генератора T_A групе L , као:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Даље, ако се генератори изоспина означе са τ_i ($i = 1, 2, 3$), и генератор хипернабоја са τ_0 , добија се:

$$\tau_\alpha \triangleright T_A = \triangleright_{\alpha A}{}^B T_B, \quad (122)$$

где индекси α узимају вредности из скупа $0, \dots, 3$, што једнообразно пребројава све генераторе (τ_0, τ_i) групе $SU(2) \times U(1)$. Коефицијенти су експлицитно дати као:

$$\begin{aligned} \triangleright_{0A}{}^B &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \triangleright_{1A}{}^B &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \triangleright_{2A}{}^B &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & \triangleright_{3A}{}^B &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (123)$$

Треба приметити да генератори $SU(2) \times U(1)$ задовољавају уобичајене комутационе релације

$$f_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, & \text{за } \alpha, \beta, \gamma \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (124)$$

Овим је фиксиран избор 3-групе. Даље, билинеарне форме су дефинисане на природан начин и за групе G и H су дефинисане као у (17) и (18), док је за групу L избор помало необичан:

$$g_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Ово је само привидно необично јер је базис у алгебри $\mathfrak{l}$ у облику

$$\phi \equiv \phi^A T_A \equiv \phi_+ T_1 + \phi_0 T_2 + \phi_+^\dagger T_3 + \phi_0^\dagger T_4 = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \\ \phi_+^\dagger \\ \phi_0^\dagger \end{pmatrix}. \quad (126)$$

Међутим, преласком у нови базис у алгебри $\mathfrak{l}$ датим са

$$\tilde{T}_1 = T_1 + T_3, \quad \tilde{T}_2 = iT_1 - iT_3, \quad \tilde{T}_3 = T_2 + T_4, \quad \tilde{T}_4 = iT_2 - iT_4, \quad (127)$$

се исти елемент алгебре може преписати у облику

$$\phi = \phi_1 \tilde{T}_1 + \phi_2 \tilde{T}_2 + \phi_3 \tilde{T}_3 + \phi_4 \tilde{T}_4, \quad (128)$$

где су $\phi_1, \dots, \phi_4$ реалне компоненте, и где постоји природна веза између коефицијената:

$$\phi_+ = \phi_1 + i\phi_2, \quad \phi_0 = \phi_3 + i\phi_4, \quad \phi_+^\dagger = \phi_1 - i\phi_2, \quad \phi_0^\dagger = \phi_3 - i\phi_4. \quad (129)$$

У базису $\tilde{T}_A$ је билинеарна форма (125) репрезентована дијагоналном јединичном матрицом. Базис $\tilde{T}_A$ је користан јер је својствен за билинеарну форму и у њему компоненте поља постају реалне, док је базис T_A користан јер је својствен за операторе слабог изоспина (његове једне компоненте) и слабог хипернабоја (а испоставиће се и оператор наелектрисања). У овом одсеку ће једначине бити записиване у оба базиса према потреби.

Треба уочити да се (128) може разумети као елемент 4-димензионалне реалне Лијеве алгебре $\mathfrak{l} = \mathbb{R}^4$, или као 2-димензионалне комплексне Лијеве алгебре $\mathfrak{l} = \mathbb{C}^2$ (која је имплицитно коришћена у највећем броју стандардних уџбеника о Хигсовом механизму). Са друге стране, (126) је елемент 4-димензионалне комплексне Лијеве алгебре $\mathfrak{l} = \mathbb{C}^4$, која је комплексификација $\mathbb{R}^4$. Како би прелазак из T_A базиса у $\tilde{T}_A$ базис и назад био што једноставнији, корисно је радити у комплексификованој $\mathfrak{l} = \mathbb{C}^4$ алгебри, због чега ово и јесте избор групе $L = \mathbb{C}^4$ у електрослабој 3-групи (120).

Након избора 3-групе и билинеарних форми, дејство за електрослабу теорију се може записати као:

$$S = S_{3BF} + S_{\text{grav}} + S_{\text{scal}} + S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{Higgs}} + S_{\text{CC}}. \quad (130)$$

Сличног је облика као (22), где су везе за фермионе изостављене. Билинеарна форма интеракционих константи је у $S_{\text{Yang-Mills}}$ дата са

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix}, \quad (131)$$

и има структуру $SU(2) \times U(1)$ групе.

3.2.3 Преглед Хигсовог механизма

Постоје три главна корака у спровођењу Хигсовог механизма:

- дискусија стабилног вакуума,
- увођење смене променљивих,
- фиксирање калибрације скаларних поља.

У циљу разумевања детаља Хигсовог механизма спроведеног над дејством (130), корисно је поновити ове главне кораке коришћењем нових променљивих и нотације.

Анализа стабилног вакуума је идентична анализи у случају уобичајеног Хигсовог механизма. Веза S_{Higgs} уводи потенцијал за скаларна поља у облику

$$V(\phi) = 2\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2, \quad (132)$$

и може се уочити да стабилан вакуум није јединствен, већ представља било коју тачку на 3-сфери $\phi^A \phi_A = v^2$ у конфигурационом простору. Да би дејство било записано у облику у ком сва поља имају вредност једнаку нули у тачки у конфигурационом простору која одговара

изабраном вакууму, потребно је увести смену променљивих из $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ у $(\phi_1, \phi_2, h, \phi_4)$, где је $h(x)$ ново скаларно поље добијено трансформацијом ϕ_3 за v :

$$\phi_3(x) = v + h(x). \quad (133)$$

Ово одговара избору тачке $(0, 0, v, 0)$ на 3-сфери за вакуум, према конвенцији. Наравно, ова конвенција је потпуно произвољна и ништа у остатку анализе не зависи од ње. Смена променљивих је дата у базису $\tilde{T}_A$, док у оригиналном базису T_A она гласи:

$$\phi^A = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \\ \phi_+^\dagger \\ \phi_0^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ v + h + i\phi_4 \\ \phi_1 - i\phi_2 \\ v + h - i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Коначно, на основу ове релације се може уочити да су компоненте ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4 суштински еквивалентне (у линеарном развоју) параметрима $\mathfrak{g}$ -градијентне трансформације

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{\xi^\alpha \tau_\alpha} \triangleright \phi. \quad (135)$$

Конкретно, коришћењем дејства (122) генератора алгебре $\mathfrak{g}$ на генераторе алгебре $\mathfrak{l}$, може се поћи од тренутног стања и избора параметара градијентне трансформације,

$$\phi^A = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \\ 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad \xi^\alpha(\phi^A) = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ 2\phi_2 \\ 2\phi_1 \\ -\phi_4 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\phi^2), \quad (136)$$

а потом, применом трансформације (135) на стање изнад, добити:

$$\phi'^A = e^{\xi^\alpha(\phi)\tau_\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \\ 0 \\ v + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ v + h + i\phi_4 \\ \phi_1 - i\phi_2 \\ v + h - i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Због тога је очигледно да се поља ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4 могу разумети као степени слободе фиксирања калибрације дати релацијом (136), па је јасно да је само поље h физичко, обзиром да се не може уклонити $\mathfrak{g}$ -градијентном трансформацијом.

Даље, може се уочити да и након уклањања поља ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4 коришћењем градијентне трансформације, стање ϕ^A у (136) и даље остаје очувано при дејству $U(1)$ подгрупе G . Ако се генератор ове групе означи са Q , једноставно је уочити из (123) да је услов стабилизације вакуума $Q \triangleright \phi = 0$ задовољен за

$$Q = \tau_0 + \tau_3. \quad (138)$$

Ова једначина је позната под називом Гел-Ман–Нишиџиминова формула (за електрослабе интеракције). Феноменолошки, Q одговара електромагнетном набоју q , конкретно q је својствена вредност оператора $-iQ$, и одговарајућа градијентна група стабилизатора $U(1)$ је градијентна група симетрије електродинимике. Из једначине стабилизатора је очигледно да Хигсово поље није наелектрисано, јер је својствено оператору $-iQ$ за својствену вредност $q = 0$.

Треба још једном нагласити да претходни резултати не зависе од избора вакуума $(0, 0, v, 0)$ на 3-сфери. Ако би уместо ове тачке била одабрана нека друга, разликовало би се једино

решење једначине стабилизатора $Q \triangleright \phi = 0$, али би се то решење увек могло записати у општем облику као:

$$Q = \tau_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}, \quad \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\vec{\alpha}\|^2 = 1. \quad (139)$$

Овде је $\vec{\tau}$ тројка (τ_1, τ_2, τ_3) . Међутим, набој Хигсовог поља и даље остаје једнак нули, јер је он последица једначине стабилизатора вакуума.

3.2.4 Трансформација дејства

Следећи корак је замена уведених смена у дејство и фиксирање калибрације применом градијентне трансформације која уклања компоненте поља ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4 ,

$$\phi^A \rightarrow (e^{-\xi} \triangleright \phi)^A = \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \\ 0 \\ v+h \end{pmatrix}, \quad (140)$$

где је $\xi \equiv \xi^\alpha \tau_\alpha$, а параметри ξ^α су дати у (136). У циљу испитивања шта се догађа са дејством (130), потребно је утврдити дејство градијентне трансформације на сва поља у дејству. Трансформације 3-конексија $(\alpha, \omega, \beta, \tilde{\gamma})$ су дате као:

$$\alpha' = e^{-\xi} (\alpha + d) e^\xi, \quad \omega' = \omega, \quad \beta' = \beta, \quad \tilde{\gamma}' = e^{-\xi} \triangleright \tilde{\gamma}. \quad (141)$$

Одговарајуће кривине се трансформишу према:

$$F' = e^{-\xi} F e^\xi, \quad R' = R, \quad \mathcal{G}' = \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}' = e^{-\xi} \triangleright \mathcal{H}. \quad (142)$$

Трансформације Лагранжевих множитеља који се појављују у тополошком делу дејства B_α , $B_{[ab]}$, e_a и ϕ^A , су дате са:

$$B'_\alpha = (e^{-\xi} B e^\xi)_\alpha, \quad B'_{[ab]} = B_{[ab]}, \quad e'_a = e_a, \quad (143)$$

док је трансформација ϕ^A већ одређена у (140). Даље, Лагранжеви множитељи из алгебре $\mathfrak{g}$ који се појављују у везама λ_α , $\lambda_{[ab]}$, $M_{\alpha ab}$ и $\zeta_{\alpha ab}$, се трансформишу као:

$$\lambda'_\alpha = (e^{-\xi} \lambda e^\xi)_\alpha, \quad \lambda'_{[ab]} = \lambda_{[ab]}, \quad M'_{\alpha ab} = (e^{-\xi} M e^\xi)_{\alpha ab}, \quad \zeta'_{\alpha ab} = (e^{-\xi} \zeta e^\xi)_{\alpha ab}. \quad (144)$$

Лагранжеви множитељи из алгебре $\mathfrak{l}$ који се појављују у везама $\tilde{\lambda}_A$, Λ_{abA} и H_{abcA} , се трансформишу:

$$\tilde{\lambda}'_A = (e^{-\xi} \triangleright \tilde{\lambda})_A, \quad \Lambda'_{abA} = (e^{-\xi} \triangleright \Lambda)_{abA}, \quad H'_{abcA} = (e^{-\xi} \triangleright H)_{abcA}. \quad (145)$$

Коначно, везе садрже коваријантни извод $\nabla \phi$, који се трансформише као

$$(\nabla \phi)' = e^{-\xi} \triangleright (\nabla \phi), \quad (146)$$

што је и очекивано.

Додатно, дејство садржи и билинеарну форму интеракционих константи, $C_{\alpha\beta}$, дату са (131). Може се уочити да је она већ део по део пропорционална већ уведеној билинеарној форми $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{g}}$, на следећи начин:

$$C_{\alpha\beta} = \mathcal{C}(\tau_\alpha, \tau_\beta) \equiv \frac{\delta_\alpha^j \delta_\beta^k}{g_1^2} \langle \tau_j, \tau_k \rangle_{\mathfrak{g}} + \frac{\delta_\alpha^0 \delta_\beta^0}{g_0^2} \langle \tau_0, \tau_0 \rangle_{\mathfrak{g}}. \quad (147)$$

Два сабирка у суми одговарају билинеарним формама $\langle _ , _ \rangle_{\text{su}(2)}$ и $\langle _ , _ \rangle_{\text{u}(1)}$, редом. Будући да се градијентна трансформација може представити у облику $e^{-\xi^i \tau_i} \times e^{-\xi^0 \tau_0}$, захваљујући директном производу у структури групе $SU(2) \times U(1)$, сваки чинилац у градијентној трансформацији оставља одговарајућу билинеарну форму инваријантном,

$$\langle e^{-\xi^i \tau_i} \triangleright \tau_j, e^{-\xi^i \tau_i} \triangleright \tau_k \rangle_{\text{su}(2)} = \langle \tau_j, \tau_k \rangle_{\text{su}(2)}, \quad \langle e^{-\xi^0 \tau_0} \triangleright \tau_0, e^{-\xi^0 \tau_0} \triangleright \tau_0 \rangle_{\text{u}(1)} = \langle \tau_0, \tau_0 \rangle_{\text{u}(1)}, \quad (148)$$

као последицу постулиране G -инваријантности билинеарне форме $\langle _ , _ \rangle_g$. Ово имплицира да билинеарна форма константи интеракције такође мора да буде инваријантна на градијентне трансформације:

$$C'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}. \quad (149)$$

Сада је могуће испитати трансформацију целог дејства у односу на (140). Конкретно, дејство (130) је функционал свих горе поменутих поља,

$$\alpha^\alpha, \omega^{[ab]}, \beta^a, \tilde{\gamma}^A, B_\alpha, B_{[ab]}, e_a, \lambda_\alpha, \lambda_{[ab]}, M_{\alpha ab}, \zeta_{\alpha ab}, \tilde{\lambda}_A, \Lambda_{abA}, H_{abcA}, \phi^A, \quad (150)$$

или другим речима, горе наведена листа поља дефинише цео кинематички конфигурациони простор дејства. Међутим, нису сви сабирци у дејству функције поља ϕ^A . Због тога трансформација (140) делује тривијално на сабирке који су независни од ϕ^A , док се сабирци зависни од ϕ^A трансформишу нетривијално, редукујући конфигурациони простор на мањи, дефинисан над пољима

$$\alpha^\alpha, \omega^{[ab]}, \beta^a, \tilde{\gamma}^A, B_\alpha, B_{[ab]}, e_a, \lambda_\alpha, \lambda_{[ab]}, M_{\alpha ab}, \zeta_{\alpha ab}, \tilde{\lambda}_A, \Lambda_{abA}, H_{abcA}, h, \quad (151)$$

која се од почетног скупа разликују за смену $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4) \rightarrow (0, 0, v + h, 0)$. Задатак се сада своди на одређивање облика дејства $\tilde{S}$ које је дефинисано на редуктованом конфигурационом простору, шематски дефинисано трансформацијом:

$$S[\dots, \phi^A] \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}[\dots, h] \equiv S[\dots, \phi^A] \Big|_{\substack{\phi^1=\phi^2=\phi^4=0 \\ \phi^3=v+h}}. \quad (152)$$

Може се одмах уочити да се сабирци S_{grav} , $S_{\text{Yang-Mills}}$ и S_{CC} трансформишу тривијално јер не зависе од поља ϕ :

$$S_{\text{grav}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{grav}} = S_{\text{grav}}, \quad S_{\text{Yang-Mills}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{Yang-Mills}} = S_{\text{Yang-Mills}}, \quad S_{\text{CC}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{CC}} = S_{\text{CC}}. \quad (153)$$

Штавише, $2BF$ парче од S_{3BF} сабирка се такође трансформише тривијално из истог разлога.

Са друге стране, трећи сабирак у S_{3BF} делу, као и S_{scal} и S_{Higgs} захтевају више пажње. За почетак, S_{Higgs} сабирак је облика

$$S_{\text{Higgs}} = - \int \frac{1}{4!} V(\phi) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (154)$$

па деловањем (152) Хигсов потенцијал $V(\phi)$ (see (132)) постаје

$$V(\phi) \xrightarrow{e^{-\xi}} V(h) \equiv 8v^2 \chi h^2 + 8v \chi h^3 + 2\chi h^4. \quad (155)$$

Због тога је очигледно да важи

$$S_{\text{Higgs}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{Higgs}} = - \int \frac{1}{4!} V(h) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \quad (156)$$

Из облика квадратичног члана у резултујућем потенцијалу (155) и општег облика масеног члана за једно скаларно поље (90), може се закључити да је маса Хигсовог поља:

$$m = 2v\sqrt{2\chi}. \quad (157)$$

Облик потенцијала се може изабрати и на другачији начин у односу на (132), на пример

$$V_{\text{alt}}(\phi) = 2\chi (\phi^A \phi_A)^2 - 4\chi v^2 \phi^A \phi_A. \quad (158)$$

Овај потенцијал се разликује од (132) за константан сабирак $2\chi v^4$, који се онда савере са S_{CC} и даје другачију вредност космолошке константе. Међутим, потенцијал (132) не генерише додатни сабирак, па CC сабирак у дејству остаје исти након спонтаног нарушења симетрије.

Следећи сабирак је S_{3BF} члан. Само последњи сабирак у S_{3BF} зависи од поља ϕ , док остатак не зависи и може се означити са S_{2BF} . Затим, коришћењем одговарајуће промене базиса $T_A \rightarrow \tilde{T}_A$ у Лијевој алгебри $\mathfrak{l}$ (погледати (127)), са додатном нотацијом за индексе $A \rightarrow (\bar{A}, H)$ где је $\bar{A} \in \{1, 2, 4\}$ и $H \equiv 3$, добија се

$$\begin{aligned} S_{3BF} &= S_{2BF} + \int \phi^A \nabla \tilde{\gamma}_A \xrightarrow{e^{-\xi}} S_{2BF} + \int (v + h) ((\nabla \tilde{\gamma})_0 + (\nabla \tilde{\gamma})_{0^\dagger}) \\ &= S_{2BF} + \int (v + h) \left(d\tilde{\gamma}_H + \triangleright_{\alpha}^{\bar{A}} \alpha^\alpha \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}} \right) \\ &= S_{2BF} + \int h d\tilde{\gamma}_H + v d\tilde{\gamma}_H + (v + h) \triangleright_{\alpha}^{\bar{A}} \alpha^\alpha \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}} \\ &= \tilde{S}_{3BF} + \int v d\tilde{\gamma}_H + (v + h) \triangleright_{\alpha}^{\bar{A}} \alpha^\alpha \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}}, \end{aligned} \quad (159)$$

где је ново дејство $\tilde{S}_{3BF}$ дефинисано као функционал над пољима из редукованог конфигурационог простора (151) као

$$\tilde{S}_{3BF} = S_{2BF} + \int h d\tilde{\gamma}_H. \quad (160)$$

У наредном одељку ће бити дискутована његова одговарајућа 3-група. Коначно, може се закључити да важи

$$S_{3BF} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{3BF} + \int v d\tilde{\gamma}_H + (v + h) \triangleright_{\alpha}^{\bar{A}} \alpha^\alpha \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}}, \quad (161)$$

где ће додатни чланови бити груписани заједно са другим додатним члановима из преосталих делова дејства и дискутовани заједно.

У једначинама (159), (160) и (161) је коришћен базис (127) у Лијевој алгебри $\mathfrak{l}$, тако да се мође увести $\tilde{\gamma}_H \equiv \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\gamma}_{0^\dagger}$. Дејство $\triangleright$ је било репрезентовано матрицама (123) у оригиналном базису T_A , који је сада подељен на следеће компоненте:

$$\triangleright_{\alpha H}^{\bar{A}}, \quad \triangleright_{\alpha \bar{A}}^H, \quad \triangleright_{\alpha \bar{A}}^{\bar{B}}, \quad \triangleright_{\alpha H}^H. \quad (162)$$

Пошто је билинеарна форма g_{AB} у овом базису дијагонална, и заправо једнака $g_{AB} = \delta_{AB}$, према теорему 1 са почетка ове главе, дијагонални елементи свих ових компонената морају да буду једнаки нули. Конкретно, $\triangleright_{\alpha H}^H = 0$, што даље имплицира да је $\nabla \tilde{\gamma}_H \equiv d\tilde{\gamma}_H$ и оправдава идентификацију (160). Штавише, компоненте $\triangleright_{\alpha \bar{A}}^{\bar{B}}$ не фигуришу у једначинама (159), (160) и

(161) и не појављују се нигде. То значи да су једине релевантне компоненте оне које се могу изразити у матричном облику као:

$$\triangleright_{\alpha H}^{\bar{A}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \triangleright_{\alpha \bar{A}}^H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (163)$$

Треба уочити да је овде α индекс који пребројава врсте, а $\bar{A}$ индекс који пребројава колоне, док је индекс $H \equiv 3$ константан.

Коначно, последњи сабирак у дејству је S_{scal} , који има почетни облик

$$S_{\text{scal}} = \int \tilde{\lambda}^A \wedge (\tilde{\gamma}_A - H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \Lambda^{abA} \wedge H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \Lambda^{abA} \wedge (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b, \quad (164)$$

и слично као S_{3BF} , зависи од ϕ^A само у последњем сабирку, док је остатак независан од ϕ^A . Раздвајање индекса A на $(\bar{A}, H)$, сабирак се трансформише у:

$$\begin{aligned} S_{\text{scal}} \xrightarrow{e^{-\xi}} & \int \tilde{\lambda}^H \wedge (\tilde{\gamma}_H - H_{abcH} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \Lambda^{abH} \wedge H_{abcH} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f \\ & - \Lambda^{abH} \wedge dh \wedge e_a \wedge e_b + \tilde{\lambda}^{\bar{A}} \wedge (\tilde{\gamma}_{\bar{A}} - H_{abc\bar{A}} e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\ & + \Lambda^{ab\bar{A}} \wedge H_{abc\bar{A}} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \Lambda^{ab\bar{A}} \wedge \alpha^\alpha \triangleright_\alpha^H \tilde{\lambda}_{\bar{A}}(v + h) \wedge e_a \wedge e_b. \end{aligned} \quad (165)$$

Треба уочити да први ред са десне стране заједно са првим сабирком у другом реду одговара тачно скаларној вези за једно реално скаларно поље, као функционал на редукованом конфигурационом простору (151). Ова веза се може означити са $\tilde{S}_{\text{scal}}$, па за цео израз важи:

$$\begin{aligned} S_{\text{scal}} \xrightarrow{e^{-\xi}} & \tilde{S}_{\text{scal}} + \int \tilde{\lambda}^{\bar{A}} \wedge (\tilde{\gamma}_{\bar{A}} - H_{abc\bar{A}} e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\ & + \Lambda^{ab\bar{A}} \wedge H_{abc\bar{A}} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f \\ & - \Lambda^{ab\bar{A}} \wedge \alpha^\alpha \triangleright_\alpha^H \tilde{\lambda}_{\bar{A}}(v + h) \wedge e_a \wedge e_b, \end{aligned} \quad (166)$$

Где ће поново додатни сабирци бити груписани са осталим додатним сабирцима из дејства.

Након разматрања свих делова дејства (130) појединачно, при деловању трансформације (152), сви делови се могу поново сабрати и упоредити са дејством за масено скаларно поље и Прокина поља. Међутим, да би поређење било што једноставније, корисно је увести још нове нотације. Конкретно, може се увести билинеарна форма $\kappa^{\alpha\beta}$ која задовољава следећи идентитет:

$$\kappa^{\alpha\beta} \triangleright_{\alpha H}^{\bar{A}} \triangleright_{\beta \bar{B}}^H = -\frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}}. \quad (167)$$

Избор ове билинеарне форме није јединствен. Конкретно, будући да су матрице (163) ранга 3, постоји пројектор P_α^β који задовољава

$$P_\alpha^\beta P_\beta^\gamma = P_\alpha^\gamma, \quad P_\alpha^\alpha = 3, \quad P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}, \quad P_\alpha^\beta \triangleright_{\beta H}^{\bar{A}} = \triangleright_{\alpha H}^{\bar{A}}. \quad (168)$$

Треба уочити да пројектор (168) такође задовољава идентитет $P_\alpha^\beta \triangleright_{\beta \bar{A}}^H = \triangleright_{\alpha \bar{A}}^H$, јер $\triangleright_{\alpha \bar{A}}^H$ садржи исте компоненте као $\triangleright_{\alpha H}^{\bar{A}}$ до на знак минус, погледати (163). Због тога је билинеарна форма $\kappa^{\alpha\beta}$ дефинисана до на сабирак у облику

$$\kappa^{\alpha\beta} \rightarrow \kappa^{\alpha\beta} + [\delta_\gamma^{(\alpha} - P_\gamma^{(\alpha}] A^{\beta)\gamma}, \quad (169)$$

где је $A^{\alpha\beta}$ произвољна матрица, док заграде око индекса означавају симетризацију. Може се уочити да је израз у загради ортогонални пројектор који пресликава у језгро матрице (163). Ова произвољност гарантује да се билинеарна форма $\kappa^{\alpha\beta}$ може изабрати тако да буде инвертибилна. Пројектор P_α^β се може директно одредити из дефиниције (168) и матрица (163), док се један конкретан избор билинеарне форме $\kappa^{\alpha\beta}$ може добити из (167), тако да могу да буду записани у матричној форми као:

$$P_\alpha^\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (170)$$

Додатно, осим пројектора и $\kappa^{\alpha\beta}$, се могу увести и додатне величине:

$$\theta^\alpha \equiv -2\kappa^{\alpha\beta} \triangleright_\beta^H \tilde{\lambda}^{\bar{A}}, \quad \Theta^{\alpha ab} \equiv -2\kappa^{\alpha\beta} \triangleright_\beta^H \tilde{\lambda}^{\bar{A}} \Lambda^{ab\bar{A}}, \quad \rho_\alpha \equiv 2\triangleright_\alpha^{\bar{A}} H \tilde{\gamma}_{\bar{A}}, \quad \Xi_{\alpha abc} \equiv 2\triangleright_\alpha^{\bar{A}} H H_{abc\bar{A}}. \quad (171)$$

Ове четири величине задовољавају четири фундаментална идентитета,

$$\theta^\alpha \wedge \rho_\alpha = \tilde{\lambda}^{\bar{A}} \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}}, \quad \theta^\alpha \Xi_{\alpha abc} = \tilde{\lambda}^{\bar{A}} H_{abc\bar{A}}, \quad \Theta^{\alpha ab} \wedge \rho_\alpha = \Lambda^{ab\bar{A}} \wedge \tilde{\gamma}_{\bar{A}}, \quad \Theta^{\alpha ab} \Xi_{\alpha cde} = \Lambda^{ab\bar{A}} H_{cde\bar{A}}, \quad (172)$$

који су директна последица идентитета (167). Сврха увођења ових величина је у томе да се помоћу њих могу елиминисати $\bar{A}$ индекси из једначина. Треба уочити да је и у дефиницијама (171) и у идентитетима (172) сумирано по индексима $\bar{A}$ са десне стране, док се они уопште не појављују са леве стране.

Важно је нагласити да произвољност $\kappa^{\alpha\beta}$ у (169) уводи промене у дејству. Ово је у вези са чињеницом да смена променљивих (171) уводи додатне променљиве које не постоје у оригиналном дејству. Захтев да ове додатне променљиве не постоје, односно да на левој страни идентитета (172) постоји исти број компонената као на десној страни, редукује произвољност (169) билинеарне форме $\kappa^{\alpha\beta}$ која сада има облик:

$$\kappa^{\alpha\beta} \rightarrow \kappa^{\alpha\beta} + \left[\delta_\gamma^\alpha - P_\gamma^\alpha \right] A^{\gamma\delta} \left[\delta_\delta^\beta - P_\delta^\beta \right]. \quad (173)$$

Важно је нагласити и да је и након овог захтева могуће изабрати инвертибилну билинеарну форму $\kappa^{\alpha\beta}$, док је само дејство инваријантно на промену билинеарне форме (173), што значи да теорија не зависи од тог избора. Видети Додатак A.2 за детаљнију анализу и доказ.

Након увођења нових величина и нотације се може наставити са анализом дејства. За дату трансформацију (152) дејства (130), могу се применити дефиниције (171) и идентитети (172) како би се елиминисали сви индекси $\bar{A}, \bar{B}$, а трансформисано дејство $\tilde{S}$ постало функционал над редукованим конфигурационим простором (151). Састављањем резултата (153), (156), (161) и (166), добија се пун облик дејства:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & S_{\text{grav}} + S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{CC}} + \tilde{S}_{\text{Higgs}} + \tilde{S}_{\text{3BF}} + \tilde{S}_{\text{scal}} \\ & + \int \Theta^{\alpha ab} \wedge \left(\Xi_{\alpha abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f + \frac{v}{2} \kappa_{\alpha\beta}^{-1} P_\gamma^\beta \alpha^\gamma \wedge e_a \wedge e_b \right) \\ & + \int \frac{v}{2} \alpha^\alpha P_\alpha^\beta \wedge \rho_\beta + \theta^\alpha \wedge (\rho_\alpha - \Xi_{\alpha abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\ & + \frac{1}{2} \int h \alpha^\alpha P_\alpha^\beta \wedge (\rho_\beta - \kappa_{\beta\gamma}^{-1} \Theta^{\gamma ab} \wedge e_a \wedge e_b) + v \int d\tilde{\gamma}_H. \end{aligned} \quad (174)$$

Овај облик дејства је сада упоредив са дејством за Прокино поље (102). Специјално, други и трећи ред у (174) се могу упоредити да са Прокином везом у (118). Упоредивање слободних параметара члан по члан даје идентификацију слободних параметара у Прокином дејству на следећи начин:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{v}{2} \kappa_{\alpha\gamma}^{-1} P_{\beta}^{\gamma}, \quad \tilde{N}_{\alpha}^{\beta} = \frac{v}{2} P_{\alpha}^{\beta}. \quad (175)$$

Коришћењем ових израза, може се конструисати матрица квадрата маса (115) и добити

$$M^{\alpha}_{\beta} = \frac{v^2}{4} (C^{-1})^{\alpha\gamma} P_{\gamma}^{\delta} \kappa_{\delta\epsilon}^{-1} P_{\beta}^{\epsilon}, \quad (176)$$

где је билинеарна форма интеракционих константи $C_{\alpha\beta}$ дефинисана у (131), док су пројектор и билинеарна форма $\kappa^{\alpha\beta}$ дати у (170). На основу тога се за матрицу квадрата маса добија:

$$M^{\alpha}_{\beta} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_0^2 & 0 & 0 & -g_0^2 \\ 0 & g_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1^2 & 0 \\ -g_1^2 & 0 & 0 & g_1^2 \end{pmatrix}. \quad (177)$$

Физички релевантан базис у Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ је онај у којем је матрица квадрата маса дијагонална, а одговарајуће својствене вредности могуће интерпретирати као квадрате маса векторских бозона у том базису. Будући да су прва и последња колона у (177) пропорционалне, детерминанта матрице је једнака нули, па је бар једна њена својствена вредност једнака нули. Штавише, матрица је већ у блок-дијагоналној форми, са два једнодимензионална блока g_1^2 , одакле се моће закључити да су те две својствене вредности једнаке $v^2 g_1^2 / 4$. Коначно, из трага матрице се може добити и четврта својствена вредност, па је цео масени спектар дат са:

$$M_1^2 = 0, \quad M_2^2 = \frac{v^2}{4} g_1^2, \quad M_3^2 = \frac{v^2}{4} g_1^2, \quad M_4^2 = \frac{v^2}{4} (g_0^2 + g_1^2). \quad (178)$$

Чињеница да су својствене вредности M_2^2 и M_3^2 једнаке имплицира да својствени базис није једнозначно одређен, и да је потребно додати још специјалније захтеве. Природни избор ових захтева је да базис, осим за матрицу квадрата маса буде својствен и за стабилизатор Q , уведен у (138), будући да он представља електрични набој, чија би вредност требала да буде добро дефинисана за сва описана физичка стања у преферираном базису. Стабилизатор се у ту сврху може изразити у матричном облику Q_{α}^{β} , дефинисан дејством Q на базисни вектор τ_{α} :

$$Q \triangleright \tau_{\alpha} = Q_{\alpha}^{\beta} \tau_{\beta}. \quad (179)$$

Коришћењем (138) се једноставно добија да су компоненте матрице Q_{α}^{β}

$$Q_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (180)$$

Ова матрица има својствене вредности $(0, i, -i, 0)$, што значи да оператор наелектрисања $-iQ$ има својствене вредности:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = +1, \quad q_3 = -1, \quad q_4 = 0. \quad (181)$$

Стабилизатор такође има две исте својствене вредности, па ни његов својствени базис није једнозначно одређен. У сваком случају, матрица квадрата маса и стабилизатор међусобно комутирају, па имају заједнички својствени базис и овај својствени базис је једнозначно одређен. Нови својствени базис се може изразити преко старог,

$$\tau_A = \tau_0 + \tau_3, \quad \tau_+ = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{\sqrt{2}}, \quad \tau_- = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{\sqrt{2}}, \quad \tau_Z = -\frac{g_0^2}{g_0^2 + g_1^2}\tau_0 + \frac{g_1^2}{g_0^2 + g_1^2}\tau_3, \quad (182)$$

и могу се изразити компоненте 1-форме конекције $\alpha = \alpha^\mu_\mu dx^\mu \otimes \tau_\alpha$ у новом базису као:

$$A_\mu = \frac{g_1^2}{g_0^2 + g_1^2}\alpha^0_\mu + \frac{g_0^2}{g_0^2 + g_1^2}\alpha^3_\mu, \quad W_\mu^+ = \frac{\alpha^1_\mu - i\alpha^2_\mu}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^- = \frac{\alpha^1_\mu + i\alpha^2_\mu}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu = -\alpha^0_\mu + \alpha^3_\mu. \quad (183)$$

Овде је такође уведена традиционална нотација за векторске бозоне. Електромагнетни набоји добијена четири бозона су већ уграђени у нотацију, док се њихове масе могу прочитати из (178):

$$M_A = 0, \quad M_{W^\pm} = \frac{v}{2}g_1, \quad M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_0^2 + g_1^2}. \quad (184)$$

У новом базису су матрица квадрата маса и матрица стабилизатора дијагонални, док су билинеарна форма $g_{\alpha\beta}$ и билинеарна форма интеракционих константи $C_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{g_1^2 - g_0^2}{g_1^2 + g_0^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g_1^2 - g_0^2}{g_1^2 + g_0^2} & 0 & 0 & \frac{g_1^4 + g_0^4}{(g_1^2 + g_0^2)^2} \end{pmatrix}, \quad C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{g_0^2 + g_1^2}{g_0^2 g_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_0^2 + g_1^2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{g_A^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_W^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_W^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_Z^2} \end{pmatrix}. \quad (185)$$

Упоредивањем са дејством у (174), очигледно је да други и трећи ред представљају Прокину везу, па је коначно дејство у облику:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & S_{\text{grav}} + S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{CC}} + \tilde{S}_{\text{Higgs}} + \tilde{S}_{3BF} + \tilde{S}_{\text{scal}} + S_{\text{Proca}} \\ & + \frac{1}{2} \int h \alpha^\alpha P_\alpha^\beta \wedge (\rho_\beta - \kappa_{\beta\gamma}^{-1} \Theta^{\gamma ab} \wedge e_a \wedge e_b) + v \int d\tilde{\gamma}_H. \end{aligned} \quad (186)$$

Први ред у дејству садржи сабирак који описује једно реално скаларно поље h (Хигсово поље) масе $m = 2v\sqrt{2}\chi$, и четири векторска бозона са масама датим у (184), спрегнутих са гравитацијом и међусобно. Први сабирак у другом реду описује интеракцију између Хигсовог поља и векторских бозона, тако да су све интеракције еквивалентне са интеракцијама у стандардној електрослабој теорији. Други сабирак у другом реду је гранични члан и као такав не утиче на једначине кретања у теорији.

3.2.5 Спонтано нарушење 3-групе симетрије и масени спектар фермиона

Да би анализа претходних резултата била комплетна, потребно је дати одговор на још два питања. Прво питање је шта се догађа са структуром 3-групе у процесу спонтаног нарушења симетрије. Конкретно, полазни 2-укрштени модул који одговара теорији електрослабих интеракција, је заснован на избору група у (120):

$$G = SO(3, 1) \times SU(2) \times U(1), \quad H = \mathbb{R}^4, \quad L = \mathbb{C}^4. \quad (187)$$

Међутим, након анализе и спровођења Хигсовог механизма, резултујућем дејству (186) више не одговара овај 2-укрштени модул. Уместо њега, једноставно је учити, одговара 2-укрштени модул заснован на следећем избору група:

$$G = SO(3, 1) \times SU(2) \times U(1), \quad H = \mathbb{R}^4, \quad L = \mathbb{R}. \quad (188)$$

Овде постоје два детаља која треба нагласити. Први, да је група L редукована тако да уместо да описује четири комплексна скаларна поља, сада описује једно реално скаларно поље. Ово је директна последица спонтаног нарушења симетрије, конкретно, градијентне трансформације (140) која је примењена да би се уклонила поља ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4 . Трансформација је довела до редукције конфигурационог простора остављајући само једно реално скаларно поље h у дејству. Нови облик, редукованог конфигурационог простора је конзистентан са новим избором (188) 2-укрштеног модула, који одговара тополошком $3BF$ дејству (160), добијеном фиксирањем калибрације почетног $3BF$ дејства заснованом на 2-укрштеном модулу (187).

Други детаљ се тиче групе G . Формално, група G у финалном 2-укрштеном модулу је остала иста као што је била у иницијалном 2-укрштеном модулу. Међутим, као што је показано у поглављу о експлицитном нарушењу симетрије, Прокина веза нарушава G групу симетрије, и она је једина веза која то ради. Због тога, иако тополошки $3BF$ део почетног и крајњег дејства има исти BF сабирак и исте 1-форме конекције које следе из групе G , присуство Прокине везе нарушава групу симетрије G на њену подгрупу $SO(3, 1) \times U(1)$, док почетно дејство није садржало Прокину везу и група G није била нарушена. Коначан резултат је такав да крајње дејство има нарушену G симетрију иако је засновано на 2-укрштеном модулу (188) који садржи целу групу G , што је последица присуства Прокине везе.

Друго питање на које треба одговорити је шта се дешава са целим Стандардним Моделом (22) током процеса спонтаног нарушења симетрије. Конкретно у овом поглављу, у његовим претходним деловима, да би анализа била што једноставнија, проучавано је спонтано нарушење симетрије и Хигсов механизам само у специјалном случају теорије електрослабих интеракција. У сваком случају, једноставно је додати преостале три везе S_{Dirac} , S_{Yukawa} , и S_{spin} , као и одговарајући $\langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_I$ сабирак за фермионе и добити дејство за цео Стандардни Модел. Резултат спровођења процедуре спонтаног нарушења симетрије и Хигсовог механизма на оваквом дејству је исти као и у случају електрослабе теорије, до на одговарајуће сабирке који одговарају фермионима и додатној $SU(3)$ градијентној симетрији (која остаје ненарушена јер не учествује у Хигсовом механизму). Сабирци $\langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_I$ за фермионе су једнаки

$$\langle D_f \wedge \mathcal{H}_f \rangle_I \equiv \bar{\psi}_A (\vec{\nabla} \gamma)^A - (\bar{\gamma} \vec{\nabla})_A \psi^A, \quad (189)$$

и трансформишу се тривијално у односу на (152) као и везе S_{Dirac} и S_{spin} :

$$\begin{aligned} \langle D_f \wedge \mathcal{H}_f \rangle_I &\xrightarrow{e^{-\xi}} \langle \tilde{D}_f \wedge \tilde{\mathcal{H}}_f \rangle_I = \langle D_f \wedge \mathcal{H}_f \rangle_I, \\ S_{\text{Dirac}} &\xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{Dirac}} = S_{\text{Dirac}}, \quad S_{\text{spin}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{spin}} = S_{\text{spin}}. \end{aligned} \quad (190)$$

Једина веза која се не трансформише тривијално је веза за Јукавин потенцијал S_{Yukawa} , и она се дели на два сабирка:

$$\begin{aligned} S_{\text{Yukawa}} &= - \int \frac{2}{4!} Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\xrightarrow{e^{-\xi}} - \frac{1}{12} \int v Y_{ABH} \bar{\psi}^A \psi^B \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{12} \int Y_{ABH} \bar{\psi}^A \psi^B h \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \end{aligned} \quad (191)$$

где први сабирак у другом реду одговара вези за масу Диракових поља (93), док је други сабирак нова веза за Јукавин потенцијал $\tilde{S}_{\text{Yukawa}}$, и описује интеракцију између фермиона и Хигсовог поља h . Упоредивањем првог сабирка са везом за масу Диракових поља, закључује се да константе Јукавине интеракције Y_{ABH} јесу пропорционалне масеној матрици фермиона

$$M_{AB} = vY_{ABH} , \quad (192)$$

која се састоји од правих маса фермиона и одговарајућих углова мешања. Коначни облик трансформисане везе за Јукавиним потенцијалом постаје:

$$S_{\text{Yukawa}} \xrightarrow{e^{-\xi}} \tilde{S}_{\text{Yukawa}} - \frac{1}{12} \int M_{AB} \bar{\psi}^A \psi^B \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \tilde{S}_{\text{Yukawa}} + S_{\text{Dirac mass}} . \quad (193)$$

Сада је показано да се Хигсов механизам описан на примеру теорије електрослабих интеракција може уопштити на цео Стандардни Модел (22).

Овиме је закључена анализа Хигсовог механизма и спонтаног нарушења симетрије 3BF дејства са везама. Укратко, резултати Хигсовог механизма су исти као и у стандардној тензорској формулацији Лагранжијана за Стандардни Модел, али су процедура и технички детаљи потпуно другачији, будући да је 3BF дејство функционал на потпуно различитом конфигурационом простору у односу на стандардно дејство за Стандардни Модел.

4 Веза између формулација квантне Ајнштајн-Картанове и 3BF теорије са везама

У претходној глави је показана еквиваленција између класичне 3BF теорије са везама и Стандардног модела спрегнутог са Ајнштајн-Картановом гравитацијом. Иако су ове две теорије класично еквивалентне, њиховом квантизацијом се потенцијално могу добити различите квантне теорије. У овој глави ће бити успостављена веза између очекиваних вредности опсервабли у две квантне теорије, демонстрирајући да теорије нису потпуно еквивалентне на квантном нивоу, али да постоји добро дефинисана веза између њих. Након тога, у последњем поглављу ће бити разматрани примери на којима се може илустровати разлика у квантним теоријама.

4.1 Квантне опсервабле

Процес конструкције квантне теорије захтева уопштавање математичких резултата везаних за вишеструке интеграле по реалним и Грасмановим бројевима на одговарајуће функционалне интеграле по бозонским и фермионским пољима. Због тога је у првом одељку дат преглед интеграла који ће бити уопштени до функционалног нивоа. У другом одељку ће ови интегрални бити примењени на дефиницију очекиване вредности произвољне опсервабле у квантној 3BF теорији, корак по корак, тако да резултат добијен на крају процедуре може да се интерпретира као очекивана вредност везом придружене опсервабле у квантној ЕСС теорији. На овај начин ће бити конструисана потпуна непертурбативна веза између две квантне теорије.

4.1.1 Математички резултати

У овом одељку ће бити изложена укупно четири уопштења особина Диракове делте, у неколико специјалних случајева, као и идентитет повезан са Стоксовом теоремом. Идентитети се могу поделити у две групе, бозонску и фермионску. Два бозонска идентитета се могу добити уопштавањем следећих особина Диракове делте на бозонска поља. Први идентитет је

$$\int_{\mathbb{R}} dy e^{iyF} = 2\pi \delta(F), \quad F \in \mathbb{R}, \quad (194)$$

на основу ког се може добити следећи вишеструки интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}^n} dx_k H(x_k) e^{i(yF(x_k) + G(x_k))} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} dx_k H(x_k) \delta(F(x_k)) e^{iG(x_k)}. \quad (195)$$

Потом се, уопштењем овог резултата на ниво функционалног интеграла, добија:

$$\int D\varphi D\phi_k H(\phi_k) e^{i \int (\varphi \wedge F(\phi_k) + G(\phi_k))} = \mathcal{N} \int D\phi_k H(\phi_k) \delta(F(\phi_k)) e^{i \int G(\phi_k)}. \quad (196)$$

Други потребан идентитет је:

$$\int_{\mathbb{R}} dy \delta(yF - G) H(y) = \frac{H(G/F)}{|F|}, \quad F, G \in \mathbb{R}, \quad (197)$$

који се може једноставно доказати сменом променљивих. Одговарајући вишеструки интеграл је

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}^n} dx_k \delta(y^{aB} F_B^A(x_k) - G^{aA}(x_k)) H(y, x_k) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_k \frac{H(G^{aB}(x_k) F^{-1}_B{}^A(x_k), x_k)}{|F(x_k)|^{|a|}}, \quad (198)$$

док је уопштење на ниво функционалног интеграла дато са:

$$\int D\varphi D\phi_k \delta(\varphi^{aB} F_B^A(\phi_k) - G^{aA}(\phi_k)) H(\varphi, \phi_k) = \int D\phi_k \frac{1}{|F(\phi_k)|^{|a|}} H(G^{aB}(\phi_k) F^{-1}_B{}^A(\phi_k), \phi_k), \quad (199)$$

где су $F_B^A(\phi_k)$ произвољна инвертибилна матрична функција, $G^{aA}(\phi_k)$ и $H(\varphi, \phi_k)$ произвољне функције, и $|a|$ означава број могућих вредности индекса a .

Даље, идентитет у вези са Стоксовом теоремом

$$\begin{aligned} \int D\varphi D\phi_k H(\varphi, \phi_k) e^{i \int (\nabla \varphi) \wedge E(\phi_k) + \varphi \wedge F(\phi_k) + G(\phi_k)} \\ = \int D\varphi D\phi_k \delta \varphi \wedge E(\phi_k) e^{i \int (-1)^{p-1} \varphi \wedge \nabla E(\phi_k) + \varphi \wedge F(\phi_k) + G(\phi_k)}, \end{aligned} \quad (200)$$

који подједнако важи и за бозонска и за фермионска поља. Овде је претпостављено да је φ p -форма, док су φ_∂ и $\phi_{k\partial}$ вредности поља на граници интеграције. Треба нагласити да је главна сврха овог идентитета пребацивање дејства коваријантног извода ∇ са φ на $E(\phi_k)$.

Коначно, два фермионска идентитета која се могу подједнако уопштити са Грасманових бројева на Грасманова поља су дата са

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{G}^n} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n e^{i\theta_1(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k)} F(\theta_2, \dots, \theta_n) \\ = (-1)^{n-1} i \int_{\mathbb{G}^{n-1}} d\theta_2 \dots d\theta_n \delta(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k) F(\theta_2, \dots, \theta_n), \end{aligned} \quad (201)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} d^m y \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n e^{i y_a (x^a - M^{aj} \theta_j)} F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \\ = (2\pi)^m \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n \prod_{a=1}^m \delta(x^a - M^{aj} \theta_j) F(x, \theta_1, \dots, \theta_n). \end{aligned} \quad (202)$$

За доказ погледати Додатак [A.3](#). Одговарајући функционални идентитети за Грасманова поља изгледају исто као два идентитета изнад, до на замену мере интеграције $d\theta \rightarrow D\theta$, нормализационог фактора $(2\pi)^m \rightarrow \mathcal{N}$, и нотације $\prod \delta(x^a) \rightarrow \delta(\phi)$. Треба приметити да последњи идентитет садржи Диракову делту од комбинације реалних и Грасманових бројева, па је редослед интеграције важан. Конкретно, прво се мора спровести интеграција по реалним бројевима x^a , па тек онда по Грасмановим бројевима. Такође, Диракова делта од Грасманових бројева је непарна (косохермитска) као последица чињенице да Грасманови бројеви антикомутирају, па се делта увек појављује у пару са имагинарном јединицом $i \equiv \sqrt{-1}$ у једначини (201).

4.1.2 Очекиване вредности опсервабли

Веза између две квантне теорије се може добити упоређивањем очекиваних вредности опсервабли између две теорије. Да би то било успешно спроведено, потребно је дефинисати ове очекиване вредности у обе теорије:

$$\langle F \rangle_{3BF} = \frac{1}{Z_{3BF}} \int D\phi_i F(\phi_k) e^{iS_{3BF}[\phi_i]}, \quad \langle F \rangle_{ECC} = \frac{1}{Z_{ECC}} \int D\phi_i F(\phi_k) e^{iS_{ECC}[\phi_i]}, \quad (203)$$

где су суме по стањима дате као:

$$Z_{3BF} = \int D\phi_i e^{iS_{3BF}[\phi_i]}, \quad Z_{ECC} = \int D\phi_i e^{iS_{ECC}[\phi_i]}. \quad (204)$$

Потребно је одмах на почетку дати пар коментара. Прво, за потребе анализе није неопходно задати прецизну дефиницију интеграла по трајекторијама, што значи да није потребно у потпуности дефинисати квантну 3BF и ЕСС теорију експлицитно. Једини услов који је потребно претпоставити је да су мере у оба интеграла дефинисане на исти начин за обе теорије и да су дефинисане на такав начин да функционални идентитети (196), (199), (200), (201) и (202) и даље важе. На овај начин је могуће дискутовати особине и упоређивати очекиване вредности опсервабли у обе квантне теорије у непертурбативном режиму, упркос чињеници да сами детаљи квантизације теорија нису до краја дефинисани.

Друго, поља ϕ_i у 3BF теорији и ЕСС теорији припадају њиховим појединачним конфигурационим просторима (47)-(48) и (56), редом. Очигледно је да се опсервабле $F(\phi_k)$ у (203) могу упоређивати само ако припадају заједничком конфигурационом подпростору обе теорије, односно, ако опсервабла F зависи само од поља ϕ_k која припадају редукованом конфигурационом простору (56) који је дефинисан за ЕСС теорију.

У даљим корацима ће бити примењивани идентитети (196), (199), (200), (201) и (202), корак по корак, у циљу свођења дефиниције опсервабле F у квантној 3BF теорији, на дефиницију очекиване вредности одговарајуће опсервабле прво у квантној ЕС теорији, а потом и у квантној ЕСС теорији.

За почетак, потребно је експлицитно записати вредност производа очекиване вредности опсервабле F и суме по стањима у квантној 3BF теорији. Према дефиницији (203) је тај

производ једнак:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} = & \mathcal{N} \int D\alpha D\omega D\beta De D\tilde{\gamma} D\gamma D\bar{\gamma} D\phi D\psi D\bar{\psi} DBD\tilde{\lambda} D\lambda D\bar{\lambda} D\Lambda D\zeta DHDM \\
& \exp \left(i \int B_\alpha \wedge F^\alpha + B_{[ab]} \wedge R^{[ab]} + e_a \wedge (\nabla \beta)^a + \phi^A (\nabla \tilde{\gamma})_A + \bar{\psi}_A (\nabla \gamma)^A \right. \\
& - \left(\bar{\gamma} \overleftarrow{\nabla} \right)_A \psi^A \\
& + \lambda^\alpha \wedge (B_\alpha - 12 C_{\alpha\beta} M^\beta_{ab} e^a \wedge e^b) - \lambda_{[ab]} \wedge \left(B^{[ab]} - \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} e_c \wedge e_d \right) \\
& + \tilde{\lambda}^A \wedge (\tilde{\gamma}_A - H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \bar{\lambda}_A \wedge \left(\gamma^A + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
& - \lambda^A \wedge \left(\bar{\gamma}_A - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right) + 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^a \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge \beta^d \\
& + \zeta_\alpha^{ab} (M^\alpha_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F^\alpha \wedge e_a \wedge e_b) \\
& + \Lambda^{abA} \wedge (H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b) \\
& - \frac{1}{12} \left(\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \Big) \\
& F(\phi_k) .
\end{aligned} \tag{205}$$

Применом функционалног идентитета за Стоксову теорему (200) над сабирцима у другом и сабирком у трећем реду, уклањају се изводи са поља β_a , $\tilde{\gamma}_A$, γ^A и $\tilde{\gamma}^A$, како би у следећем

кораку могла да се изврши функционална интеграција по њима. Добијен резултат је:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} = & \mathcal{N} \int D\beta_{\partial} D e_{\partial} D \tilde{\gamma}_{\partial} D \gamma_{\partial} D \bar{\gamma}_{\partial} D \phi_{\partial} D \psi_{\partial} D \bar{\psi}_{\partial} e^{i \oint \phi_{\partial}^A \tilde{\gamma}_{A\partial} + \bar{\psi}_{A\partial} \gamma_{\partial}^A + \bar{\gamma}_{A\partial} \psi_{\partial}^A - e_{a\partial} \wedge \beta_{\partial}^a} \\
& \int D\alpha D\omega D\beta D e D \tilde{\gamma} D \gamma D \bar{\gamma} D \phi D \psi D \bar{\psi} D B D \tilde{\lambda} D \lambda D \bar{\lambda} D \Lambda D \zeta D H D M \\
& \exp \left(i \int B_{\alpha} \wedge F^{\alpha} + B_{[ab]} \wedge R^{[ab]} + (\nabla e)_a \wedge \beta^a - (\nabla \phi)^A \wedge \tilde{\gamma}_A \right. \\
& - \left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla} \right)_A \wedge \gamma^A + \bar{\gamma}_A \wedge (\nabla \psi)^A \\
& + \lambda^{\alpha} \wedge (B_{\alpha} - 12 C_{\alpha\beta} M^{\beta}_{ab} e^a \wedge e^b) - \lambda_{[ab]} \wedge \left(B^{[ab]} - \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} e_c \wedge e_d \right) \\
& + \tilde{\lambda}^A \wedge (\tilde{\gamma}_A - H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \bar{\lambda}_A \wedge \left(\gamma^A + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A \right) \\
& - \lambda^A \wedge \left(\bar{\gamma}_A - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \right) + 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^a \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge \beta^d \\
& + \zeta_{\alpha}^{ab} (M^{\alpha}_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F^{\alpha} \wedge e_a \wedge e_b) \\
& + \Lambda^{abA} \wedge (H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b) \\
& - \frac{1}{12} \left(\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
& F(\phi_k). \tag{206}
\end{aligned}$$

Пажљивом провером горњег израза се може уочити да у колико опсервабла $F(\phi_k)$ не зависи од поља на граници, интеграција по граници не даје допринос. Такође, 3BF теорија формулисана на овакав начин намеће ограничења да су поља материје као и тетрада на граници многострукости једнака нули. Ова ограничења се могу уклонити додавањем одговарајућих граничних чланова у класично 3BF дејство. Један од таквих граничних чланова је и Гибонс-Хокинг-Јорк члан [53, 54, 55].

У следећем кораку се спроводи интеграција по пољима β_a , $B_{[ab]}$, B_{α} , $\tilde{\gamma}^A$, $\bar{\gamma}_A$, γ_A , ζ_{α}^{ab} и Λ^{abA}

применом функционалних идентитета (196) и (201), који дају:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} = & \mathcal{N} \int D e_{\partial} D \phi_{\partial} D \psi_{\partial} D \bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \\
& \int D \alpha D \omega D e D \phi D \psi D \bar{\psi} D \tilde{\lambda} D \lambda D \bar{\lambda} D H D M \\
& \delta(F^{\alpha} + \lambda^{\alpha}) \delta(R_{[ab]} - \lambda_{[ab]}) \delta\left(\tilde{\lambda}_A - (\nabla \phi)_A\right) \delta\left(\bar{\lambda}_A - \left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}\right)_A\right) \delta\left(\lambda^A - (\nabla \psi)^A\right) \\
& \exp\left(i \int -12 \lambda^{\alpha} \wedge C_{\alpha\beta} M^{\beta}_{ab} e^a \wedge e^b + \lambda_{[ab]} \wedge \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon^{[ab]cd} e_c \wedge e_d \right. \\
& - \tilde{\lambda}^A \wedge H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c \\
& + \bar{\lambda}_A \wedge \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^A + \lambda^A \wedge \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi} \gamma^d)_A \\
& \left. - \frac{1}{12} \left(\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) \\
& \delta(M^{\alpha}_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F^{\alpha} \wedge e_a \wedge e_b) \\
& \delta(H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b) \\
& \delta((\nabla e)_a - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c) \\
& F(\phi_k). \tag{207}
\end{aligned}$$

Потом, даљом интеграцијом по пољима λ^{α} , $\lambda_{[ab]}$, $\tilde{\lambda}_A$, $\bar{\lambda}_A$ и λ^A се уклањају Диракове делте из трећег реда и добија:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} = & \mathcal{N} \int D e_{\partial} D \phi_{\partial} D \psi_{\partial} D \bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \\
& \int D \alpha D \omega D e D \phi D \psi D \bar{\psi} D H D M \\
& \exp\left(i \int 12 F^{\alpha} \wedge C_{\alpha\beta} M^{\beta}_{ab} e^a \wedge e^b + R_{ab} \wedge \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \right. \\
& - (\nabla \phi)^A \wedge H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c \\
& - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \left(\left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}\right)_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla \psi)^A \right) \\
& \left. - \frac{1}{12} \left(\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) \\
& \delta(M^{\alpha}_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F^{\alpha} \wedge e_a \wedge e_b) \\
& \delta(H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - (\nabla \phi)_A \wedge e_a \wedge e_b) \\
& \delta(2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c - (\nabla e)_a) \\
& F(\phi_k). \tag{208}
\end{aligned}$$

Множитељи M^{α}_{ab} и H_{abcA} , по којима још увек није интегралено су у вези са Хоцовим дуалима јачина поља F^{α} и $(\nabla \phi)_A$, редом. Применом функционалног идентитета (199) се ови

множитељи могу одинтегралити у корист Хоцових дуала (50), што даје:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int D e_{\partial} D \phi_{\partial} D \psi_{\partial} D \bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \\
&\int D \alpha D \omega D e D \phi D \psi D \bar{\psi} \frac{1}{|e|^{(|\alpha|+|A|(D-1))|[ab]|}} \\
&\exp \left(i \int -F^{\alpha} \wedge C_{\alpha\beta} \star F^{\beta} + R_{ab} \wedge \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d - (\nabla \phi)^A \wedge (\star \nabla \phi)_A \right. \\
&- \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \left(\left(\bar{\psi} \overleftarrow{\nabla} \right)_A \gamma^d \psi^A - \bar{\psi}_A \gamma^d (\nabla \psi)^A \right) \\
&- \frac{1}{12} \left(\chi (\phi^A \phi_A - v^2)^2 + Y_{ABC} \bar{\psi}^A \psi^B \phi^C + \frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} \right) \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \Big) \\
&\delta \left(2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c - (\nabla e)_a \right) \\
&F(\phi_k) .
\end{aligned} \tag{209}$$

Величина D (која се појављује у експоненту детерминанте тетраде) је димензија просторвремена, $D = 4$, па је вредност експонента детерминанте тетраде $N = (|\alpha| + |A|(D-1))|[ab]| = 144$, узимајући у обзир да је $|\alpha| = 12$, $|A| = 4$ и $[ab] = 6$. Може се препознати да је добијени аргумент у експоненту дејство (49) Ајнштајн-Картанове ЕС теорије, па се резултат може записати као:

$$\begin{aligned}
Z_{3BF}\langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int D e_{\partial} D \phi_{\partial} D \psi_{\partial} D \bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \\
&\int D \alpha D \omega D e D \phi D \psi D \bar{\psi} \frac{1}{|e|^N} \delta \left(2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c - (\nabla e)_a \right) \\
&F(\phi_k) e^{iS_{EC}[\phi_k]} .
\end{aligned} \tag{210}$$

На овом месту је потенцијално могуће успоставити везу између квантне 3BF теорије и квантне ЕС теорије. На жалост, ово није могуће јер Диракова делта под интегралом намеће додатну јаку везу између торзије и спинског тензора и мора бити одинтеграљена пре покушаја успостављања било какве везе између квантних теорија. Ово је могуће урадити интеграцијом по 1-форми спинске конекције $\omega^{[ab]}$, која је присутна у Дираковој делти као део коваријантног извода ∇ који делује на 1-форму тетраде. Да би интеграција била изведена, потребно је прво трансформисати израз унутар Диракове делте, јер оригинални израз зависи од антисиметричног дела спинске конекције у односу на други индекс и просторвременски индекс. Ова зависност се може уклонити преласком у локално инерцијални координатни систем, где се овај антисиметрични део може одредити увођењем смене променљивих $\omega_{abc} = \omega_{ab\mu} e_c^{\mu}$. Ова смена променљивих мења меру интеграла:

$$D\omega_{ab\mu} = D\omega_{abc} \left| \frac{\delta(\omega_{abc} e_c^{\mu})}{\delta\omega_{efg}} \right| = D\omega_{abc} \left| \delta_{[ab]}^{[ef]} e_g^{\mu} \right| = D\omega_{abc} |e|^{|[ab]|} . \tag{211}$$

Сада је могуће увести величину A_{abc} која је антисиметрична у односу на други и трећи индекс:

$$A_{abc} = \frac{1}{2} (\omega_{abc} - \omega_{acb}) . \tag{212}$$

Једноставно је показати да компоненте нове променљиве садрже све компоненте спинске конекције (и ниједну више). Да би ово било показано, довољно је одредити вредност следеће

линеарне комбинације коришћењем особине антисиметричности спинске конекције по прва два индекса:

$$A_{abc} - A_{bac} - A_{cab} = \frac{1}{2} (\omega_{abc} - \omega_{acb} - \omega_{bac} + \omega_{bca} - \omega_{cab} + \omega_{cba}) = \omega_{abc}. \quad (213)$$

Јакобијан $\mathcal{J}$ ове смене променљивих је константан и може се апсорбовати у нормализациону константу $\mathcal{N}$, па се мера интеграла суштински не мења:

$$\mathcal{N} \int D\omega_{abc} = \mathcal{N} \int |\mathcal{J}| DA_{abc} = \mathcal{N}' \int DA_{abc}. \quad (214)$$

Заменом натраг у једначину (210) се добија израз који је функција поља A_{abc} :

$$\begin{aligned} Z_{3BF} \langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int De_{\partial} D\phi_{\partial} D\psi_{\partial} D\bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \int D\alpha DADeD\phi D\psi D\bar{\psi} \frac{|e|^{[ab]}}{|e|^N} \\ &\quad \delta \left(2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e_{\mu}^b e_{\nu}^c \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - (\partial_{\mu} e_{a\nu}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + A_{abc} |e| e_d^{\rho} e_e^{\sigma} \varepsilon^{bcde} \right) \\ &\quad F(\phi_k) e^{iS_{EC}[\phi_k]}. \end{aligned} \quad (215)$$

Применом функционалних идентитета (199) и (202) добија се израз који се може интегралити по пољима A_{abc} праволинијски:

$$\begin{aligned} Z_{3BF} \langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int De_{\partial} D\phi_{\partial} D\psi_{\partial} D\bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \int D\alpha DADeD\phi D\psi D\bar{\psi} \frac{|e|^{[ab]}}{|e|^N} \\ &\quad \delta \left(A_{abc} - \left(\frac{1}{2} c_{abc} - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} \right) \right) \frac{1}{|2|e| \varepsilon^{[bc][de]} e_{[d}^{\rho} e_{e]}^{\sigma]}|^a|} \\ &\quad F(\phi_k) e^{iS_{EC}[\phi_k]}. \end{aligned} \quad (216)$$

Следећи корак је одређивање детерминанте производа две тетраде и тензора Леви-Чивите. Прво је потребно одредити детерминанту тензора Леви-Чивите као $|\varepsilon^{[ab][cd]}| = |\varepsilon^{[\mu\nu][\rho\sigma]}| = 1$, а потом се може конструисати идентитет:

$$\frac{1}{|e|^{[\mu\nu]}} = \left| \frac{1}{|e|} \varepsilon^{[\mu\nu][\rho\sigma]} \right| = |e_a^{[\mu} e_b^{\nu]} e_c^{[\rho} e_d^{\sigma]} \varepsilon^{abcd}| = |2e_{[a}^{[\mu} e_{b]}^{\nu]}| |2e_{[c}^{[\rho} e_{d]}^{\sigma]}| |\varepsilon^{[ab][cd]}| = |2e_{[a}^{[\mu} e_{b]}^{\nu]}|^2, \quad (217)$$

из ког следи да је

$$|2e_{[a}^{[\mu} e_{b]}^{\nu]}| = \frac{1}{|e|^{\frac{1}{2}[\mu\nu]}} = \frac{1}{|e|^{\frac{1}{2}[ab]}}. \quad (218)$$

Коришћењем добијене релације (218) функционални интеграл постаје

$$\begin{aligned} Z_{3BF} \langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int De_{\partial} D\phi_{\partial} D\psi_{\partial} D\bar{\psi}_{\partial} \delta(\phi_{\partial}) \delta(\psi_{\partial}) \delta(\bar{\psi}_{\partial}) \delta(e_{\partial}) \int D\alpha DADeD\phi D\psi D\bar{\psi} \\ &\quad \delta \left(A_{abc} - \left(\frac{1}{2} c_{abc} - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} \right) \right) \frac{1}{|e|^{N+[ab](\frac{|a|}{2}-1)}} \\ &\quad F(\phi_k) e^{iS_{EC}[\phi_k]}. \end{aligned} \quad (219)$$

У случају Стандардног Модела, експонент детерминанте тетраде је дат изразом $M = N + |[ab]| \left(\frac{|a|}{2} - 1 \right) = N + 6 = 150$, узимајући у обзир да је $|a| = 4$. Интеграција по пољу A_{abc} мења поље A_{abc} у дејству са:

$$A_{abc} = \frac{1}{2} c_{abc} - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd}, \quad (220)$$

што одговара замени

$$\omega_{ab\mu} = \Delta_{ab\mu} - 2\pi i l_p^2 \bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^d \psi^A \varepsilon_{abcd} e^c{}_\mu, \quad (221)$$

која је претходно описана процедура добијања дејства за ЕСС теорију из дејства за ЕС теорију (једначина (51)). Због тога коначан израз садржи дејство за ЕСС теорију у експоненту, а израз за очекивану вредност опсервабле у квантној 3BF теорији постаје упоредив са изразом за очекивану вредност одговарајуће опсервабле у квантној ЕСС теорији:

$$\begin{aligned} Z_{3BF} \langle F \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int D e_\partial D \phi_\partial D \psi_\partial D \bar{\psi}_\partial \delta(\phi_\partial) \delta(\psi_\partial) \delta(\bar{\psi}_\partial) \delta(e_\partial) \int D \alpha D e D \phi D \psi D \bar{\psi} \\ &\times \frac{1}{|e|^M} F(\phi_k) e^{iS_{ECC}[\phi_k]} = \mathcal{N}' Z_{ECC} \left\langle \frac{1}{|e|^M} F \right\rangle_{ECC}. \end{aligned} \quad (222)$$

У специјалном случају, заменом јединичне опсервабле, $F(\phi_k) = 1$, може се одредити веза између две суме по стањима

$$\begin{aligned} Z_{3BF} &= \mathcal{N} \int D e_\partial D \phi_\partial D \psi_\partial D \bar{\psi}_\partial \delta(\phi_\partial) \delta(\psi_\partial) \delta(\bar{\psi}_\partial) \delta(e_\partial) \int D \alpha D e D \phi D \psi D \bar{\psi} \frac{1}{|e|^M} e^{iS_{ECC}[\phi_k]} \\ &= \mathcal{N}' Z_{ECC} \left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC}. \end{aligned} \quad (223)$$

У другом специјалном случају се избором опсервабле $F(\phi_k) = |e|^M$, добија друга веза између сума по стањима

$$\begin{aligned} Z_{3BF} \langle |e|^M \rangle_{3BF} &= \mathcal{N} \int D e_\partial D \phi_\partial D \psi_\partial D \bar{\psi}_\partial \delta(\phi_\partial) \delta(\psi_\partial) \delta(\bar{\psi}_\partial) \delta(e_\partial) \int D \alpha D e D \phi D \psi D \bar{\psi} e^{iS_{ECC}[\phi_k]} \\ &= \mathcal{N}' Z_{ECC}. \end{aligned} \quad (224)$$

Комбиновање веза (223) и (224), се добија нормализациона релација

$$\langle |e|^M \rangle_{3BF} \left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC} = 1. \quad (225)$$

Као последњи корак, замена (223) и (224) натраг у (222), и применом дефиниција (203), коначно се добија веза између квантних 3BF и ЕСС теорија облику:

$$\langle F \rangle_{3BF} = \frac{\left\langle \frac{1}{|e|^M} F \right\rangle_{ECC}}{\left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC}}, \quad \langle F \rangle_{ECC} = \frac{\langle |e|^M F \rangle_{3BF}}{\langle |e|^M \rangle_{3BF}}. \quad (226)$$

Једначине (226) дефинишу непертурбативну везу између очекиваних вредности опсервабли у квантној 3BF и квантној ЕСС теорији, и представљају главни резултат у читавој глави. Постојање ове везе наглашава важност 3BF теорије јер је њеном квантизацијом сада аутоматски добијена и квантна ЕСС теорија, која је важан физички модел квантне гравитације и Стандардног Модела. Експлицитна конструкција функционалног интеграла за 3BF теорију са везама ће бити изложена у следећој глави.

4.2 Примери

У овом поглављу ће бити упоређена предвиђања квантне 3BF теорије и квантне ЕСС теорије на примерима густине четворозапремине просторвремена, где ће бити дискутован и семикласичан лимес, и примеру гравитационих таласа.

4.2.1 Густина четворозапремине просторвермена

Као најједноставнији пример, може се узети опсервабла густине четворозапремине просторвремена дефинисана као

$$F(\phi_k) = \rho \equiv |e|, \quad (227)$$

и густина четворозапремине просторвремена као очекивана вредност овог оператора у датој теорији гравитације. Ово је мотивисано чињеницом да је четворозапремина неке четвородимензионалне области $\mathcal{R}$ просторвремена дата као

$$V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^4x \sqrt{-g} = \int_{\mathcal{R}} d^4x |e|, \quad (228)$$

па се $|e|$ може прозвати “густином” четворозапремине просторвремена области $\mathcal{R}$.

Применом релације веза између квантних теорија (226), добија се однос између очекиваних вредности густина четворозапремина у две квантне теорије:

$$\frac{\rho_{3BF}}{\rho_{ECC}} \equiv \frac{\langle \rho \rangle_{3BF}}{\langle \rho \rangle_{ECC}} = \frac{\left\langle \frac{1}{|e|^{M-1}} \right\rangle_{ECC}}{\langle |e| \rangle_{ECC} \left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC}} = \frac{\langle |e| \rangle_{3BF} \langle |e|^M \rangle_{3BF}}{\langle |e|^{M+1} \rangle_{3BF}}. \quad (229)$$

На овом месту је потребно увести дефиниције статистичких величина коваријансе и варијансе, помоћу којих се једноставно могу издвојити квантне поправке од класичних вредности:

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle, \quad \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) = (\Delta X)^2. \quad (230)$$

Овде ΔX представља стандардно одступање, односно, неодређеност опсервабле X . Коваријанса и варијанса задовољавају неједнакост Коши-Шварца

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \Delta X \Delta Y, \quad (231)$$

која се може искористити за процену коваријансе у једначини. На основу дефиниције (230), јасно је да је однос густина четворозапремине у 3BF и ЕСС теорији једнак:

$$\frac{\rho_{3BF}}{\rho_{ECC}} = 1 + \frac{\text{Cov}\left(|e|, \frac{1}{|e|^M}\right)_{ECC}}{\langle |e| \rangle_{ECC} \left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC}}, \quad \frac{\rho_{ECC}}{\rho_{3BF}} = 1 + \frac{\text{Cov}\left(|e|, |e|^M\right)_{3BF}}{\langle |e| \rangle_{3BF} \langle |e|^M \rangle_{3BF}}. \quad (232)$$

Затим, коришћењем (231), се добија

$$\frac{\rho_{3BF}}{\rho_{ECC}} \leq 1 + \left(\frac{\Delta |e|}{\langle |e| \rangle} \frac{\Delta \frac{1}{|e|^M}}{\left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle} \right)_{ECC}, \quad \frac{\rho_{ECC}}{\rho_{3BF}} \leq 1 + \left(\frac{\Delta |e|}{\langle |e| \rangle} \frac{\Delta |e|^M}{\langle |e|^M \rangle} \right)_{3BF}. \quad (233)$$

У класичном лимесу се може претпоставити да ове неодређености теже нули, одакле следи да је класичан лимес густине четворозапремине исти у обе теорије.

Заправо, горња једначина указује да би класичан лимес обе теорије могао да буде исти. Да би ово било демонстрирано, треба спровести претходну процедуру у случају произвољне опсервабле $F(\phi_k)$. Полазећи од (226), добија се

$$\frac{\langle F \rangle_{3BF}}{\langle F \rangle_{ECC}} = \frac{\left\langle \frac{1}{|e|^M} F \right\rangle_{ECC}}{\left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle_{ECC} \langle F \rangle_{ECC}}, \quad \frac{\langle F \rangle_{ECC}}{\langle F \rangle_{3BF}} = \frac{\langle |e|^M F \rangle_{3BF}}{\langle |e|^M \rangle_{3BF} \langle F \rangle_{3BF}}. \quad (234)$$

Очекивана вредност производа у бројиоцу се може изразити у облику коваријансе коришћењем (230), а потом се коваријанса може проценити применом неједнакости Коши-Шварца (231), што доводи до скупа неједнакости:

$$\frac{\langle F \rangle_{3BF}}{\langle F \rangle_{ECC}} \leq 1 + \left(\frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \frac{\Delta \frac{1}{|e|^M}}{\left\langle \frac{1}{|e|^M} \right\rangle} \right)_{ECC}, \quad \frac{\langle F \rangle_{ECC}}{\langle F \rangle_{3BF}} \leq 1 + \left(\frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \frac{\Delta |e|^M}{\langle |e|^M \rangle} \right)_{3BF}. \quad (235)$$

У класичном лимесу се може очекивати да неодређености опсервабли постају занемарљиве, $\Delta F \rightarrow 0$, одакле следи

$$\frac{\langle F \rangle_{3BF}}{\langle F \rangle_{ECC}} \leq 1, \quad \frac{\langle F \rangle_{ECC}}{\langle F \rangle_{3BF}} \leq 1. \quad (236)$$

Комбиновањем две неједнакости се добија једнакост класичног лимеса

$$\langle F \rangle_{3BF} = \langle F \rangle_{ECC}, \quad (237)$$

која показује да све опсервабле имају исте очекиване вредности у класичном лимесу у обе теорије. Дакле, две теорије се међусобно разликују само на нивоу квантних поправки.

4.2.2 Гравитациони таласи

У примеру гравитационих таласа се појављују два (међусобно повезана) поља, конкретно, поље тетрада и метричког тензора, као и њихове ексцитације око равнoг просторвремена:

$$e^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu + \varepsilon^a{}_\mu, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (238)$$

Детерминанта тетраде се може развити у ред по поправкама:

$$|e| = 1 + \varepsilon^a{}_a + \frac{1}{2} (\varepsilon^a{}_a \varepsilon^b{}_b - \varepsilon^a{}_b \varepsilon^b{}_a) + \frac{1}{6} (\varepsilon^a{}_a \varepsilon^b{}_b \varepsilon^c{}_c - 3\varepsilon^a{}_a \varepsilon^b{}_c \varepsilon^c{}_b + 2\varepsilon^a{}_b \varepsilon^b{}_c \varepsilon^c{}_a) + |\varepsilon|, \quad (239)$$

али ће њена вредност на даље бити апроксимирана до квадратног сабирка. Уопштем случају се могу разматрати гравитационе пертурбације и у закривљеном просторвремену. Тада постоји позадински део тетраде $\hat{e}^a{}_\mu$ и одговарајућа позадинска метрика $\hat{g}_{\mu\nu}$, а уместо (238) се може написати

$$e^a{}_\mu = \hat{e}^a{}_\mu + \varepsilon^a{}_\mu, \quad g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (240)$$

Иако је анализа овог општег случаја концептуално слична претходној, технички је захтевнија, јер је развој детерминанте тетраде (239) различит. На пример, уместо 1, водећи члан у развоју ће бити $\det \hat{e}^a{}_\mu$. Због тога је једноставније не разматрати општи случај закривљеног простора. Са друге стране, сви главни закључци анализе остају исти.

Могуће је увести величину E која у себи садржи све поправке детерминанте тетраде у односу на јединицу. Ова смена је корисна за проучавање конвергенције развоја у ред $\pm M$ -тог степена детерминанте тетраде по овом параметру, па су развоји одговарајућег степена детерминанте тетраде до другог реда дати као:

$$\frac{1}{|e|^M} = \frac{1}{(1+E)^M} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{M+n}{n} (-E)^n = 1 - M\varepsilon^a_a + \frac{M}{2} (M\varepsilon^a_a\varepsilon^b_b + \varepsilon^a_b\varepsilon^b_a) + o(\varepsilon^2), \quad (241)$$

Услов да би овај ред конвергирао је да је $|E| < 1$, док сабирци у реду почињу да опадају када је задовољен следећи услов:

$$|E| < \frac{n+1}{M+n+1}. \quad (242)$$

Одатле следи да ће допринос другог реда бити већи од доприноса трећег реда када је $|E| < 0.0196$ (уз претпоставку да је $n = 2$, $M = 150$), или, другим речима, ако се захтева да да допринос другог реда буде k пута већи од доприноса трећег реда, онда је $|E| < 0.0196/k$. Такође у случају позитивног степена детерминанте тетраде, слично се добија:

$$|e|^M = (1+E)^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{M}{n} E^n = 1 + M\varepsilon^a_a + \frac{M}{2} (M\varepsilon^a_a\varepsilon^b_b - \varepsilon^a_b\varepsilon^b_a) + o(\varepsilon^2). \quad (243)$$

Овај ред је коначан, будући да је биномни коефицијент једнак нули када је $n > M$, па не постоје проблеми са конвергенцијом. Додатно, сабирци почињу да опадају када је испуњен услов:

$$|E| < \frac{n+1}{M-n}, \quad (244)$$

који је слабији захтев од претходног (242) и самим тим аутоматски задовољен.

Применом једначина за везу између теорија (226) на опсерваблу пертурбације метрике, $F(\phi_k) = h_{\mu\nu}$, добија се:

$$\langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} = \frac{\langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} - M \langle \varepsilon^a_a h_{\mu\nu} \rangle_{ECC}}{1 - M \langle \varepsilon^a_a \rangle_{ECC} + \frac{M}{2} \langle M\varepsilon^a_a\varepsilon^b_b + \varepsilon^a_b\varepsilon^b_a \rangle_{ECC}}. \quad (245)$$

Развој имениоца у ред даје:

$$\begin{aligned} \langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} &= (\langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} - M \langle \varepsilon^a_a h_{\mu\nu} \rangle_{ECC}) \\ &\quad \left(1 + M \langle \varepsilon^a_a \rangle_{ECC} - \frac{M}{2} \langle M\varepsilon^a_a\varepsilon^b_b + \varepsilon^a_b\varepsilon^b_a \rangle_{ECC} + \frac{M^2}{2} \langle \varepsilon^a_a \rangle_{ECC}^2 \right) \\ &= \langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} (1 + M \langle \varepsilon^a_a \rangle_{ECC}) - M \langle \varepsilon^a_a h_{\mu\nu} \rangle_{ECC}. \end{aligned} \quad (246)$$

Такође, у супротном смеру се добија:

$$\begin{aligned} \langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} &= (\langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} + M \langle \varepsilon^a_a h_{\mu\nu} \rangle_{3BF}) \\ &\quad \left(1 - M \langle \varepsilon^a_a \rangle_{3BF} - \frac{M}{2} \langle M\varepsilon^a_a\varepsilon^b_b - \varepsilon^a_b\varepsilon^b_a \rangle_{3BF} - \frac{M^2}{2} \langle \varepsilon^a_a \rangle_{3BF}^2 \right) \\ &= \langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} (1 - M \langle \varepsilon^a_a \rangle_{3BF}) + M \langle \varepsilon^a_a h_{\mu\nu} \rangle_{3BF}. \end{aligned} \quad (247)$$

Ови изрази се поједностављују у следећи облик изражен преко коваријансе:

$$\langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} = \langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} - M \text{Cov}(\varepsilon^a_a, h_{\mu\nu})_{ECC}, \quad (248)$$

$$\langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} = \langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} + M \text{Cov}(\varepsilon^a_a, h_{\mu\nu})_{3BF}. \quad (249)$$

Коришћењем неједнакости Коши-Шварца (231), може се проценити потребна величина пертурбације да би се разлика између квантне 3BF теорије и квантне ЕСС теорије експериментално утврдила. Конкретно, до другог реда је разлика у предвиђању између теорија

$$\text{Cov}(\varepsilon_a^a, h_{\mu\nu})_{ECC} = \text{Cov}(\varepsilon_a^a, h_{\mu\nu})_{3BF} = \text{Cov}(\varepsilon_a^a, h_{\mu\nu}) , \quad (250)$$

односно величина квантне поправке је иста у обе теорије, што се може добити комбиновањем једначина (248) и (249). Осим тога, на основу релација $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu a} \varepsilon_a^\nu + \eta_{a\nu} \varepsilon_a^\mu$, $\varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu a} \varepsilon_a^\nu$ и неједнакости Коши-Шварца, уз претпоставку да је неодређеност сваке компоненте тетраде приближно иста, добија се:

$$\langle h_{\mu\nu} \rangle_{ECC} - \langle h_{\mu\nu} \rangle_{3BF} = M \text{Cov}(\varepsilon_a^a, h_{\mu\nu}) \leq 2M \Delta \varepsilon_a^a \Delta \varepsilon_{\mu\nu} \approx 8M (\Delta \varepsilon_{\mu\nu})^2 \approx 2M (\Delta h_{\mu\nu})^2 . \quad (251)$$

Неједнакост (251) се у принципу може искористити да се експериментално разликују квантна 3BF теорија и квантна ЕСС теорија, мерењем гравитационих таласа и упоређивањем са исходом теоријских предвиђања. У циљу стицања интуиције о потребном реду величине, може се кренути од оквирних редова величине измерених тренутно доступном технологијом, на пример ЛИГО/Вирго детекторима. На основу [56], уобичајена прецизност мерења напрезања (компонената $\langle h_{\mu\nu} \rangle$) се може проценити на 10^{-21} , што имплицира да десна страна (251) треба да буде

$$2M (\Delta h_{\mu\nu})^2 \geq 10^{-21} . \quad (252)$$

Узимајући у обзир да је за Стандардни Модел вредност $M = 150$ (219), добија се процена минималне квантне поправке која се може детектовати:

$$\Delta h_{\mu\nu} \geq \sqrt{\frac{10^{-21}}{2 \cdot 150}} \approx 10^{-12} . \quad (253)$$

Ово је велика вредност, што се може видети из чињенице да је амплитуда напрезања сигнала спајања две црне рупе у [56] реда 10^{-18} . Пошто је растојање до извора GW150914 процењено на $r_{GW} \approx 410$ Мрс, што је далеко изван наше галаксије, може се проценити интензитет напрезања у случају истог догађаја унутар Млечног Пута, односно на растојању унутар $r_{MW} \approx 34$ Крс. Пошто амплитуда сферног таласа опада пропорционално са $1/r$ од извора, може се проценити да би спајање сличних црних рупа унутар наше галаксије створило сигнал чији је ред величине напрезања

$$h_{MW} \approx h_{GW} \frac{r_{GW}}{r_{MW}} = 10^{-18} \times \frac{4.1 \cdot 10^5 \text{ Крс}}{3.4 \cdot 10^1 \text{ Крс}} \approx 10^{-14} . \quad (254)$$

Ово је и даље два реда величине мање од потребне величине квантне поправке $\Delta h_{\mu\nu}$. Штавише, не постоји разлог у теорији због ког би систем две црне рупе које се спајају требао да има тако велику квантну неодређеност.

Другим речима, да би постојећом технологијом разлика између две теорије била опсервациона, потребно је да извор гравитационих таласа

- (а) ствара напрезање $\langle h_{\mu\nu} \rangle$ реда величине најмање 10^{-11} , и
- (б) има квантну неодређеност напрезања, $\Delta h_{\mu\nu}$, најмање 10^{-12} .

Очигледно, не постоје познати кандидати за изворе таквих гравитационих таласа у природи. У сваком случају, макар у теорији, ако би такав извор постајао, било би могуће применити (251) и експериментално разликовати квантну 3BF теорију од квантне ЕСС теорије.

5 Конструкција квантне 3BF теорије са везама

У претходим главама је потврђена еквиваленција између две класичне теорије описане 3BF дејством са везама и Стандардним Моделом спрегнутим са Ајнштајн-Картановом гравитацијом. Затим је утврђена непертурбативна веза између одговарајућих квантних теорија заснованих на овим моделима без експлицитне дефиниције сваке од теорија и утврђено да обе теорије деле заједнички семикласичан лимес. У наредним поглављима ће бити формулисана квантна 3BF теорија са везама на триангулацији и биће спроведена прелиминарна анализа семикласичног лимеса добијене теорије.

5.1 Дискретизација дејства

У овом поглављу ће бити изложен поступак дефинисања дејства на триангулацији многострукости. Ова структура заправо представља део по део равну многострукост састављену од ћелија које имају геометрију 4-симплекса. Основна идеја је у придруживању чинилаца дејства елементима триангулације истог типа. Овде се могу уочити две основне могућности које се често срећу у литератури. Прва је да чиниоци дејства који су n -форме додељени n -димензионалним ћелијама директне триангулације, и друга, да су n -форме из дејства додељене n -димензионалним ћелијама Поенкаре-дуалној триангулацији. У случају када је дејство састављено од сабирака који садрже по два чиниоца дискретизација дејства се може вршити на комбинацији директне и Поенкаре-дуалне триангулације, по неком утврђеном превилу који од два чиниоца у сабирцима у дејству треба поставити на коју триангулацију. Међутим, у случају када се сабирци у дејству састоје од више чинилаца, а поготово када број чинилаца није исти за све сабирке, постављање дејства на комбинацију директне и Поенкаре-дуалне триангулације нема превише смисла јер не постоји природан начин који указује на то која поља треба доделити којој триангулацији. Због тога је у наставку цело дејство постављена само на директну триангулацију без Поенкареовог дуала.

Сада треба увести нотацију која ће означавати елементе триангулације. Структура елементарне ћелије триангулације, 4-симплекса је следећа. Симплекс се састоји од пет вертекса означених и пребројаних малим латиничним словом v , по десет ивица и троуглова, означених са ε и Δ , редом, и пет тетраедара означених са τ . Сами симплекси се пребројавају и означавају индексом σ . У дејству се сумира по свим елементима триангулације, а бројач у суми је први индекс који се појављује у исказу испод суме. Тај исказ може имати два типа облика $a \in b$ и $b \ni a$, где су a и b елементи триангулације било горе наведеног типа.

Сваки елемент триангулације осим вертекса је оријентисан. Елемент најмање димензије који има оријентацију је свакако ивица. Сви остали елементи веће димензије се могу разложити на ивице, а њихова оријентација дефинисати редоследом навођења и оријентацијом њихових ивица. Због тога је важно размотрити на колико се начина елементи више димензије могу разложити на елементе мање димензије. Ове могућности се могу представити табеларно:

Елемент	начин за разлагање	број комбинација
$\triangle$	$2 \times /$	$3 \times 2! = 6$
$\triangle$	$3 \times /$	$16 \times 3! = 96$
$\triangle$	$/ + \triangle$	12
$\boxtimes$	$4 \times /$	$125 \times 4! = 3000$
$\boxtimes$	$2 \times / + \triangle$	$150 \times 2! = 300$
$\boxtimes$	$/ + \triangle$	20
$\boxtimes$	$2 \times \triangle$	$15 \times 2! = 30$

У првој колони, у случају троугла, две од три ивице се могу одабрати на три начина. Док је број пермутација редоследа њиховог набрајања 2, па је укупан број комбинација 6. У свакој колони је број одређен као број начина за избор различитих елемената помножен пермутацијом редоследа елемената истог типа.

Тетраедар се може конструисати на два начина, први је узимањем три ивице које не припадају истом троуглу. Прebroјавање се може извршити на два начина. Први је према топологији графа сачињеног од изабраних ивица. Постоје две топовологије, прва код које све три ивице излазе из истог вертекса, и таквих има четири јер тетраедар садржи четири вертекса, и други где се три ивице надовезују једна на другу, који се може конструисати тако што је први вертекс у низу изабран на четири начина, други на три и трећи на два што је укупно 24, али пошто је граф симетричан смер бројања, има их дупло мање односно 12. Ово моће да се изброји и тако што се из претходног графа са три ивице које излазе из истог вертекса који се може изабрати на 4 начина, изабере једна ивица на три начина која се извлачи из заједничког вертекса и повезује са неким од друга два вертекса. Дакле, укупно постоји $4+12=16$ различитих графова са $3!$ пермутација, односно 96 могућности набрајања 3 ивице које чине тетраедар.

Други начин је да се прва ивица може изабрати на 6 начина, друга ивица на 5, тако да у четири случаја ове две ивице имају заједнички вертекс и у једном случају немају. Трећа ивица се сада може изабрати на три начина ако су прве две имале заједнички вертекс и на четири начина ако нису. То је укупно $6*(4*3+1*4)=96$ начина.

Други начин за конструкцију тетраедра је троугао и ивица која му не припада. Троугао се може изабрати на 4 начина, а ивица која му не припада на три, тако да је то укупно 12 могућности.

Цео 4-симплекс се може конструисати на 3 начина. Први је помоћу 4 ивице. Бројање могућности поново може да се обави на два начина. Посматрањем топовологија, уочавају се три могуће топовологије. Прва је четири ивице са заједничким вертексом који се може изабрати на 5 начина. Друга је три ивице из заједничког вертекса који се може изабрати на пет начина и једна ивица која спаја пети вертекс која се може изабрати на 4 начина са неким од три вертекса ивица које виरे из првог заједничког вертекса. Таквих графова има $5*4*3*60$. Трећи граф је састављен од 5 ивица које се надовезују једна на другу. Сваки вертекс у низу се може одабрати на за један мање начин од претходног. Међутим, како је цео граф независан од смера бројања, укупан број мора да се подели са два, тако да таквих графова укупно има $5*4*3*2/2=60$. Дакле постоји 125 графова са $4!$ пермутација ивица, што је укупно 3000 могућности.

Други начин за бројање је тај да се прва ивица може изабрати на 10 начина. Друга ивица на 9, од чега у шест случаја постоји заједнички вертекс и у три случаја не постоји. Сада се посматрају оба случаја одвојено. Трећа ивица се у првом случају може изабрати на седам начина, од којих у шест постоји један вертекс који је заједнички са бар једном од

претходне две ивице и један начин тако да не постоји заједнички вертекс. Ако је постајао један заједнички вертекс за трећу и бар једну од претходних ивица, постоје две могућности. Да је вертекс заједнички за све три ивице и тада се трећа ивица може изабрати на два, а четврта на четири начина ($10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 = 480$ могућности), и да трећа ивица има заједнички вертекс само са једном од прве две ивице, када се трећа ивица може изабрати на 4, а четврта на још 4 начина ($10 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 960$ могућности). Ако не постоји заједнички вертекс за трећу и претходне две ивице, трећа ивица се може изабрати на само један начин, а четврта може да полази из два вертекса треће ивице и заврши се у неки од три преостала вертекса, односно може се изабрати на $2 \cdot 3 = 6$ начина ($10 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 6 = 360$ могућности). Други случај је када прва и друга ивица немају заједнички вертекс. Тада се друга ивица може изабрати на 3 начина, а трећа ивица може да се изабере на 8 начина. Четири од осам су такви да се трећа ивица конструише тако што јој је један вертекс заједнички са првом ивицом (2 начина), а други заједнички са другом (још 2 начина), или тако што јој је један вертекс пети, који не припада ни првој ни другој ивици, а други неки од преостала 4 вертекса (преостале 4 могућности). У колико је трећа ивица добијена избором једног вертекса прве и једног вертекса друге, четврта ивица се може изабрати на четири начина. Тако да јој је један вертекс пети који не припада ни једној од прве три ивице, а други, неки од преостала четири ($10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 480$ могућности). Последњи начин је да је трећа ивица добијена спајањем петог вертекса који није припадао ни једној од прве две ивице са неким од преосталих 4 вертекса и ту се четврта ивица може изабрати на 6 начина. Пре одабирања четврте ивице, граф се састоји од два неповезана дела. Први је једна засебна ивица (два вертекса), а други су две повезане ивице (три вертекса). Четврта ивица може да се изабере тако да јој је један вертекс заједнички са једном неповезаном ивицом (два начина), а други заједнички са бар једном од друге две ивице (три начина), тако да се добије повезан граф ($10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 720$ могућности). Укупно то чини $480 + 960 + 360 + 480 + 720 = 3000$ могућности.

Други начин за конструисање целог 4-симплекса је троугао и две ивице које му не припадају, тако да све заједно садрже свих пет вертекса. Троугао се може изабрати на 10 начина, а ивице на такав начин да свака садржи бар један од преостала два вертекса која не припадају троуглу. Ако прва ивица садржи само један од преостала два вертекса (може се изабрати на 6 начина), друга ивица се може изабрати на 4 начина, а ако прва ивица садржи оба преостала вертекса (један начин), друга ивица се може изабрати на шест начина. То је укупно $10 \cdot (6 \cdot 4 + 1 \cdot 6) = 300$ могућности. Алтернативно се могућности могу избројати посматрањем графова. Ако су обе ивице причвршћене једним вертексом за троугао, то је 9 могућности, а ако је само једна причвршћена за троугао, то је 6 могућности. Број пермутација ивица је 2, па је укупан број могућности $10 \cdot (9 + 6) \cdot 2 = 300$ могућности.

Трећи начин за конструкцију целог 4-симплекса је тетраедар и ивица која му не припада. Тетраедар се може изабрати на 5 начина, а ивица која му не припада на четири, што је укупно 20 могућности.

Четврти и последњи начин за конструкцију 4-симплекса је помоћу два троугла са само једним заједничким вертексом. Овај вертекс се може изабрати на 5 начина, а парови троуглова на три. Број пермутација троуглова је 2, па је укупно $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ могућности.

Ови комбинаторни фактори су важни у тренутку преласка са суме по независним елементима 4-симплекса на суму по свим елементима 4-симплекса.

У наставку ће бити изложен поступак постављања дејства на директну триангулацију. Овај поступак се не може спровести са дејством у произвољном облику, већ сабирци у дејству морају да буду изражени у облику производа диференцијалних форми.

Процес постављања дејства на триангулацију је изражен помоћу контракције између век-

тора и форми. Пошто је многострукост део по део равна, симплекси од којих је састављена су подударни са тангентном многострукошћу, па се интеграција форме по симплексу може вршити контракцијом између форми на многострукости и $\binom{4}{0}$ тензора придруженом симплексу:

$$\sigma = \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \varepsilon_3^\rho \varepsilon_4^\sigma \partial_\mu \wedge \partial_\nu \wedge \partial_\rho \wedge \partial_\sigma, \quad (255)$$

где су $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ четири линеарно независне ивице које образују 4-симплекс. Сам тензор придружен симплексу не зависи од избора ових независних ивица, али је знак поља осетљив на редослед набрајања због антисиметричног производа између њих.

Да би дејство било дискретизовано овим методом, потребно је конструисати Лагранжијан у облику 4-форме. Дискретизација дејства је онда:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int \frac{1}{4!} \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \sum_\sigma \int_\sigma \frac{1}{4!} \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = \frac{1}{4!} \sum_\sigma \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma}[\sigma] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} V[\sigma] \\ &= \frac{1}{4!} \sum_\sigma \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma}[\sigma] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{4!} \varepsilon_{1a} \varepsilon_{2b} \varepsilon_{3c} \varepsilon_{4d} \varepsilon^{abcd} \right) \\ &= \frac{1}{4!} \sum_\sigma \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma}[\sigma] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{4!} e_{a\mu'} e_{b\nu'} e_{c\rho'} e_{d\sigma'} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\alpha \varepsilon_2^\beta \varepsilon_3^\gamma \varepsilon_4^\delta \varepsilon^{abcd} dx^{\mu'} \wedge dx^{\nu'} \wedge dx^{\rho'} \wedge dx^{\sigma'} [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta \wedge \partial_\gamma \wedge \partial_\delta] \right) \\ &= \frac{1}{4!} \sum_\sigma \mathcal{L}_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\alpha \varepsilon_2^\beta \varepsilon_3^\gamma \varepsilon_4^\delta [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta \wedge \partial_\gamma \wedge \partial_\delta] \\ &= \sum_\sigma \mathcal{L}[\sigma]. \end{aligned} \quad (256)$$

Сабирци у дејству које је потребно интегралити по елементима триангулације могу бити у укупно четири облика. Резултат интеграције у сва четири случаја је дат као:

Први случај, 4-симплекс састављен од четири ивице:

$$\begin{aligned} \int \alpha_a \wedge \alpha_b \wedge \alpha_c \wedge \alpha_d &= \sum_\sigma \alpha_a \wedge \alpha_b \wedge \alpha_c \wedge \alpha_d[\sigma] \\ &= \sum_\sigma \alpha_{a\mu} \alpha_{b\nu} \alpha_{c\rho} \alpha_{d\sigma} \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\chi \varepsilon_3^\varphi \varepsilon_4^\xi dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma [\partial_\lambda \wedge \partial_\chi \wedge \partial_\varphi \wedge \partial_\xi] \\ &= \frac{1}{4!} \sum_\sigma \alpha_{a\mu} \alpha_{b\nu} \alpha_{c\rho} \alpha_{d\sigma} \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\chi \varepsilon_3^\varphi \varepsilon_4^\xi (\delta_\lambda^\mu \delta_\chi^\nu \delta_\varphi^\rho \delta_\xi^\sigma + (23)) \\ &= \frac{1}{3000} \sum_\sigma \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \in \sigma} \alpha_a[\varepsilon_1] \alpha_b[\varepsilon_2] \alpha_c[\varepsilon_3] \alpha_d[\varepsilon_4] W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]. \end{aligned} \quad (257)$$

Сабирак $+(23)$ у заградама означава преосталих 23 сабирка који садрже пермутацију индекса са одговарајућим предзнаком, док је функција $W[\dots]$ функција знака која ће бити дефинисана

касније. Други случај, 4-симплекс састављен од две ивице и троугла:

$$\begin{aligned}
\int \alpha_a \wedge \alpha_b \wedge B_c &= \sum_{\sigma} \alpha_a \wedge \alpha_b \wedge B_c[\sigma] = \sum_{\sigma} \alpha_{a\mu} \alpha_{b\nu} \frac{1}{2} B_{c\rho\sigma} \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\chi \varepsilon_3^\varphi \varepsilon_4^\xi (\delta_\lambda^\mu \delta_\chi^\nu \delta_\varphi^\rho \delta_\xi^\sigma + (23)) \\
&= \frac{1}{3000} \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \in \sigma} \alpha_a[\varepsilon_1] \alpha_b[\varepsilon_2] \frac{1}{2} B_{c\rho\sigma} \varepsilon_3^\rho \varepsilon_4^\sigma W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \\
&= \frac{1}{300} \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta \in \sigma} \alpha_a[\varepsilon_1] \alpha_b[\varepsilon_2] B_c[\Delta] W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta].
\end{aligned} \tag{258}$$

Трећи случај, 4-симплекс састављен од два троугла:

$$\begin{aligned}
\int B_a \wedge B_b &= \sum_{\sigma} \frac{1}{2} B_{a\mu\nu} B_{b\rho\sigma} \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\chi \varepsilon_3^\varphi \varepsilon_4^\xi (\delta_\lambda^\mu \delta_\chi^\nu \delta_\varphi^\rho \delta_\xi^\sigma + (23)) \\
&= \frac{1}{30} \sum_{\sigma} \sum_{\Delta_1, \Delta_2 \in \sigma} B_a[\Delta_1] B_b[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2].
\end{aligned} \tag{259}$$

Четврти случај, 4-симплекс састављен од тетраедра и ивице:

$$\int \alpha_a \wedge \gamma_b = \sum_{\sigma} \alpha_{a\mu} \frac{1}{3!} \gamma_{b\nu\rho\sigma} \frac{1}{4!} \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\chi \varepsilon_3^\varphi \varepsilon_4^\xi (\delta_\lambda^\mu \delta_\chi^\nu \delta_\varphi^\rho \delta_\xi^\sigma + (23)) = \frac{1}{20} \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon, \tau \in \sigma} \alpha_a[\varepsilon] \gamma_b[\tau] W[\varepsilon, \tau]. \tag{260}$$

Осим 1, 2, 3 и 4-форми, у дејству се појављују и нула-форме које стављањем на триангулацију живе у вертексима, па је њихова интеграција по елементу триангулације тривијална (вредност поља на вертексу је једнака вредности поља у тачки у којој се налази вертекс). Додавање ових поља на триангулацију се врши независно од интеграције форми, па производ скаларних поља постаје:

$$\int f_1(x) \dots f_n(x) F(x) = \sum_{\sigma} F[\sigma] \frac{1}{5^n} \sum_{v_1, \dots, v_n \in \sigma} f_1[v_1] \dots f_n[v_n], \tag{261}$$

где је $F(x)$ произвољна 4-форма.

У локално инерцијалном референтном систему се тетрада своди на ротацију заједничку за све елементе појединачног 4-симплекса. Деловање форме тетраде на тензор 4-симплекса и последица захтева да компонентететраде представљају компоненте матрице опште координатне трансформације $GL(4, \mathbb{R})$ даје везу:

$$e^a[\varepsilon] = e^a_{\mu} \varepsilon^{\mu} = \Gamma^a_{\mu} \varepsilon^{\mu} = \varepsilon^a, \tag{262}$$

где је Γ^a_{μ} степен слободе фиксирања калибрације.

Вредности квадрата запремина елемената триангулације $l^2[\varepsilon]$, $A^2[\Delta]$, ${}^{(3)}V^2[\tau]$ и ${}^{(4)}V^2[\sigma]$ су реалне функције компонената вектора ивица триангулације дате као:

$${}^{(0)}V^2[v] = -\frac{1}{4!} \frac{1}{(0!)^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda\xi\theta\phi} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\xi} \eta^{\rho\theta} \eta^{\sigma\phi} = 1, \tag{263}$$

$$l^2[\varepsilon] = -\frac{1}{3!} \frac{1}{(1!)^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_{\lambda\xi\theta\phi} \varepsilon_1^{\lambda} \eta^{\nu\xi} \eta^{\rho\theta} \eta^{\sigma\phi} = \varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_1^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \varepsilon_1^2, \tag{264}$$

$$A^2[\Delta] = -\frac{1}{2!} \frac{1}{(2!)^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^{\rho} \varepsilon_2^{\sigma} \varepsilon_{\lambda\xi\theta\phi} \varepsilon_1^{\theta} \varepsilon_2^{\phi} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\xi} = \frac{1}{4} (\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_2^{\nu} \eta_{\mu\nu})^2), \tag{265}$$

$${}^{(3)}V^2[\tau] = -\frac{1}{1!} \frac{1}{(3!)^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^{\nu} \varepsilon_2^{\rho} \varepsilon_3^{\sigma} \varepsilon_{\lambda\xi\theta\phi} \varepsilon_1^{\xi} \varepsilon_2^{\theta} \varepsilon_3^{\phi} \eta^{\mu\lambda}, \tag{266}$$

$${}^{(4)}V^2[\sigma] = -\frac{1}{0!} \frac{1}{(4!)^2} (\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_2^{\nu} \varepsilon_3^{\rho} \varepsilon_4^{\sigma})^2. \tag{267}$$

Пошто су вредности $l^2[\varepsilon]$, $A^2[\Delta]$, ${}^{(3)}V^2[\tau]$ и ${}^{(4)}V^2[\sigma]$ независне од овог степена слободе, вектори ивица се могу заменити векторима ивица у сопственом референтном систему ε^a и запремине се неће променити. Због тога сабирак који садржи производ четири тетраде одговара оријентисаној запремини 4-симплекса:

$$\int \frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \sum_{\sigma} \frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_4^d = - \sum_{\sigma} V[\sigma]. \quad (268)$$

Функција $W[\dots]$ се може дефинисати коришћењем претходне особине. Пошто је триангулација оријентисан граф, сваком троуглу се могу доделити две ивице чијим је редоследом он оријентисан, $\Delta = (\varepsilon_{\Delta 1}, \varepsilon_{\Delta 2})$, сваком тетраедру три ивице чијим је редоследом навођења задата његова оријентација $\tau = (\varepsilon_{\tau 1}, \varepsilon_{\tau 2}, \varepsilon_{\tau 3})$ и сваком 4-симплексу четири ивице $\sigma = (\varepsilon_{\sigma 1}, \varepsilon_{\sigma 2}, \varepsilon_{\sigma 3}, \varepsilon_{\sigma 4})$. Функција $W[\dots]$ је сада количник оријентисане 4-запремине над елементима 4-симплекса који су аргументи функције подељени оријентисаном запремином тог 4-симплекса. Случајеви ове функције су:

$$W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] = -\frac{1}{4!V[\sigma]} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_4^d, \quad (269)$$

$$W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] = -\frac{1}{4!V[\sigma]} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{\Delta 1}^a \varepsilon_{\Delta 2}^b \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d, \quad (270)$$

$$W[\Delta, \tilde{\Delta}] = -\frac{1}{4!V[\sigma]} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_{\Delta 1}^a \varepsilon_{\Delta 2}^b \varepsilon_{\tilde{\Delta} 1}^c \varepsilon_{\tilde{\Delta} 2}^d, \quad (271)$$

$$W[\varepsilon, \tau] = -\frac{1}{4!V[\sigma]} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^a \varepsilon_{\tau 1}^b \varepsilon_{\tau 2}^c \varepsilon_{\tau 3}^d. \quad (272)$$

Пошто ова функција аутоматски враћа вредност нула када су јој аргументи линеарно зависни, није потребно стављати никакве додатне услове у дефиницији суме осим захтева да аргументи припадају истом 4-симплексу.

Први део дефиниције функционалног интеграла је његова мера. У наставку ће бити изложена два метода дискретизације мере. Мера интеграла на триангулацији се дефинише као интеграл по вредности поља на елементу триангулације. Експлицитна дефиниција је на први начин задата као:

$$D\phi = \prod_v d\phi[v], \quad D\alpha = \prod_{\varepsilon} d\alpha[\varepsilon], \quad D\beta = \prod_{\Delta} d\beta[\Delta], \quad D\gamma = \prod_{\tau} d\gamma[\tau], \quad D\delta = \prod_{\sigma} d\delta[\sigma]. \quad (273)$$

Алтернативно је уместо екстензивних варијабли могуће изабрати интензивне. Ако се произвољна n -форма запише као:

$$F = F_{a_1, \dots, a_n} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n}, \quad (274)$$

контракција форме $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n}$ са n -симплекс тензором σ_n даје:

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n}[\sigma_n] = V[\sigma_n] E^{a_1, \dots, a_n}, \quad (275)$$

па је контракција полазне n -forme F једнака:

$$F[\sigma_n] = F_{a_1, \dots, a_n}[\sigma_n] E^{a_1, \dots, a_n} V[\sigma_n] = F[\sigma_n] V[\sigma_n]. \quad (276)$$

Мера интеграла је у овим променљивим једнака:

$$\begin{aligned} D\phi &= \prod_v d\phi[v], & D\alpha &= \prod_\varepsilon l[\alpha]d\alpha[\varepsilon], & D\beta &= \prod_\Delta A[\Delta]d\beta[\Delta], \\ D\gamma &= \prod_\tau V[\tau]d\gamma[\tau], & D\delta &= \prod_\sigma V[\sigma]d\delta[\sigma]. \end{aligned} \quad (277)$$

Будући да је веза између ове две дефиниције смена променљивих, резултат интеграције не би требало да зависи од конкретног избора, па ће у наставку бити корићена прва дефиниција задата у (273).

Следећи корак у триангулацији дејства представља дефинисање извода на триангулацији. Пошто је многострукост састављена од елемената као што су вертекси, ивице, површине итд. извод на објекту n -тог реда треба дефинисати преко објеката $(n-1)$ -ог реда, односно извод на објекту триангулације је функција над границом тог објекта. Због тога је извод поља на триангулацији дефинисан применом Стоксове теореме:

$$\int_{\mathcal{M}_d} dA = \oint_{\partial\mathcal{M}_d} A \implies \sum_{\sigma_d \in T(\mathcal{M})} dA[\sigma_d] = \sum_{\sigma_d \in T(\mathcal{M})} \sum_{\sigma_{d-1} \in \partial\sigma_d} A[\sigma_{d-1}]. \quad (278)$$

Заокружена сума представља суму елемената по оријентисаној граници, тако да се води рачуна о предзнаку сабирака који сада зависи и од усклађености оријентација сегмената границе $\partial\sigma_d$ и самог σ_d . За ту потребу се уводи функција знака $z[\sigma_d, \sigma_{d-1} \in \partial\sigma_d]$ која враћа вредност ± 1 :

$$\sum_{\sigma_{d-1} \in \partial\sigma_d} A[\sigma_{d-1}] = \sum_{\sigma_{d-1} \in \partial\sigma_d} z[\sigma_d, \sigma_{d-1}] A[\sigma_{d-1}]. \quad (279)$$

Вредност функције знака зависи од оријентација елемената триангулације над којима се врши. Аргументи нису произвољне комбинације два елемента триангулације, већ други мора да буде део границе првог и самим тим за једну димензију мањи. Свака ивица се може представити преко два вертекса $\varepsilon = (v_{\varepsilon 1}, v_{\varepsilon 2})$, тако да је оријентација ивице усмерена од другог ка првом вертексу. Функција знака онда враћа вредност:

$$z[\varepsilon, v] = \delta_{v_{\varepsilon 1}, v} - \delta_{v_{\varepsilon 2}, v}. \quad (280)$$

Троугао је задат као уређени пар ивица које полазе из истог вертекса. Његова оријентација је задата редоследом набрајања ивица, па је вредност функције знака:

$$z[\Delta, \varepsilon] = \frac{\varepsilon_{\Delta 1}^a \varepsilon_a}{\varepsilon^a \varepsilon_a} \delta_{\varepsilon_{\Delta 1}, \varepsilon} - \frac{\varepsilon_{\Delta 2}^a \varepsilon_a}{\varepsilon^a \varepsilon_a} \delta_{\varepsilon_{\Delta 2}, \varepsilon} + \frac{(\varepsilon_{\Delta 2} - \varepsilon_{\Delta 1})^a \varepsilon_a}{\varepsilon^a \varepsilon_a} \delta_{\varepsilon_{\Delta 2} - \varepsilon_{\Delta 1}, \varepsilon}. \quad (281)$$

Тетраедар је задат као уређена тројка ивица које полазе из истог вертекса и може се посматрати као уређени пар троуглова са заједничком ивицом $\tau = (\varepsilon_{\tau 1} \varepsilon_{\tau 2}, \varepsilon_{\tau 3}) = (\Delta_{\tau 1}, \Delta_{\tau 2})$, таквих да је $\Delta_{\tau 1} = (\varepsilon_{\tau 1}, \varepsilon_{\tau 2})$ и $\Delta_{\tau 2} = (\varepsilon_{\tau 2}, \varepsilon_{\tau 3})$. Додатно, зарад једноставнијег записа, потребно је увести дефиницију и преостала два троугла $\Delta_{\tau 3} = (\varepsilon_{\tau 3}, \varepsilon_{\tau 1})$ и $\Delta_{\tau 4} = (\varepsilon_{\tau 1} - \varepsilon_{\tau 2}, \varepsilon_{\tau 3} - \varepsilon_{\tau 2})$. Функција знака је онда:

$$z[\tau, \Delta] = \sum_{j=1}^4 \frac{\varepsilon(\Delta_{\tau j})_1^a \varepsilon(\Delta_{\tau j})_2^b \Delta_{ab}}{\Delta^{ab} \Delta_{ab}} \delta_{\Delta_{\tau j}, \Delta}, \quad (282)$$

где је:

$$\Delta^{ab} = \frac{1}{2} (\varepsilon(\Delta)_1^a \varepsilon(\Delta)_2^b - \varepsilon(\Delta)_1^b \varepsilon(\Delta)_2^a) . \quad (283)$$

Коначно, 4-симплекс је дефинисан као уређена четворка четири ивице које излазе из истог вертекса. Он садржи пет позитивно оријентисаних тетраедара $\tau_{\sigma 1} = (\varepsilon_{\sigma 1}, \varepsilon_{\sigma 2}, \varepsilon_{\sigma 3})$, $\tau_{\sigma 2} = (\varepsilon_{\sigma 1}, \varepsilon_{\sigma 4}, \varepsilon_{\sigma 2})$, $\tau_{\sigma 3} = (\varepsilon_{\sigma 1}, \varepsilon_{\sigma 3}, \varepsilon_{\sigma 4})$, $\tau_{\sigma 4} = (\varepsilon_{\sigma 2}, \varepsilon_{\sigma 4}, \varepsilon_{\sigma 3})$ и $\tau_{\sigma 5} = (\varepsilon_{\sigma 1} - \varepsilon_{\sigma 2}, \varepsilon_{\sigma 2} - \varepsilon_{\sigma 3}, \varepsilon_{\sigma 4} - \varepsilon_{\sigma 3})$. Функција знака је у овом случају:

$$z[\sigma, \tau] = \sum_{j=1}^5 \frac{\varepsilon(\tau_{\sigma j})_1^a \varepsilon(\tau_{\sigma j})_2^b \varepsilon(\tau_{\sigma j})_3^c \tau_{abc}}{\tau^{abc} \tau_{abc}} \delta_{\tau_{\sigma j}, \tau} , \quad (284)$$

где је:

$$\tau^{abc} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{abcd} \varepsilon_{defg} \varepsilon_{\tau 1}^e \varepsilon_{\tau 2}^f \varepsilon_{\tau 3}^g . \quad (285)$$

Делта између елемената симплекса је дефинисана када су оба елемента истог типа. Ти елементи су дати уређеним n -торкама ивица, а свака ивица је дата као уређени пар вертекса, одакле се сваком елементу симплекса може придружити скуп вертекса над којим је разапет. Делта између два елемента симплекса A и B , разапетих над вертексима v_{Ai} и v_{Bj} је онда дата као перманента матрице делти над вертексима:

$$\delta_{A,B} = \text{perm} (\delta_{v_{Ai}, v_{Bj}}) . \quad (286)$$

Постојање ове делте у дефиницији функције знака обезбеђује да функција врати вредност нула у колико њен други аргумент није део границе првог аргумента. Због тога је могуће проширити домен сумације по другом аргументу на цео 4-симплекс без промене резултата суме.

Интеграција целе 4-форме која у себи садржи диференцијал је:

$$\int \gamma \wedge d\phi = \frac{1}{20} \sum_{\sigma} \sum_{\tau, \varepsilon \in \sigma} \gamma[\tau] \sum_{v \in \varepsilon} \phi[v] z[\varepsilon, v] W[\tau, \varepsilon] = \frac{1}{20} \sum_{\sigma} \sum_{\tau, \varepsilon, v \in \sigma} \gamma[\tau] \phi[v] z[\varepsilon, v] W[\tau, \varepsilon] , \quad (287)$$

$$\begin{aligned} \int \beta \wedge d\alpha &= \frac{1}{30} \sum_{\sigma} \sum_{\Delta_1, \Delta_2 \in \sigma} \beta[\Delta_1] \sum_{\varepsilon \in \Delta_2} \alpha[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \\ &= \frac{1}{30} \sum_{\sigma} \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \beta[\Delta_1] \alpha[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] , \end{aligned} \quad (288)$$

$$\begin{aligned} \int \alpha \wedge d\beta &= \frac{1}{20} \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon, \tau \in \sigma} \alpha[\varepsilon] \sum_{\Delta \in \tau} \beta[\Delta] z[\tau, \Delta] W[\varepsilon, \tau] \\ &= \frac{1}{20} \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon, \tau, \Delta \in \sigma} \alpha[\varepsilon] \beta[\Delta] z[\tau, \Delta] W[\varepsilon, \tau] , \end{aligned} \quad (289)$$

$$\int d\gamma = \sum_{\sigma} \sum_{\tau \in \sigma} \gamma[\tau] z[\sigma, \tau] . \quad (290)$$

Након дефинисања свих правила и случајева који се јављају у процесу дискретизације дејства, могуће је дефинисати очекивану вредност произвољне опсервабле на триангулацији

по угледу на (205):

$$\begin{aligned}
\langle F(\phi_k) \rangle &= \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{Z}} \left(\prod_v \int d\phi[v] d\psi[v] d\bar{\psi}[v] d\Lambda[v] d\zeta[v] dH[v] dM[v] \right. \\
&\quad \prod_{\varepsilon} \int d\alpha[\varepsilon] d\omega[\varepsilon] de[\varepsilon] d\tilde{\lambda}[\varepsilon] d\lambda[\varepsilon] d\bar{\lambda}[\varepsilon] \\
&\quad \prod_{\Delta} \int dB[\Delta] d\beta[\Delta] d\lambda[\Delta] \prod_{\tau} \int d\tilde{\gamma}[\tau] d\gamma[\tau] d\bar{\gamma}[\tau] \Bigg) \\
&\quad \prod_{\sigma} \left(\exp \left(\frac{i}{30} \sum_{\Delta_1 \in \sigma} B_{\alpha}[\Delta_1] \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \alpha^{\alpha}[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \alpha^{\beta}[\varepsilon_1] \alpha^{\gamma}[\varepsilon_2] f_{\beta\gamma}{}^{\alpha} W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \right) \right. \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{30} \sum_{\Delta_1 \in \sigma} B_{[ab]}[\Delta_1] \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \omega^{[ab]}[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \omega^{[cd]}[\varepsilon_1] \omega^{[ef]}[\varepsilon_2] f_{[cd][ef]}{}^{[ab]} W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \right) \right. \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{20} \sum_{\varepsilon_1 \in \sigma} e_a[\varepsilon_1] \left(\sum_{\tau, \Delta \in \sigma} \beta^a[\Delta] z[\tau, \Delta] W[\varepsilon_1, \tau] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{15} \sum_{\varepsilon_2, \Delta \in \sigma} \omega^{[cd]}[\varepsilon_2] \beta^b[\Delta] \triangleright_{[cd]b}{}^a W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \right) \right) \right. \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{5} \sum_{v \in \sigma} \phi^A[v] \left(\sum_{\tau \in \sigma} \tilde{\gamma}_A[\tau] z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon, \tau \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \tilde{\gamma}^B[\tau] \alpha^{\alpha}[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B A} \right) \right) \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{5} \sum_{v \in \sigma} \bar{\psi}_A[v] \left(\sum_{\tau \in \sigma} \gamma^A[\tau] z[\sigma, \tau] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon, \tau \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \gamma^B[\tau] \left(\alpha^{\alpha}[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B}{}^A + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab] B}{}^A \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{5} \left(\sum_{\tau \in \sigma} \bar{\gamma}_A[\tau] z[\sigma, \tau] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon_1, \tau \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \bar{\gamma}^B[\tau] \left(\alpha^{\alpha}[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B A} + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab] B A} \right) \right) \sum_{v \in \sigma} \psi^A[v] \right) \right. \\
&\quad \exp \left(\frac{i}{30} \sum_{\Delta_1 \in \sigma} \lambda^{\alpha}[\Delta_1] \left(\sum_{\Delta_2 \in \sigma} B_{\alpha}[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{12}{50} C_{\alpha\beta} \sum_{v \in \sigma} M^{\beta}{}_{ab}[v] \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp \left(\frac{i}{30} \sum_{\Delta_1 \in \sigma} \lambda^{[ab]}[\Delta_1] \left(\frac{\varepsilon_{[ab]cd}}{80\pi l_p^2} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] - \sum_{\Delta_2 \in \sigma} B_{[ab]}[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \right) \right) \\
& \exp \left(\frac{i}{20} \sum_{\varepsilon_1 \in \sigma} \tilde{\lambda}^A[\varepsilon_1] \left(\sum_{\tau \in \sigma} \tilde{\gamma}_A[\tau] W[\varepsilon_1, \tau] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{750} \sum_{v \in \sigma} H_{abcA}[v] \sum_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \right) \\
& \exp \left(\frac{i}{20} \sum_{\varepsilon_1 \in \sigma} \bar{\lambda}_A[\varepsilon_1] \left(\sum_{\tau \in \sigma} \gamma^A[\tau] W[\varepsilon_1, \tau] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{i\varepsilon_{abcd}}{4500} \sum_{v \in \sigma} \sum_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c (\gamma^d \psi[v])^A W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \right) \\
& \exp \left(-\frac{i}{20} \sum_{\varepsilon_4 \in \sigma} \left(\sum_{\tau \in \sigma} \bar{\gamma}_A[\tau] W[\tau, \varepsilon_4] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i\varepsilon_{abcd}}{4500} \sum_{v \in \sigma} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \sigma} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c (\bar{\psi}[v] \gamma^d)_A W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \lambda^A[\varepsilon_4] \right) \\
& \exp \left(\frac{-2\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd}}{7500} \sum_{v_1, v_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta \in \sigma} \bar{\psi}_A[v_1] \gamma_5 \gamma^a \psi^A[v_2] \varepsilon_1^b \varepsilon_2^c \beta^d[\Delta] W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \right) \\
& \exp \left(\frac{i}{1500} \sum_{v_1 \in \sigma} \zeta_\alpha^{ab}[v_1] \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d \left(\sum_{\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{50} \varepsilon_{cdef} \varepsilon_3^e \varepsilon_4^f \sum_{v_2 \in \sigma} M^\alpha_{ab}[v_2] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{10} f_{\beta\gamma}{}^\alpha \alpha^\beta[\varepsilon_3] \alpha^\gamma[\varepsilon_4] \right) - \sum_{\Delta, \varepsilon_3 \in \sigma} \alpha^\alpha[\varepsilon_3] z[\Delta, \varepsilon_3] W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \eta_{ac} \eta_{bd} \right) \right) \\
& \exp \left(\frac{i}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, v \in \sigma} \Lambda^{abA}[\varepsilon_1] W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{5} H_{abcA}[v] \varepsilon^{cdef} \varepsilon_{2d} \varepsilon_{3e} \varepsilon_{4f} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\phi_A[v] z[\varepsilon_2, v] + \frac{1}{5} \phi^B[v] \alpha^\alpha[\varepsilon_2] \triangleright_{\alpha BA} \right) \varepsilon_{3a} \varepsilon_{4b} \right) \right) \\
& \exp \left(\frac{-i}{36000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_4^d \left(\frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} + \chi v^4 - \frac{2\chi v^2}{25} \sum_{v_1, v_2 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{125} Y_{ABC} \sum_{v_1, v_2, v_3 \in \sigma} \bar{\psi}^A[v_1] \psi^B[v_2] \phi^C[v_3] + \frac{\chi}{625} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \phi_B[v_3] \phi^B[v_4] \right) \right) \\
& F(\phi_k[\sigma]) .
\end{aligned} \tag{291}$$

Овиме је сваком пољу у квантној 3BF теорији са везама придружен одговарајући елемент триангулације и постављена је једначина за очекивану вредност произвољне опсервабле. Да би дефиниција квантне теорије била комплетна, потребно је још дефинисати домен интеграције по сваком пољу.

5.2 Прелазак са интеграције по пољима на интеграцију по групама

Да би домени интеграције по пољима били дефинисани, интеграл по алгебри ће бити замењен интегралом по групи. Ови интеграли се дефинишу увођењем појма инваријантне интеграције. Овде треба направити разлику између инваријантне интеграције и инваријантног интеграла. Инваријантни интеграл је интеграл чија је вредност оператор који комутира са свим елементима групе. Инваријантна интеграција подразумева интеграцију по елементима групе, на такав начин да резултат интеграције не зависи од преуређења елемената групе. Преуређење елемената групе се задаје деловањем једног елемента групе $h \in G$ на цео домен интеграције (све елементе групе) с лева или с десна. У општем случају се дефиниције леве и десне инваријантне интеграције разликују:

$$\int_G f(g) d\mu_L(g) = \int_G f(hg) d\mu_L(g), \quad \int_G f(g) d\mu_D(g) = \int_G f(gh) d\mu_D(g), \quad d\mu_L(g) \neq d\mu_D(g). \quad (292)$$

Величине $d\mu_L(g)$ и $d\mu_D(g)$ су лева и десна Хаарова мера. На основу Јакобијеве теореме, јасно је да су тежинске функције у Хааровој мери Јакобијани:

$$\mu_L(hg) = \frac{\mu_L(g)}{\left| \det \frac{\partial(hg)_i}{\partial g_j} \right|}, \quad \mu_D(gh) = \frac{\mu_D(g)}{\left| \det \frac{\partial(gh)_i}{\partial g_j} \right|}. \quad (293)$$

Пошто исказ важи за свако $g, h \in G$, може се узети $g = e$, па је резултат:

$$\mu_L(h) = \frac{\mu_L(e)}{\left| \det \frac{\partial(hg)_i}{\partial g_j} \right|_{g \rightarrow e}}, \quad \mu_D(h) = \frac{\mu_D(e)}{\left| \det \frac{\partial(gh)_i}{\partial g_j} \right|_{g \rightarrow e}}. \quad (294)$$

Заправо, фиксирањем константе нормирања у мери $\mu_L(e) = \mu_D(e) = 1$, може се конструисати веза између мера и придружене репрезентације:

$$|\det(\text{ad}g)| = \left| \det \frac{\partial(ghg^{-1})_i}{\partial h_j} \right|_{h \rightarrow e} = \left| \det \frac{\partial(ghg^{-1})_i \partial(gh)_k}{\partial(ghg^{-1})_k \partial h_j} \right|_{h \rightarrow e} = \frac{\mu_L(g)}{\mu_D(g)}. \quad (295)$$

Коначно, мера у интегралу по групи је:

$$d\mu_L(h) = \frac{\mu_L(e)}{\left| \det \frac{\partial \theta_i(hg)}{\partial \theta_j(g)} \right|_{g \rightarrow e}} d^n \theta, \quad d\mu_D(h) = \frac{\mu_D(e)}{\left| \det \frac{\partial \theta_i(gh)}{\partial \theta_j(g)} \right|_{g \rightarrow e}} d^n \theta. \quad (296)$$

Главне особине Хаарове мере потребне за даљу анализу се могу изразити помоћу следеће две теореме:

Теорема 2. *Лијева група G има једнаку леву и десну Хаарову меру ако и само ако је за свако $g \in G$:*

$$|\det(\text{ad}(g))| = 1. \quad (297)$$

Овај исказ је еквивалентан захтеву да је траг придружене репрезентације елемента Лијеве алгебре једнак нули.

Доказ. Директно следи из (295). □

Директна последица теореме је да су лева и десна Хаарова мера Абелових Лијевих група једнаке. Пошто се n -параметарска Абелова група факторише на производ n једнопараметарских, тежинска функција n -параметарске Абелове групе се такође факторише на производ n једнопараметарских тежинских функција. Коначно, за једнопараметарску Абелову групу је тежинска функција:

$$\mu(g) = \frac{1}{\left| \frac{\partial (ge^t)_1}{\partial t} \right|_{t \rightarrow 0}} = \frac{1}{|\tau|} = \mu(e), \quad (298)$$

где је τ генератор Абелове групе. У случају групе Грасманових бројева $\mathbb{G}$, тежинска функција у Хааровој мери мора да буде константа, јер линеарни допринос мора да дође од подинтегралне функције.

Теорема 3. *Лева и десна Хаарова мера специјалних $SL(n, \mathbb{F})$ група, над пољем $\mathbb{F}$ су једнаке, јер њихове структурне константе задовољавају услов $f_{ab}^b = 0$, што је траг придружене репрезентације њихове алгебре.*

Доказ. Пошто структурне константе не зависе од избора репрезентације, докле год је репрезентација верна, репрезентација $(\tau^{\alpha\beta})_{ab}$ генератора $SL(n, \mathbb{F})$ групе се може изабрати као:

$$(\tau^{\alpha\beta})_{ab} = \delta_a^\alpha \delta_b^\beta - \delta_a^\beta \delta_b^\alpha. \quad (299)$$

Матрична репрезентација комутатора $[\tau^{\alpha\beta}, \tau^{\gamma\delta}]_{ab}$ је антисиметрична (по ab), па је додатно множење репрезентацијом генератора $(\tau^{ab})_{cd}$ не мења, одакле се закључује да она мора бити једнака структурној константи:

$$[\tau^{\alpha\beta}, \tau^{\gamma\delta}]_{ab} = \delta^{\alpha\beta} (\delta_a^\gamma \delta_b^{\delta n} - \delta_b^\delta \delta_a^{\gamma n}) + \delta^{\gamma\delta} (\delta_b^\alpha \delta_a^{\beta n} - \delta_a^\beta \delta_b^{\alpha n}) + \delta_a^\alpha \delta_b^\delta \delta^{\beta\gamma} - \delta_a^\gamma \delta_b^\beta \delta^{\alpha\delta}, \quad (300)$$

$$[\tau^{\alpha\beta}, \tau^{\gamma\delta}]_{ab} (\tau^{ab})_{cd} = [\tau^{\alpha\beta}, \tau^{\gamma\delta}]_{cd} \implies f^{\alpha\beta \gamma\delta}{}_{ab} = [\tau^{\alpha\beta}, \tau^{\gamma\delta}]_{ab}. \quad (301)$$

Директном провером се добија да је $f^{\alpha\beta \gamma\delta}{}_{\gamma\delta} = 0$. $\square$

Овим теоремама су обухваћене све групе које се појављују у 3-групи за Стандардни модел (12). То значи да све групе које се појављују теорији имају исту леву и десну Хаарову меру, док је тежинска функција у Хааровој мери Абелових група константа.

Интеграл по групи је онда дефинисан као:

$$I_G[f] = \int_G f(g) d\mu(g) \quad (302)$$

и параметризован је параметрима алгебре θ_i , па се интеграција врши по овим параметрима. Тада облик интеграла постаје:

$$I_G[f] = \int_{\mathbb{F}^n} \Pi(\theta) f(g(\theta)) \mu(g(\theta)) d^n \theta, \quad (303)$$

где је $\Pi(\theta)$ превоугаона прозорска функција-компактни носач скупа вредности параметара алгебре. Дефиниција се може проширити и на некомпактне групе узимањем константне прозорске функције $\Pi(\theta) = 1$. Скуп $\mathbb{F}$ ком припадају параметри алгебре по којима се интеграл је, у зависности од врсте поља, скуп реалних или Грасманових бројева (у случају бозонских и фермионских поља, редом).

Сва поља која се јављају у дефиницији 3BF теорије са везама су елементи једне или више алгебра група из структуре 3-групе (12) и зарад лакше прегледности их је могуће приказати таблично. Пошто теорија садржи фермионе, потребно је групу $SO(3, 1)$ заменити универзално наткривајућом $SL(2, \mathbb{C})$, јер $SO(3, 1)$ не садржи репрезентације по којима се фермионска поља трансформишу (ротације са основним периодом 4π). Прва табела садржи поља која припадају само једној алгебри, истовремено показујући којој алгебри поље припада и на ком симплексу живи:

симплекс	$SL(2, \mathbb{C})$	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64} \times \mathbb{G}^{64}$
$\cdot$				ϕ^A	ψ^A, ψ_A
$/$	$\omega^{[ab]}$	α^α	e^a	$\tilde{\lambda}^A$	λ^A, λ_A
$\triangle$	$\lambda_{[ab]}, B_{[ab]}$	λ_α, B_α	β^a		
$\triangleleft$				$\tilde{\gamma}^A$	$\gamma^A, \bar{\gamma}_A$
$\star$					

док друга садржи множитеље који носе индексе више различитих алгебри:

$(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$	$M_{\alpha ab}, \zeta^{\alpha ab}$
$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4$	Λ^{abA}
$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4$	H^{abcA}

Сви множитељи у другој табели живе само у вертексима.

5.2.1 Делта на групи и Питер-Вејлова теорема

У теорији коначних група (група са коначним бројем елемената $|G|$) је дефинисан скуп ортогоналних функција на групи, карактера $\chi^{(\Lambda)}(g)$, пребројаних иредуцибилним репрезентацијама групе, као и функција на групи $\delta(g)$ која се назива и њеном регуларном репрезентацијом, тако да важи:

$$\delta(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e, \\ |G| & g = e. \end{cases} \quad (304)$$

Разлагање функције $\delta(g)$ по базису карактера иредуцибилних репрезентација групе даје:

$$\delta(g) = \sum_{\Lambda} \dim \Lambda \chi^{(\Lambda)}(g). \quad (305)$$

Уопштење ових исказа и доказ егзистенције ортогоналног скупа карактера у случају компактних Лијевих група је дат Питер-Вејловом теоремом. Разлог употребе ове теореме је да би се интеграција Диракове делте добијене у процесу квантизације могла извршити у сваком иредуцибилном подпростору засебно, а потом се интеграл по групи заменио сумом по иредуцибилним репрезентацијама. Овај део поступка квантизације је уобичајен у моделима спинске пене. У случају 3BF теорије, чија је симетрија описана 3-групом, би уопштење овог приступа требало да Диракову делту замени делтом на 3-групи како би се интеграција по пољима вршила у ортогоналним компонентама разлагања репрезентације 3-групе. Међутим, како теорија репрезентација 3-група није развијена у довољној мери, резултати Питер-Вејлове теореме се још увек не могу уопштити на структуру 3-групе. Због тога је основна идеја да се уместо у ортогоналним подпросторима репрезентација 3-групе, интеграција делти врши унутар иредуцибилних подпростора група од којих је 3-група састављена.

Због тога је потребно одредити параметре алгебре, Хаарове мере, прозорске функције и регуларне репрезентације (делте) група које се јављају у теорији:

- $U(1)$ група

Алгебра је параметризована једним параметром θ , а тежинска функција у Хааровој мери је константа:

$$d\mu(g) = \frac{1}{2\pi} d\theta. \quad (306)$$

Домен интеграције је задат прозорском функцијом облика:

$$\Pi(\theta) = H(\theta + \pi)H(\pi - \theta), \quad (307)$$

где је $H(s)$ Хевисајдова тета функција. Делта на групи је:

$$\delta(g) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\theta + 2k\pi). \quad (308)$$

- $SU(2)$ група

Алгебра је параметризована са три параметра, али мера, прозорска функција и делта на групи зависе само од инваријантног растојања које одговара растојању у сферним координатама $r = (\theta_\alpha \theta^\alpha)^{\frac{1}{2}}$. Мера, прозорска функција и делта на групи су:

$$d\mu(g) = \frac{1}{2\pi} \sin^2 \left(\frac{1}{2} r \right) dr, \quad (309)$$

$$\Pi(r) = H(r)H(2\pi - r), \quad (310)$$

$$\delta(g) = -\frac{4\pi}{\sin \left(\frac{1}{2} r \right)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(r + 4k\pi), \quad (311)$$

што након парцијалне интеграције постаје:

$$\delta(g) = \frac{4\pi}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} r \right)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(r + 4k\pi). \quad (312)$$

- $SU(3)$ група

Алгебра $SU(3)$ групе је осмопараметарска која има $S^3 \times S^5$ топологију, па се у складу с тим може извршити параметризација простора [57]. Инваријантна растојања од којих зависи мера, прозорска функција и делта на групи су:

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1} \sin \left(\frac{1}{3} \arctg \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^3 - 3\sigma_2^2}} \right) \right), \quad \xi = \sqrt{\sigma_1} \cos \left(\frac{1}{3} \arctg \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^3 - 3\sigma_2^2}} \right) \right), \quad (313)$$

$$\sigma_1 = \theta_\alpha \theta^\alpha, \quad \sigma_2 = d_{\alpha\beta\gamma} \theta^\alpha \theta^\beta \theta^\gamma. \quad (314)$$

Коефицијенти $d_{\alpha\beta\gamma}$ су коефицијенти из антикомутационих релација:

$$\{\tau_\alpha, \tau_\beta\} = d_{\alpha\beta\gamma} \tau^\gamma. \quad (315)$$

Мера, прозорска функција и делта на групи су:

$$d\mu(g) = \frac{2}{3\pi^2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \right) \sin^2 \left(\frac{1}{4} (\varphi + 3\xi) \right) \sin^2 \left(\frac{1}{4} (\varphi - 3\xi) \right) d\varphi d\xi, \quad (316)$$

$$\Pi(\xi, \varphi) = H(\xi + 2\pi)H(2\pi - \xi)H(\varphi + 2\pi)H(2\pi - \varphi), \quad (317)$$

$$\delta(g) = 4\pi^2 \frac{(\partial_\varphi^2 + 3\partial_\xi^2 - 4\partial_\varphi\partial_\xi) \partial_\varphi}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\xi}{2}\right) - \sin(\varphi)} \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi + 2k\pi)\delta(\xi + \varphi + 4l\pi). \quad (318)$$

Поново, након парцијалне интеграције се добија:

$$\delta(g) = \frac{3\pi^2}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\sin^2\left(\frac{1}{4}(\varphi + 3\xi)\right)\sin^2\left(\frac{1}{4}(\varphi - 3\xi)\right)} \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi + 2k\pi)\delta(\xi + \varphi + 4l\pi). \quad (319)$$

- $SL(2, \mathbb{C})$ група

Алгебра је параметризована са шест параметара и може се идентификовати са комплексификованом $su2$ алгебром. Ова алгебра се може разложити на директни збир две коњуговано комплексне $su2$ алгебре чији су параметри $\theta_a + i\rho_a$ и $\theta_a - i\rho_a$, где су $\theta_a = \varepsilon_{abc}\omega^{[bc]}$ и $\rho_a = \omega_{[0a]}$. Мера, прозорска функција и делта на групи (иако је $SL(2, \mathbb{C})$ некомпактна група, може се дефинисати делта на групи као функција параметара алгебре) су по аналогји са $SU(2)$ групом, функције од инваријантних растојања $(\theta_a\theta^a - \rho_a\rho^a + 2i\theta_a\rho^a)^{\frac{1}{2}}$ и $(\theta_a\theta^a - \rho_a\rho^a - 2i\theta_a\rho^a)^{\frac{1}{2}}$:

$$d\mu(g) = \frac{1}{4\pi^2} \left| \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(\theta_i - i\rho_i)(\theta^i - i\rho^i)} \right) \right|^2 \times d(\theta_a\theta^a - \rho_a\rho^a + 2i\theta_a\rho^a)^{\frac{1}{2}} d(\theta_a\theta^a - \rho_a\rho^a - 2i\theta_a\rho^a)^{\frac{1}{2}}, \quad (320)$$

$$\Pi(\rho_i, \theta_i) = H \left(2\pi - \frac{(|\theta|^2 - |\rho|^2)H(|\theta|^2 - |\rho|^2) + 2|\theta_i\rho^i|H(|\rho|^2 - |\theta|^2)}{\sqrt{(|\rho|^2 - |\theta|^2)^2 + 4(\rho_i\theta^i)^2}} \right), \quad (321)$$

$$\delta(g) = 4\pi^2 \frac{\delta \left(\text{Im} \left(\sqrt{(\theta_i - i\rho_i)(\theta^i - i\rho^i)} \right) \right)}{\left| \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(\theta_i - i\rho_i)(\theta^i - i\rho^i)} \right) \right|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\text{Re} \left(\sqrt{(\theta_i - i\rho_i)(\theta^i - i\rho^i)} \right) + 4k\pi \right). \quad (322)$$

- групе $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{G}$

Прво треба нагласити да су ове групе адитивне и да се њихова алгебра поклапа са групом. Алгебре су једнопараметарске са реалним, комплексним или Грасмановим бројем као параметром. Тежинска функција у мери је једнака јединици, прозорска функција обухвата цео скуп бројева, а делта је стандардна Диракова делта над параметром θ :

$$d\mu(g) = d\theta, \quad \Pi(\theta) = 1, \quad \delta(g) = \delta(\theta). \quad (323)$$

У случају Грасманових параметара, да би интеграл био ненулти, Диракова делта од параметра је једнака самом параметру, јер за Грасманове бројеве важе правила за интеграцију:

$$\int_{\mathbb{G}} d\theta = 0, \quad \int_{\mathbb{G}} \theta d\theta = 1 \implies \delta(\theta) = \theta. \quad (324)$$

Овде треба издвојити неколико општих особина делте на групи. Прва, представља јединични оператор у простору функција на групи:

$$\int_G f(g)\delta(gh^{-1})d\mu(g) = f(h). \quad (325)$$

У специјалном случају, када се за функцију на групи изабере баш функција која враћа елемент групе у репрезентацији D , добија се репрезентација инверзног елемента:

$$D(h^{-1}) = \int_G D(g)\delta(gh)d\mu(g). \quad (326)$$

Ако се овај интеграл напише по параметрима алгебре, у случају компактних група је могуће да више различитих избора параметара у алгебри одговара истом елементу у групи, што може да поквари јединственост инверзног елемента групе до на мултипликативни фактор. Због тога је важно да прозорска функција одсеца простор параметара алгебре тако да се сваком елементу групе додељује тачно један скуп вредности параметара у алгебри који му одговара. На тај начин је обезбеђена јединственост инверза у алгебри, као и јединственост неутралног елемента у алгебри. То даље имплицира да ће производ делте на групи и прозорске функције дати само једну Диракову делту у тачки која одговара неутралном елементу алгебре и јединичном елементу у групи. Коначно, множењем Хааровом мером, добија се једнакост:

$$\Pi(\theta)\delta(g(\theta))\mu(g(\theta))d^n\theta = \delta(\theta)d^n\theta. \quad (327)$$

На овај начин је одређено како се Диракове делте добијене интеграцијом по пољима мењају делтама на групи и како прозорске функције дефинишу домен интеграције по пољима. Међутим, како квантна 3BF теорија са везама није тополошка, осим Диракових делти у дефиницији очекиване вредности опсервабле (207), стоји и сама опсервабла али и остали чиниоци који нису облика делте и који у свом разлагању садрже све иредуцибилне компоненте група. Због тога би разлагање дефиниције очекиване вредности опсервабле на иредуцибилне компоненте група подразумевало разлагање производа делти и осталих израза у дефиницији што је крајње нетривијално (због постојања ненултих Клебш-Гордонових коефицијената у разлагању производа репрезентација).

На овом месту се мора направити отклон од стандардне процедуре квантизације по угледу на моделе спинске пене и добијене Диракове делте се морају интегралити по дефиницији, јер замена делтом на групи не олакшава израчунавања у теорији.

5.3 Подела дејства на тополошки део и везе

Дејство 3BF теорије са везама се састоји од тополошког дела и веза. Даљи поступак конструкције квантне 3BF теорије са везама подразумева интеграцију по одређеним пољима по угледу на конструкцију тополошке теорије (66). Сума по стањима за тополошку теорију има облик производа делти на групи, па се поља по којима се врши интеграција бирају тако да се добије што је могуће више делти. Интеграли по множитељима који као резултат интеграције дају Диракову делту су облика:

$$\int \exp \left(i \sum_{\sigma} \sum_{k \in \sigma} f[k] F[k, \sigma] \right) \prod_k df[k] = \mathcal{N} \prod_k \delta \left(\sum_{\sigma \ni k} F[k, \sigma] \right). \quad (328)$$

Поља по којима се интегралли су множитељи $B_\alpha[\Delta]$, $B_{[ab]}[\Delta]$, $\beta^a[\Delta]$, $\tilde{\gamma}^A[\tau]$, $\bar{\gamma}_A[\tau]$, $\gamma^A[\tau]$, $\Lambda^{abA}[\varepsilon]$ и $\zeta_{\alpha ab}[v]$. Да би резултат интеграције по овим пољима био Диракова делта, потребно је да опсервабла не зависи од ових поља. Добијени резултат се може поделити на део који одговара тополошкој инваријанти, интеракциони део и део са јаким везама.

$$\langle F(\varphi_k) \rangle = \frac{\mathcal{N}}{Z} \int \prod_{\sigma, \tau, \Delta, \varepsilon, v} d\varphi[\tau, \Delta, \varepsilon, v] \text{TI}[\mathcal{F}[\varphi] - \lambda[\varphi]] \text{INT}[\lambda[\varphi] - G[\varphi]] \text{SC}[\varphi] F(\varphi_k). \quad (329)$$

За разлику од тополошке теорије, где је интеграција вршена по пољима B , C и D , која одговарају множитељима B , тетрадама и фермионима и скаларним пољима, у случају конструкције квантне 3BF теорије са везама се не може интегралити по тетрадама и пољима материје, јер произвољна опсервабла може нетривијално да зависи од њих. Међутим, како је вредност суме по стањима у тополошкој 3BF теорији (66) независна од редоследа интеграције, може се добити и алтернативна тополошка инваријанта интеграцијом по пољима B , β и γ . Ова алтернативна тополошка инваријанта је истог облика као први чинилац у изразу (329) који

је једнак:

$$\begin{aligned}
\text{TI}[\mathcal{F}[\varphi] - \lambda[\varphi]] = & \prod_{\Delta_1} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \Delta_1} \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \alpha^\alpha[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \alpha^\beta[\varepsilon_1] \alpha^\gamma[\varepsilon_2] f_{\beta\gamma}{}^\alpha W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] + \sum_{\Delta_2 \in \sigma} \lambda^\alpha[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \right) \right) \\
& \prod_{\Delta_1} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \Delta_1} \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \omega^{[ab]}[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] - \sum_{\Delta_2 \in \sigma} \lambda^{[ab]}[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \omega^{[cd]}[\varepsilon_1] \omega^{[ef]}[\varepsilon_2] f_{[cd][ef]}^{[ab]} W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \right) \\
& \prod_{\Delta} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \Delta} \left(\sum_{\varepsilon, \tau \in \sigma} e_a[\varepsilon] z[\tau, \Delta] W[\varepsilon, \tau] + \frac{1}{15} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} e_b[\varepsilon_1] \omega^{[cd]}[\varepsilon_2] \triangleright_{[cd]a}{}^b W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\pi i l_p^2}{750} \sum_{v_1, v_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \bar{\psi}_A[v_1] \gamma_5 \gamma^d \psi^A[v_2] \varepsilon_1^b \varepsilon_2^c \varepsilon_{dbca} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \right) \right) \\
& \prod_{\tau} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \tau} \left(\sum_{v \in \sigma} \phi^A[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_\alpha{}^B{}_A \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \tilde{\lambda}^B[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \right) \right) \\
& \prod_{\tau} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \tau} \left(\sum_{v \in \sigma} \bar{\psi}_B[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha A}{}^B \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]A}{}^B) \right) + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \bar{\lambda}_A[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \right) \right) \\
& \prod_{\tau} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \tau} \left(\left(\delta_B^A z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B}{}^A \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]B}{}^A) \right) \sum_{v \in \sigma} \psi^B[v] - \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \right) \right) . \tag{330}
\end{aligned}$$

Део који одговара јаким везама је једнак:

$$\begin{aligned}
\text{SC}[\varphi] = & \prod_{\varepsilon_1} \delta \left(\sum_{\sigma \ni \varepsilon_1} \left(\sum_{v, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{5} H_{abcA}[v] \varepsilon^{cdef} \varepsilon_{2d} \varepsilon_{3e} \varepsilon_{4f} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left(\phi_A[v] z[\varepsilon_2, v] + \frac{1}{5} \phi^B[v] \alpha^\alpha[\varepsilon_2] \triangleright_{\alpha BA} \right) \varepsilon_{3a} \varepsilon_{4b} \right) \right) \right) \\
& \prod_v \delta \left(\sum_{\sigma \ni v} \left(\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \sigma} \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d \left(\sum_{\varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{50} \varepsilon_{cdef} \varepsilon_3^e \varepsilon_4^f \sum_{v \in \sigma} M^\alpha{}_{ab}[v] \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{1}{10} f_{\beta\gamma}{}^\alpha \alpha^\beta[\varepsilon_3] \alpha^\gamma[\varepsilon_4] \eta_{ac} \eta_{bd} \right) - \sum_{\Delta \in \sigma} \alpha^\alpha[\varepsilon_3] z[\Delta, \varepsilon_3] W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \eta_{ac} \eta_{bd} \right) \right) \right) , \tag{331}
\end{aligned}$$

док је део који одговара интеракцијама једнак:

$$\begin{aligned}
\text{INT}[\lambda[\varphi] - G[\varphi]] = \prod_{\sigma} \left[\exp \left(\frac{-i}{125} \sum_{\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, v \in \sigma} C_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha}[\Delta] M^{\beta}_{ab}[v] \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \right. \\
\exp \left(\frac{i}{2400\pi l_p^2} \sum_{\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \varepsilon_{[ab]cd} \lambda^{[ab]}[\Delta] \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \\
\exp \left(\frac{-i}{15000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, v \in \sigma} \tilde{\lambda}^A[\varepsilon_1] H_{abcA}[v] \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \\
\exp \left(\frac{-i}{90000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, v \in \sigma} \bar{\lambda}_A[\varepsilon_1] (\gamma^d \psi[v])^A \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c \varepsilon_{abcd} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \\
\exp \left(\frac{-i}{90000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, v \in \sigma} \bar{\psi}_A[v] (\gamma^d \lambda[\varepsilon_4])^A \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_{abcd} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \\
\exp \left(\frac{-i}{36000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_4^d \left(\frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} + \chi v^4 - \frac{2\chi v^2}{25} \sum_{v_1, v_2 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{125} Y_{ABC} \sum_{v_1, v_2, v_3 \in \sigma} \bar{\psi}^A[v_1] \psi^B[v_2] \phi^C[v_3] \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{\chi}{625} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \phi_B[v_3] \phi^B[v_4] \right) \right) \left. \right]. \quad (332)
\end{aligned}$$

Даљу интеграцију по Лагранжевим множитељима није једноставно спровести по дефиницији јер облик израза зависи од облика триангулације, међутим, интегрални су добро дефинисани. Због тога се предвиђања теорије могу израчунати нумерички коришћењем прилагођеног софтвера за конкретан избор триангулације. Овиме је у потпуности задата дефиниција квантне 3BF теорије са везама која одговара квантној Ајнштајн-Картановој теорији гравитације са спин-спин контактном интеракцијом спрегнутом са Стандардним Моделом према релацији (226). У наредном поглављу ће, комплетности ради, бити извршена прелиминарна анализа семикласичног лимеса ове квантне теорије.

5.4 Прелиминарна анализа семикласичног лимеса

Семикласични лимес представља испитивање предвиђања теорије у стању у ком се квантне поправке могу занемарити. Један од начина за испитивање семикласичног лимеса је већ представљен у поглављу 4.2 узимањем лимеса у ком све неордеђености опсервабли теже нули. Овакав приступ је тешко поновити у случају произвољне опсервабле јер би то подразумевало да постоји општа формула за очекивану вредност произвољне опсервабле у којој су сви интегрални из дефиниције (329) решени. Како ово није случај, семикласичан лимес се испитује рачунањем ефективног дејства. Након одређивања ефективног дејства се над добијеним резултатом спроводи двоструки лимес:

$$\lambda_{\varphi_k} \gg l_{\varepsilon} \gg l_p, \quad (333)$$

где су λ_{φ_k} придружене таласне дужине компонената поља φ_k , које су обрнуто пропорционале брзини промене поља кроз просторвреме, l_{ε} је дужина ивице 4-симплекса на триангулацији и

l_p је Планкова дужина. Другим речима, поља су споропроменљива у односу на период ћелија триангулације, тако да се конфигурација поља на многострукости може описати глатко са део-по-део константним вредностима на елементима триангулације, јер су ћелије довољно мале и у довољно великом броју, док је са друге стране димензија ћелије много већа од Планкове дужине, па је таквом триангулацијом немогуће описати ефекте на скалама на којима се традиционално очекују доминантни ефекти квантне гравитације.

У овом поглављу, ефективно дејство неће бити рачунато, већ ће двоструки лимес бити примењен директно на дефиницију очекиване вредности опсервабле. Применом горње стране лимеса, да су поља споропроменљива у односу на учестаност дискретизације (број симплекса је велики унутар периода промене поља), вредност поља на једном симплексу се може апроксимирати средњом вредношћу поља на околним симплексима. Последица тога је да се делте у тополошкој инваријанти и јаким везама, чији је аргумент сума по симплексима, могу заменити производом делти по симплексима, чији аргумент зависи само од једног симплекса. Овај апроксимативни облик чиниоца са јаким везама је:

$$\begin{aligned}
\text{SC}[\varphi] = & \prod_{\sigma} \left[\delta \left(\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \sigma} \varepsilon_1^c \varepsilon_2^d \left(\sum_{\varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{50} \varepsilon_{cdef} \varepsilon_3^e \varepsilon_4^f \sum_{v \in \sigma} M^{\alpha}_{ab}[v] \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{1}{10} f_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \alpha^{\beta}[\varepsilon_3] \alpha^{\gamma}[\varepsilon_4] \eta_{ac} \eta_{bd} \right) - \sum_{\Delta \in \sigma} \alpha^{\alpha}[\varepsilon_3] z[\Delta, \varepsilon_3] W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \eta_{ac} \eta_{bd} \right) \right) \\
& \prod_{\varepsilon_1 \in \sigma} \delta \left(\sum_{v, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\frac{1}{5} H_{abcA}[v] \varepsilon^{cdef} \varepsilon_{2d} \varepsilon_{3e} \varepsilon_{4f} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\phi_A[v] z[\varepsilon_2, v] + \frac{1}{5} \phi^B[v] \alpha^{\alpha}[\varepsilon_2] \triangleright_{\alpha BA} \right) \varepsilon_{3a} \varepsilon_{4b} \right) \right) \right] , \tag{334}
\end{aligned}$$

док је део који одговара тополошкој инваријанти једнак:

$$\begin{aligned}
\text{TI}[\mathcal{F}[\varphi] - \lambda[\varphi]] = & \prod_{\sigma} \left[\prod_{\Delta_1 \in \sigma} \delta \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \alpha^\alpha[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\
& + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \alpha^\beta[\varepsilon_1] \alpha^\gamma[\varepsilon_2] f_{\beta\gamma}{}^\alpha W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] + \sum_{\Delta_2 \in \sigma} \lambda^\alpha[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \Big) \\
& \prod_{\Delta_1 \in \sigma} \delta \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \omega^{[ab]}[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \\
& + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \omega^{[cd]}[\varepsilon_1] \omega^{[ef]}[\varepsilon_2] f_{[cd][ef]}{}^{[ab]} W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] - \sum_{\Delta_2 \in \sigma} \lambda^{[ab]}[\Delta_2] W[\Delta_1, \Delta_2] \Big) \\
& \prod_{\Delta \in \sigma} \delta \left(\sum_{\Delta, \varepsilon, \tau \in \sigma} e_a[\varepsilon] z[\tau, \Delta] W[\varepsilon, \tau] + \frac{1}{15} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta \in \sigma} e_b[\varepsilon_1] \omega^{[cd]}[\varepsilon_2] \triangleright_{[cd]a}{}^b W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \right. \\
& + \frac{4\pi i l_p^2}{750} \sum_{v_1, v_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta \in \sigma} \bar{\psi}_A[v_1] \gamma_5 \gamma^d \psi^A[v_2] \varepsilon_1^b \varepsilon_2^c \varepsilon_{dbca} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta] \Big) \\
& \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\sum_{v \in \sigma} \phi^A[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_\alpha{}^B{}_A \right) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \tilde{\lambda}^B[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \Big) \\
& \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\sum_{v \in \sigma} \bar{\psi}_B[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha A}{}^B + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]A}{}^B) \right) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \bar{\lambda}_A[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \Big) \\
& \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\left(\delta_B^A z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B}{}^A + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]B}{}^A) \right) \sum_{v \in \sigma} \psi^B[v] \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau] \right) \right] . \tag{335}
\end{aligned}$$

Аргументи делти добијених у чиниоцу са јаким везама зависе од поља $M^\alpha{}_{ab}$ и H_{abcA} . Међутим, у колико опсервабла чија се очекивана вредност рачуна не зависи од ових поља, остатак дефиниције не зависи од вредности ових поља у сваком вертексу симплекса појединачно, већ само од средње вредности ових поља на целом 4-симплексу, па се увођењем смена:

$$\Xi^\alpha{}_{ab}[\sigma] = \frac{1}{5} \sum_{v \in \sigma} M^\alpha{}_{ab}[v], \quad \Theta_{abcA}[\sigma] = \frac{1}{5} \sum_{v \in \sigma} H_{abcA}[v], \tag{336}$$

ове делте могу свести на облик погодан за интеграцију. Интеграција по осталим вредностима поља у појединачним вертексима симплекса не даје допринос очекиваној вредности опсервабле, већ само мења вредност нормализационе константе $\mathcal{N}$.

Чинилац са јаким везама добијен овим сменама је облика:

$$\begin{aligned}
\text{SC}[\varphi] = & \prod_{\sigma} \left[\frac{1}{V^{|\alpha||[ab]|}[\sigma]} \delta \left(\Xi^{\alpha}_{ab}[\sigma] - \frac{1}{V[\sigma]} \left(\frac{1}{300} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \Delta \in \sigma} \alpha^{\alpha}[\varepsilon_3] z[\Delta, \varepsilon_3] W[\Delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \varepsilon_{1a} \varepsilon_{2b} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4} f_{\beta\gamma}^{\alpha} \alpha^{\beta}[\varepsilon_3] \alpha^{\gamma}[\varepsilon_4] \varepsilon_{1a} \varepsilon_{2b} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \right) \right. \\
& \frac{1}{V^{|\alpha|(D-1)|[ab]|}} \delta \left(\Theta_{abcA}[\sigma] + \frac{1}{6V[\sigma]} \frac{1}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \left(\sum_{v \in \varepsilon_1} \phi_A[v] z[\varepsilon_1, v] \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{5} \sum_{v \in \sigma} \phi^B[v] \alpha^{\alpha}[\varepsilon_1] \triangleright_{\alpha BA} \right) \varepsilon_{2c} \varepsilon_{3a} \varepsilon_{4b} \right) \right]. \tag{337}
\end{aligned}$$

У случају тополошке инваријанте, постоји више врста смена које треба увести у циљу свођења делти на облик погодан за интеграцију. Прву врсту чине смене за поља $\lambda^{[ab]}$ и λ^{α} :

$$Q^{[ab]}[\Delta] = \frac{1}{3} \sum_{\tilde{\Delta} \in \sigma} \lambda^{[ab]}[\tilde{\Delta}] W[\Delta, \tilde{\Delta}], \quad Q^{\alpha}[\Delta] = \frac{1}{3} \sum_{\tilde{\Delta} \in \sigma} \lambda^{\alpha}[\tilde{\Delta}] W[\Delta, \tilde{\Delta}]. \tag{338}$$

Израз у интеракционом чиниоцу који садржи поља $\lambda^{[ab]}$ и λ^{α} је облика:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{300} \sum_{\tilde{\Delta}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \lambda[\tilde{\Delta}] W[\tilde{\Delta}] \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b &= \frac{1}{300} \sum_{\tilde{\Delta}, \Delta \in \sigma} \left(6\lambda[\tilde{\Delta}] \Delta^{ab} W[\tilde{\Delta}, \Delta] + \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \notin \Delta} \lambda[\tilde{\Delta}] \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b W[\tilde{\Delta}, \varepsilon_1, \varepsilon_2] \right) \\
&= \frac{1}{30} \sum_{\tilde{\Delta}, \Delta \in \sigma} \lambda[\tilde{\Delta}] W[\tilde{\Delta}, \Delta] \Delta^{ab} = \frac{1}{10} \sum_{\Delta \in \sigma} Q[\Delta] \Delta^{ab}. \tag{339}
\end{aligned}$$

Допринос додатна четири сабирка која долазе од случаја када две ивице не формирају троугао се такође може апроксимирати коришћењем лимеса споропроменљивих поља доприносом осталих сабирака код којих избор ивица чини троугао. Другу врсту смена чине смене за поља $\tilde{\lambda}^A$, λ^A и $\bar{\lambda}_A$:

$$Q^A[\tau] = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon] W[\varepsilon, \tau]. \tag{340}$$

Слично као у претходном случају, израз који се појављује у интеракционом чиниоцу, а који садржи поља $\tilde{\lambda}^A$, λ^A и $\bar{\lambda}_A$ је облика:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon_1] \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \\
&= \frac{1}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \tau \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon_1] \left(96W[\varepsilon_1, \tau] \tau^{abc} + \sum_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \notin \tau} \varepsilon_2^a \varepsilon_3^b \varepsilon_4^c W[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \right) \\
&= \frac{1}{3000} \sum_{\varepsilon_1, \tau \in \sigma} \lambda^A[\varepsilon_1] (150W[\varepsilon_1, \tau] \tau^{abc}) = \frac{1}{5} \sum_{\tau \in \sigma} Q^A[\tau] \tau^{abc}, \tag{341}
\end{aligned}$$

Овде је поново, као у претходном случају, допринос преостала 54 сабирка који потичу од избора ивица које не чине тетраедар симплекса апроксимиран на основу лимеса споропроменљивих поља доприносом осталих сабирака који одговарају тетраедрима.

Трећу врсту чини скуп смена за поље $\omega^{[ab]}$. Смена се уводи у два корака:

$$\omega^{[ab]}[\varepsilon] = \Omega^{[ab]e}[\sigma]\varepsilon_e, \quad A_{abc}[\sigma] = \frac{1}{2} (\Omega_{abc}[\sigma] - \Omega_{acb}[\sigma]) . \quad (342)$$

Пошто је смена $\Omega^{[ab]e}[\sigma]$ уведена за цео 4-симплекс, постоји избор 4 независне ивице ε на основу којих се може одредити њена вредност у зависности од $\omega^{[ab]}[\varepsilon]$ и скупа четири независних ивица ε_a . Јакобијан смене је нетривијалан и исти као у (211):

$$d\omega^{[ab]}[\varepsilon] = \mathcal{N}' V[\sigma]^{[ab]} d\Omega[\sigma]^{[ab]c}, \quad (343)$$

где нормализациони фактор потиче од чињенице да са десне стране једнакости постоји већи број независних компонената поља него на левој. Међутим, како подинтегрна функција не зависи од ових додатних компонената (јер се у изразима појављује само производ $\Omega^{[ab]e}[\sigma]\varepsilon_e$), интеграција по овим додатним компонентама даје само додатни нормализациони фактор $\frac{1}{\mathcal{N}'}$. Јакобијан друге смене је константан, а инверзна смена променљивих

$$\omega^{ab}[\varepsilon] = (A^{abc}[\sigma] - A^{bac}[\sigma] - A^{cab}[\sigma]) \varepsilon_c . \quad (344)$$

Ова смена је, због једноставности записа, експлицитно уведена само у делти која је настала интеграцијом везе за торзију, док је у осталим делтама подразумевано да имплицитно важи.

Тополошка инваријанта након увођења ових смена постаје:

$$\begin{aligned} \text{TI}[\mathcal{F}[\varphi] - \lambda[\varphi]] = & \prod_{\sigma} \left[\prod_{\Delta_1 \in \sigma} \delta \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \alpha^\alpha[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \right. \\ & + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \alpha^\beta[\varepsilon_1] \alpha^\gamma[\varepsilon_2] f_{\beta\gamma}{}^\alpha W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] + 3Q^\alpha[\Delta_1] \Big) \\ & \prod_{\Delta_1 \in \sigma} \delta \left(\sum_{\Delta_2, \varepsilon \in \sigma} \omega^{[ab]}[\varepsilon] z[\Delta_2, \varepsilon] W[\Delta_1, \Delta_2] \right. \\ & + \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \omega^{[cd]}[\varepsilon_1] \omega^{[ef]}[\varepsilon_2] f_{[cd][ef]}^{[ab]} W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2] - 3Q^{[ab]}[\Delta_1] \Big) \\ & \frac{1}{V^{[ab]}(\frac{|a|}{2}-1)[\sigma]} \delta \left(A_{abc}[\sigma] - \frac{1}{20V[\sigma]} \sum_{\Delta, \varepsilon, \tau \in \sigma} \varepsilon_a z[\tau, \Delta] W[\varepsilon, \tau] \Delta^{ef} \varepsilon_{efbc} \right. \\ & + \frac{2\pi i l_p^2}{25} \sum_{v_1, v_2 \in \sigma} \bar{\psi}_A[v_1] \gamma_5 \gamma^d \psi^A[v_2] \varepsilon_{dbca} \Big) \\ & \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\sum_{v \in \sigma} \phi^A[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] \alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_\alpha{}^B{}_A \right) + \tilde{Q}^B[\tau] \right) \\ & \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\sum_{v \in \sigma} \bar{\psi}_B[v] \left(\delta_A^B z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha A}{}^B + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]A}{}^B) \right) + \bar{Q}_a[\tau] \right) \\ & \prod_{\tau \in \sigma} \delta \left(\left(\delta_B^A z[\sigma, \tau] + \frac{1}{20} \sum_{\varepsilon \in \sigma} W[\varepsilon, \tau] (\alpha^\alpha[\varepsilon] \triangleright_{\alpha B}{}^A + \omega^{[ab]}[\varepsilon] \triangleright_{[ab]B}{}^A) \right) \sum_{v \in \sigma} \psi^B[v] - Q^A[\tau] \right) \Big] , \end{aligned} \quad (345)$$

Интеракциони чинилац након увођења смена постаје:

$$\begin{aligned}
\text{INT}[\lambda[\varphi] - G[\varphi]] = & \prod_{\sigma} \left[\exp \left(\frac{-6i}{5} \sum_{\tilde{\Delta}, \Delta \in \sigma} C_{\alpha\beta} Q^{\alpha}[\tilde{\Delta}] W[\Delta, \tilde{\Delta}] \Xi^{\beta}_{ab}[\sigma] \Delta^{ab} \right) \right. \\
& \exp \left(\frac{i}{80\pi l_p^2} \sum_{\Delta, \tilde{\Delta} \in \sigma} \varepsilon_{[ab]cd} Q^{[ab]}[\tilde{\Delta}] W[\Delta, \tilde{\Delta}] \Delta^{cd} \right) \\
& \exp \left(-i \sum_{\tau \in \sigma} \tilde{Q}^A[\tau] \Theta_{abcA}[\sigma] \tau^{abc} \right) \\
& \exp \left(\frac{-i}{5} \sum_{\tau \in \sigma} \bar{Q}_A[\tau] (\gamma^d \psi[v])^A \varepsilon_{abcd} \tau^{abc} \right) \\
& \exp \left(\frac{-i}{5} \sum_{\sigma \in \sigma} \bar{Q}_A[\tau] (\gamma^d \lambda[\varepsilon_4])^A \varepsilon_{abcd} \tau^{abc} \right) \\
& \exp \left(\frac{-i}{36000} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \sigma} \varepsilon_{abcd} \varepsilon_1^a \varepsilon_2^b \varepsilon_3^c \varepsilon_4^d \left(\frac{\Lambda}{8\pi l_p^2} + \chi v^4 - \frac{2\chi v^2}{25} \sum_{v_1, v_2 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \right. \right. \\
& + \frac{1}{125} Y_{ABC} \sum_{v_1, v_2, v_3 \in \sigma} \bar{\psi}^A[v_1] \psi^B[v_2] \phi^C[v_3] \\
& \left. \left. + \frac{\chi}{625} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 \in \sigma} \phi_A[v_1] \phi^A[v_2] \phi_B[v_3] \phi^B[v_4] \right) \right) \left. \right]. \quad (346)
\end{aligned}$$

Након интеграције свих делти, резултујући сабирци у експоненту одговарају лимесу споро-променљивих поља за дејство за Стандардни Модел на триангулацији у закривљеном простору са додатним сабирком за контактну спин-спин интеракцију и сабирак који одговара скаларној кривини, који треба посебно анализирати. Тај сабирак је једнак:

$$iS_{\text{grav}} = \frac{i}{80\pi l_p^2} \sum_{\sigma} \sum_{\Delta \in \sigma} \tilde{Q}^{[ab]}[\Delta] \Delta^{cd} \varepsilon_{abcd} = \frac{i}{8\pi l_p^2} \sum_{\sigma} \frac{1}{10} \sum_{\Delta \in \sigma} \frac{\varepsilon_{[ab]cd} \tilde{Q}^{[ab]}[\Delta] \Delta^{cd}}{V[\Delta]} V[\Delta]. \quad (347)$$

Величина $\tilde{Q}^{[ab]}[\Delta]$ је бездимензионална и представља угаони фактор једнак:

$$\tilde{Q}^{[ab]}[\Delta] = \frac{1}{3} \sum_{\varepsilon, \tilde{\Delta} \in \sigma} \tilde{\omega}^{[ab]}[\varepsilon] z[\tilde{\Delta}, \varepsilon] W[\tilde{\Delta}, \Delta] + \frac{1}{30} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \sigma} \omega^{[a|c]}[\varepsilon_1] \omega_c^{[b]}[\varepsilon_2] W[\Delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2], \quad (348)$$

где је

$$\tilde{\omega}^{[ab]}[\varepsilon] = \frac{1}{V[\sigma]} \frac{1}{20} \sum_{\tilde{\varepsilon}, \Delta, \tau \in \sigma} z[\tau, \Delta] W[\tilde{\varepsilon}, \tau] \Delta^{ef} \tilde{\varepsilon}_c \tilde{\varepsilon}^q (\delta_q^a \varepsilon_{ef}^{bc} - \delta_q^b \varepsilon_{ef}^{ac} - \delta_q^c \varepsilon_{ef}^{ab}). \quad (349)$$

Производ функција знака у овом изразу намеће захтев да ивица $\tilde{\varepsilon}$ и троугао Δ чине тетраедар ненулта запремине. (За фиксан избор троугла постоје два тетраедра која је садрже и сваки од њих се добија тако што се ивица $\tilde{\varepsilon}$ може одабрати на три начина.) Због тога допринос суми даје само компонента производа тотално антисиметрична по индексима ових елемената, па се израз поједностављује и постаје:

$$\tilde{\omega}^{[ab]}[\varepsilon] = -\frac{1}{V[\sigma]} \frac{1}{10} \sum_{\tilde{\varepsilon}, \Delta, \tau \in \sigma} W[\tilde{\varepsilon}, \tau] z[\tau, \Delta] \Delta^{ef} \tilde{\varepsilon}_q \varepsilon_q \varepsilon_{ef}^{[ab]} = -\frac{3}{20} \frac{1}{V[\sigma]} \sum_{\tau \in \sigma} \tau^{efq} \varepsilon_q \varepsilon_{ef}^{[ab]}. \quad (350)$$

Други сабирак у изразу (348) се може сматрати поправком вишег реда, док први сабирак даје допринос облика:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} \frac{1}{10} \sum_{\Delta \in \sigma} \frac{\varepsilon_{[ab]cd} \Delta^{cd}}{A[\Delta]} A[\Delta] \frac{1}{3} \sum_{\varepsilon, \tilde{\Delta} \in \sigma} z[\tilde{\Delta}, \varepsilon] W[\tilde{\Delta}, \Delta] \frac{-3}{20} \frac{1}{V[\sigma]} \sum_{\tau \in \sigma} \tau^{efq} \varepsilon_q \varepsilon_{ef}^{[ab]} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\Delta \in \sigma} \frac{\Delta_{ef}}{2A[\Delta]} A[\Delta] \frac{1}{10} \sum_{\varepsilon, \tilde{\Delta} \in \sigma} z[\tilde{\Delta}, \varepsilon] W[\tilde{\Delta}, \Delta] \frac{1}{5} \frac{1}{V[\sigma]} \sum_{\tau \in \sigma} \tau^{efq} \varepsilon_q. \end{aligned} \quad (351)$$

Разломак $\frac{\Delta_{ef}}{2A[\Delta]}$ одговара редукованом тензору Леви-Чивите на троуглу Δ , а производ три суме даје диједарски угао између два тетраедра над троуглом Δ , означен са $\theta_{\Delta, \sigma}$. Због тога је дејство за гравитационо поље (у апроксимацији доприноса првог сабирка) облика:

$$S_{\text{grav}} \approx \frac{1}{8\pi l_p^2} \sum_{\sigma} \sum_{\Delta \in \sigma} \theta_{\Delta, \sigma} A[\Delta] = \frac{1}{8\pi l_p^2} \sum_{\Delta} A[\Delta] \sum_{\sigma \ni \Delta} \theta_{\Delta, \sigma} = \frac{1}{8\pi l_p^2} \sum_{\Delta} \delta_{\Delta} A[\Delta] = S_R, \quad (352)$$

где је δ_{Δ} дефицит угао (сума свих диједарских углова). У колико је простор раван, са сигна-туром простора Минковског, дефицит угао је једнак нули, док одступање овог угла од нуле указује на присуство ненулте кривине.

Добијено дејство S_R одговара дејству за Реџе гравитацију која описује класичну гравита-цију на део по део равној многострукости. То значи да је у прелиминарној анализи семикласичног лимеса добијен резултат за очекивану вредност опсервабле облика:

$$\langle F(\varphi_k) \rangle = \frac{\mathcal{N}}{Z} \prod_v \int d\phi[v] d\psi[v] d\bar{\psi}[v] \int \prod_{\varepsilon} d\alpha[\varepsilon] d\varepsilon |V[\sigma]|^{-M} F(\varphi_k) \exp \left(iS_R + iS_{ECC}^{(M)} \right), \quad (353)$$

где је дејство $S_{ECC}^{(M)}$ дејство за стандардни модел са додатним сабирком који описује контактну спин-спин интеракцију, а $M = 150$.

Овиме је завршена прелиминарна анализа семикласичног лимеса у којој су добијена деј-ства класичних теорија у експоненту. Ова анализа указује да квантна 3BF теорија са везама има добар семикласичан лимес, јер је за сличне теорије које садрже само дејство за гравита-ционо поље у овом облику већ показано да имају добар семикласичан лимес [58, 59].

6 Закључак

Конструкција реалистичне квантне теорије гравитације и материје и даље представља отворен проблем у савременој теоријској физици.

У овом раду је дат предлог модела обједињене квантне теорије заснован на концепту тол-полошког $3BF$ дејства са везама које дају физичке степене слободе и математичког појма 3 -групе, коришћеног за опис симетрије. Први резултат изложен у глави [3](#) се бавио испитивањем симетрије класичне теорије задате $3BF$ дејством са везама, испитивањем механизма за њено нарушење, било експлицитно, додавањем веза у процесу конструкције реалистичне теорије, или спонтано Хигсовим механизмом. Добијени резултати су потврдили да је класична теорија добијена на овакав начин потпуно еквивалентна класичној теорији задатој Стандардним моделом спрегнутим са Ајнштајн-Картановом гравитацијом. Ова еквиваленција је успостављена и на нивоу симетрије целог дејства и на нивоу једначина кретања.

Потврда ове еквиваленције је значила да је било могуће приступити испитивању еквиваленције између теорија на квантном нивоу. Ово питање је обрађено у следећој глави [4](#). Резултати анализе су потврдили да у извесној мери постоји еквиваленција између квантне и класичне теорије под одређеним условима. Први услов је да се мере у функционалним интегралима дефинишу на исти начин и други, да се посматрају само опсервабле које се могу истовремено дефинисати у обе теорије. Под тим условима су конструисане везе [\(226\)](#) између парова опсервабли са истом очекиваном вредношћу у квантној $3BF$ теорији са везама и квантној Ајнштајн-Картановој контактної теорији спрегнутој са Стандардним Моделом (ЕСС). Осим ове везе, дефиниција теорије садржи чланове у дејству који намећу нулте граничне услове на поља тетраде, Хигсова и Диракова поља. Ови гранични услови се могу променити додавањем одговарајућих површинских чланова у дејству, али је сама анализа тог поступка изван предмета истраживања изложеног овде. На крају, дати су илустративни примери на којима се концептуално може тестирати разлика у предвиђањима ове две квантне теорије у конкретном експерименту.

Коначно, након успостављања везе између две квантне теорије, последња глава [5](#) се бави конструкцијом квантне $3BF$ теорије и прелиминарном анализом њеног семикласичног лимеса. Конструкција квантне теорије је извршена триангулацијом многострукости и постављањем једначине за очекивану вредност произвољне опсервабле на таквој део-по-део равној многострукости. Главни резултат главе представља сама дефиниција квантне теорије [\(329\)](#) јер се комбиновањем ове дефиниције и везе [\(226\)](#) може репродуковати дефиниција квантне Ајнштајн-Картанове теорије спрегнуте са Стандардним Моделом на триангулацији. Испитивање семикласичног лимеса је спроведено применом апроксимације споропроменљивих поља над дефиницијом очекиване вредности произвољне опсервабле, чиме је добијено дејство класичне теорије у експоненту. На тај начин је резултат сведен на претходно проверене моделе са добрим семикласичним лимесом и оправдана је исправност конструкције квантне теорије [\(329\)](#). Међутим, за праву анализу семикласичног лимеса ове теорије, потребно је одредити одговарајуће ефективно дејство и испитати његов лимес према [\(333\)](#), што је ван предмета овог истраживања.

А Додаци

А.1 Доказ Теореме 1

Доказ. Особина G -инваријантности билинеарне форме $\langle _, _ \rangle_{\mathfrak{h}}$ је дефинисана као

$$\langle g \triangleright h_1, g \triangleright h_2 \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathfrak{h}}, \quad (354)$$

за свако $g \in G$ и свако $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$. Записивањем компонената g , h_1 и h_2 у одговарајућем базису, једноставно је уочити да се лева страна једначине може записати као:

$$\langle g \triangleright h_1, g \triangleright h_2 \rangle_{\mathfrak{h}} = h_1^a h_2^c \left[g_{ac} + g^\alpha (\triangleright_{\alpha c}{}^d g_{ad} + \triangleright_{\alpha a}{}^d g_{dc}) \right] + \mathcal{O}(g^2). \quad (355)$$

Изједначавањем са десном страном, очигледно је да се десна страна поништава са првим сабирком у загради. Затим се применом особине симетричности билинеарне форме остатак израза у загради своди на:

$$\triangleright_{\alpha ca} + \triangleright_{\alpha ac} = 0, \quad (356)$$

како је и тврђено у теорему. Антисиметричност преостала два дејства $\triangleright_{\alpha\beta\gamma}$ и $\triangleright_{\alpha AB}$ се доказује аналогно.

Додатно, недегенерисаност билинеарне форме g_{ab} имплицира да постоји њен инверз, означен са g^{ab} . Затим, контракцијом (356) са g^{ac} добија се базис-независан исказ да је дејство $\triangleright$ бестражно

$$\triangleright_{\alpha a}{}^a = 0. \quad (357)$$

Поред тога, може се изабрати базис у Лијевој алгебри $\mathfrak{h}$ такав да билинеарна форма g_{ab} , па самим тим и њен инверз, дијагонална. На основу идентитета

$$\triangleright_{\alpha a}{}^b = \triangleright_{\alpha ac} g^{cb} \quad (358)$$

се може закључити да, у овом конкретном базису, $\triangleright_{\alpha a}{}^b$ мора да буде пропорционално $\triangleright_{\alpha ab}$ јер је $g^{cb} = 0$ за $c \neq b$. Због тога, пошто је $\triangleright_{\alpha ab}$ антисиметричан према (356), мора бити једнак нули за $a = b$, што даље имплицира да је $\triangleright_{\alpha a}{}^b$ такође нула у том случају. Другим речима, $\triangleright_{\alpha a}{}^b$ има нулте елементе на дијагонали у односу на други и трећи индекс у овом базису, као што је и тврђено теоремом. Исте особине се за остала два дејства $\triangleright_{\alpha\beta\gamma}$ и $\triangleright_{\alpha A}{}^B$ доказују аналогно. $\square$

А.2 Произвољност κ -билинеарне форме

У одељку 3.2.4 је уведена билинеарна форма $\kappa^{\alpha\beta}$ у (167) као и нове променљиве (171) које задовољавају листу идентитета (172). Да би била обезбеђена један на један веза између старих и нових променљивих, у овим идентитетима је потребно да број независних променљивих са леве и десне стране једнакости буде исти. Штавише, ни једна од ових променљивих (171) не сме бити експлицитно помножена нулом током конструкције идентитета (172). Ови захтеви имају нетривијалне последице на произвољност избора билинеарне форме $\kappa^{\alpha\beta}$. На пример, први идентитет са листе (172) је

$$\theta^\alpha \wedge \rho_\alpha = \lambda^{\bar{A}} \wedge \gamma_{\bar{A}}. \quad (359)$$

Из дефиниције променљиве ρ_α у (171), може се закључити да дејство пројектора (168) не мења ρ_α

$$\rho_\alpha = P_\alpha{}^\beta \rho_\beta. \quad (360)$$

Ово имплицира да овај пројектор не мења леву страну идентитета (359) па важи:

$$\theta^\alpha \wedge \rho_\alpha = \theta^\alpha \wedge P_\alpha^\beta \rho_\beta. \quad (361)$$

Коришћењем захтева да ни једна променљива не сме да буде помножена нулом у току конструкције идентитета (359), закључује се да дејство пројектора мора да чува све променљиве θ^α . Даљим коришћењем дефиниције променљивих θ^α добија се нетривијални услов на билинеарну форму $\kappa^{\alpha\beta}$:

$$\theta^\alpha = \theta^\beta P_\beta^\alpha \quad \Rightarrow \quad -2\kappa^{\alpha\gamma} \triangleright_\gamma {}^H \bar{A} \lambda^{\bar{A}} \equiv -2\kappa^{\alpha\gamma} P_\gamma^\delta \triangleright_\delta {}^H \bar{A} \lambda^{\bar{A}} = -2P_\beta^\alpha \kappa^{\beta\gamma} P_\gamma^\delta \triangleright_\delta {}^H \bar{A} \lambda^{\bar{A}}, \quad (362)$$

који захваљујући произвољности поља $\lambda^{\bar{A}}$ имплицира да важи

$$\kappa^{\alpha\gamma} P_\gamma^\delta = P_\beta^\alpha \kappa^{\beta\gamma} P_\gamma^\delta. \quad (363)$$

Пошто је $\kappa^{\alpha\beta}$ симетрична билинеарна форма, транспоновањем (363) се добија да пројектор и $\kappa^{\alpha\beta}$ комутирају

$$\kappa^{\alpha\gamma} P_\gamma^\delta = P_\gamma^\alpha \kappa^{\gamma\delta}. \quad (364)$$

Сада се овај услов може искористити тако да се редукује произвољност билинеарне форме $\kappa^{\alpha\beta}$. Комбиновањем (169) и (364) се добија

$$P_\gamma^\alpha A^{\gamma\delta} [\delta_\delta^\beta - P_\delta^\beta] = [\delta_\gamma^\alpha - P_\gamma^\alpha] A^{\gamma\delta} P_\delta^\beta, \quad (365)$$

који је задовољен само ако

$$A^{\alpha\delta} [\delta_\delta^\beta - P_\delta^\beta] = [\delta_\gamma^\alpha - P_\gamma^\alpha] A^{\gamma\delta} = [\delta_\gamma^\alpha - P_\gamma^\alpha] A^{\gamma\delta} [\delta_\delta^\beta - P_\delta^\beta]. \quad (366)$$

Будући да је димензија подпростора ортогоналног пројектора једнака један, произвољност билинеарне форме $\kappa^{\alpha\beta}$ је редукована на један слободан параметар, а облик ове произвољности је дат у (173):

$$\kappa^{\alpha\beta} \rightarrow \kappa^{\alpha\beta} + [\delta_\gamma^\alpha - P_\gamma^\alpha] A^{\gamma\delta} [\delta_\delta^\beta - P_\delta^\beta]. \quad (367)$$

Произвољност овог параметра гарантује постојање инвертибилне билинеарне форме $\kappa_{\alpha\beta}^{-1}$, која такође комутира са пројектором, што је последица (364).

Сада треба испитати утицај ове произвољности на дејство (174). Коришћењем чињенице да инверзна билинеарна форма делује на променљиве (171) у (174) и да су променљиве (171) непромењене при дејству пројектора, дејство (174) и матрица квадрата маса (176) зависе само од пројекције инверзне билинеарне форме $\kappa_{\alpha\beta}^{-1} P_\gamma^\beta$. Произвољност инверза билинеарне форме $\kappa_{\alpha\beta}^{-1}$ се може изразити као Тејлоров ред по произвољној билинеарној форми $A^{\gamma\delta}$ као

$$\kappa_{\alpha\beta}^{-1} \rightarrow \kappa_{\alpha\gamma}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n ([\delta - P] A [\delta - P] \kappa^{-1})^n]^\gamma_\beta, \quad (368)$$

одакле се може уочити да пројекција инверзне билинеарне форме не зависи од избора произвољне билинеарне форме $A^{\gamma\delta}$. Ово даље имплицира да су дејство (174) и матрица квадрата маса (176) једнозначно дефинисани.

А.3 Докази идентитета који садрже Диракову делту

Докази идентитета који садрже Диракову делту над реалним и Грасмановим пољима се могу извести праволинијским рачуном:

- идентитет (199):

$$\begin{aligned}
& \int D\varphi D\phi_k \delta(\varphi^{aB} F_B^A(\phi_k) - G^{aA}(\phi_k)) H(\varphi, \phi_k) \\
&= \int D(\varphi^{aB} F_B^A(\phi_k)) D\phi_k \left| \frac{\frac{\delta(\varphi F(\phi_k) F^{-1}(\phi_k))^{aA}}{\delta\phi_n}}{\frac{\delta(\varphi F(\phi_k) F^{-1}(\phi_k))^{aA}}{\delta(\varphi F(\phi_k))^{bB}}} \frac{\delta\phi_m}{\delta\phi_n} \right| \delta(\varphi^{aB} F_B^A(\phi_k) - G^{aA}(\phi_k)) H(\varphi, \phi_k) \\
&= \int D\hat{\varphi} D\phi_k |\delta_b^a F^{-1}{}_B{}^A(\phi_k)| \delta(\hat{\varphi}^{aA} - G^{aA}(\phi_k)) H(\hat{\varphi}^{aB} F^{-1}{}_B{}^A(\phi_k), \phi_k) \\
&= \int D\phi_k \frac{1}{|F(\phi_k)|^{|a|}} H(G^{aB}(\phi_k) F^{-1}{}_B{}^A(\phi_k), \phi_k), \tag{369}
\end{aligned}$$

- идентитет (201):

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{G}^n} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n e^{i\theta_1(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k)} F(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) \\
&= \int_{\mathbb{G}^n} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n (1 + i\theta_1(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k)) \\
&\quad \times (\theta_3 \dots \theta_k f_{01\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n) + \dots + \theta_2 \dots \theta_{k-1} f_{1\dots 10}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)) \\
&= i \int_{\mathbb{G}^n} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n \theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_k (f_{01\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n) \\
&\quad + \dots + (-1)^l f_{11\dots 10_l 1\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)) \\
&= -i \int_{\mathbb{G}^n} d\theta_3 \dots d\theta_n d\theta_2 d\theta_1 \theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_k (f_{01\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n) \\
&\quad + \dots + (-1)^l f_{11\dots 10_l 1\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)) \\
&= -i \int_{\mathbb{G}^{n-2}} d\theta_3 \dots d\theta_n \theta_3 \dots \theta_k (f_{01\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n) + \dots + (-1)^l f_{11\dots 10_l 1\dots 1}(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)) \\
&= -i \int_{\mathbb{G}^{n-2}} d\theta_3 \dots d\theta_n F(\theta_3 + \dots + \theta_k, \theta_3, \dots, \theta_n) \\
&= -i \int_{\mathbb{G}^{n-1}} d\theta_3 \dots d\theta_n d\theta_2 \delta(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k) F(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) \\
&= (-1)^{n-1} i \int_{\mathbb{G}^{n-1}} d\theta_2 \dots d\theta_n \delta(\theta_2 - \theta_3 - \dots - \theta_k) F(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n), \tag{370}
\end{aligned}$$

- ИДЕНТИТЕТ (202):

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^m} d^m y \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n e^{iy_a(x^a - M^{aij}\theta_i\theta_j)} F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} d^m y \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n e^{iy_a x^a} \\
&\quad \times \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{b!} (-iy_a M^{aij} \theta_i \theta_j)^b F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} d^m y \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n e^{iy_a x^a} \\
&\quad \times \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{b!} \left(M^{aij} \theta_i \theta_j \frac{\partial}{\partial x^a} \right)^b F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \\
&= (2\pi)^m \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n \prod_{a=1}^m \delta(x^a) \\
&\quad \times \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{b!} \left(M^{aij} \theta_i \theta_j \frac{\partial}{\partial x^a} \right)^b F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \\
&= (2\pi)^m \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{b!} \left(M^{aij} \theta_i \theta_j \frac{\partial}{\partial x^a} \right)^b F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) \Big|_{x=0} \\
&= (2\pi)^m \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n F(M^{aij} \theta_i \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_n) \\
&= (2\pi)^m \int_{\mathbb{R}^m} d^m x \int_{\mathbb{G}^k} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_k \int_{\mathbb{G}^{n-k}} d\theta_{k+1} \dots d\theta_n \prod_{a=1}^m \delta(x^a - M^{aij} \theta_i \theta_j) F(x, \theta_1, \dots, \theta_n).
\end{aligned} \tag{371}$$

Литература

- [1] J. Polchinski, *String Theory Vol. I: An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [2] J. Polchinski, *String Theory Vol. II: Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [3] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [4] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [5] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2014).
- [6] E. Bianchi, M. Han, E. Magliaro, C. Perini, C. Rovelli and W. Wieland, “Spinfoam fermions”, *Class. Quant. Grav.* **30**, 235023 (2013), [arXiv:1012.4719](#).
- [7] M. Vojinović, “Cosine problem in EPRL/FK spin foam model”, *Gen. Relativ. Gravit.* **46**, 1616 (2014), [arXiv:1307.5352](#).
- [8] A. Miković and M. Vojinović, *State-Sum Models of Piecewise Linear Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore (2023).
- [9] J. C. Baez and J. Huerta, “An Invitation to Higher Gauge Theory”, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 2335 (2011), [arXiv:1003.4485](#).
- [10] L. Crane and M. D. Sheppeard, “2-Categorical Poincaré representations and state sum applications”, [arXiv:math/0306440](#).
- [11] A. Miković and M. Vojinović, “Poincaré 2-group and quantum gravity”, *Class. Quant. Grav.* **29**, 165003 (2012), [arXiv:1110.4694](#).
- [12] Z. Li, “A global geometric approach to parallel transport of strings in gauge theory”, [arxiv:1910.14230](#).
- [13] C. Saemann and M. Wolf, “Non-abelian tensor multiplet equations from twistor space”, *Commun. Math. Phys.* **328**, 527 (2014), [arxiv:1205.3108](#).
- [14] B. Jurco, C. Saemann and M. Wolf, “Semistrict Higher Gauge Theory”, *JHEP* **87** (2005), [arxiv:1403.7185](#).
- [15] Y. Hidaka, M. Nitta and R. Yokokura, “Higher-form symmetries and 3-group in axion electrodynamics”, *Phys. Lett. B* **808**, 135672 (2020), [arxiv:2006.12532](#).
- [16] Y. Hidaka, M. Nitta and R. Yokokura, “Global 3-group symmetry and ’t Hooft anomalies in axion electrodynamics”, *JHEP* **1**, 173 (2021), [arxiv:2009.14368](#).
- [17] C. Saemann and M. Wolf, “Six-Dimensional Superconformal Field Theories from Principal 3-Bundles over Twistor Space”, *Lett. Math. Phys.* **104**, 1147 (2014), [arxiv:1305.4870](#).

- [18] D. Song, K. Wu and J. Yang, “3-form Yang-Mills based on 2-crossed modules”, *Jour. Geom. Phys.* **178**, 104537 (2022), [arxiv:2108.12852](#).
- [19] D. Song, K. Wu and J. Yang, “Higher form Yang-Mills as higher BFYM theories”, *Eur. Phys. Jour. C* **82**, 1034 (2022), [arxiv:2109.13443](#).
- [20] Y. Hidaka, M. Nitta and R. Yokokura, “Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry”, *Phys. Lett. B* **823**, 136762 (2021), [arxiv:2107.08753](#).
- [21] Y. Hidaka, M. Nitta and R. Yokokura, “Global 4-group symmetry and ’t Hooft anomalies in topological axion electrodynamics”, *Prog. Theor. Exper. Phys.* **2022**, 04A109 (2022), [arxiv:2108.12564](#).
- [22] B. Jurco, C. Saemann and M. Wolf, “Higher Groupoid Bundles, Higher Spaces, and Self-Dual Tensor Field Equations”, *Fortsch. Phys.* **64**, 674 (2016), [arxiv:1604.01639](#).
- [23] C. Saemann and M. Wolf, “Supersymmetric Yang-Mills Theory as Higher Chern-Simons Theory”, *JHEP* **07**, 111 (2017), [arxiv:1702.04160](#).
- [24] B. Jurco, T. Macrelli, L. Raspollini, C. Saemann and M. Wolf, “L-infinity Algebras, the BV Formalism, and Classical Fields”, *Fortsch. Phys.* **67**, 1910025 (2019), [arxiv:1903.02887](#).
- [25] T. Radenković and M. Vojinović, “Higher Gauge Theories Based on 3-groups”, *JHEP* **10**, 222 (2019), [arXiv:1904.07566](#).
- [26] T. Radenković and M. Vojinović, “Topological invariant of 4-manifolds based on a 3-group”, *JHEP* **7**, 105 (2022), [arXiv:2201.02572](#).
- [27] J. F. Plebanski, “On the separation of Einsteinian substructures”, *Jour. Math. Phys.* **18**, 2511 (1977).
- [28] J. C. Baez, “An Introduction to Spin Foam Models of Quantum Gravity and BF Theory”, *Lect. Notes Phys.* **543**, 25 (2000), [arXiv:gr-qc/9905087](#).
- [29] M. Celada, D. González and M. Montesinos, “BF gravity”, *Class. Quant. Grav.* **33**, 213001 (2016), [arXiv:1610.02020](#).
- [30] J. Baez, “4-Dimensional BF Theory as a Topological Quantum Field Theory”, *Lett. Math. Phys.* **38**, 129 (1996), [arxiv:q-alg/9507006](#).
- [31] F. Girelli, H. Pfeiffer and E. M. Popescu, “Topological higher gauge theory – from BF to BFCG theory”, *Jour. Math. Phys.* **49**, 032503 (2008), [arXiv:0708.3051](#).
- [32] J. F. Martins and A. Miković, “Lie crossed modules and gauge-invariant actions for 2-BF theories”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **15**, 1059 (2011), [arXiv:1006.0903](#).
- [33] A. Miković and M. A. Oliveira, “Canonical formulation of Poincaré BFCG theory and its quantization”, *Gen. Relativ. Gravit.* **47**, 58 (2015), [arXiv:1409.3751](#).
- [34] A. Miković, M. A. Oliveira and M. Vojinović, “Hamiltonian analysis of the BFCG theory for the Poincaré 2-group”, *Class. Quant. Grav.* **33**, 065007 (2016), [arxiv:1508.05635](#).

- [35] A. Miković, M. A. Oliveira and M. Vojinović, “Hamiltonian analysis of the BFCG theory for a generic Lie 2-group”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **26**, 3783 (2022), [arXiv:1610.09621](#).
- [36] A. Miković, M. A. Oliveira and M. Vojinović, “Hamiltonian analysis of the BFCG formulation of General Relativity”, *Class. Quant. Grav.* **36**, 015005 (2019), [arXiv:1807.06354](#).
- [37] S. K. Asante, B. Dittrich, F. Girelli, A. Riello and P. Tsimiklis, “Quantum geometry from higher gauge theory”, *Class. Quant. Grav.* **37**, 205001 (2020), [arXiv:1908.05970](#).
- [38] F. Girelli, M. Laudonio and P. Tsimiklis, “Polyhedron phase space using 2-groups: kappa-Poincare as a Poisson 2-group”, [arXiv:2105.10616](#).
- [39] A. Miković and M. Vojinović, “Standard Model and 4-groups”, *Europhys. Lett.* **133**, 61001 (2021), [arXiv:2008.06354](#).
- [40] T. Porter, “Topological quantum field theories from homotopy n-types”, *J. London Math. Soc.* **58**, 723 (1998), [MR 1678163](#).
- [41] T. Radenković, M. Vojinović, “The 3BF theory as a TQFT”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **58**, 345203 (2025), [arXiv:2412.21032](#).
- [42] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- [43] T. Radenković and M. Vojinović, “Hamiltonian Analysis for the Scalar Electrodynamics as 3BF Theory”, *Symmetry* **12**, 620 (2020), [arXiv:2004.06901](#).
- [44] T. Radenković and M. Vojinović, “Gauge symmetry of the 3BF theory for a generic Lie 3-group”, *Class. Quant. Grav.* **39**, 135009 (2022), [arXiv:2101.04049](#).
- [45] J. F. Martins and R. Picken, “The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module”, *Differ. Geom. Appl. Jour.* **29**, 179-206 (2011), [arXiv:0907.2566](#).
- [46] W. Wang, “On 3-gauge transformations, 3-curvatures and Gray-categories”, *Jour. Math. Phys.* **55**, 043506 (2014).
- [47] P. Stipsić and M. Vojinović, “Symmetry breaking mechanisms of the 3BF action for the Standard Model coupled to gravity”, *Jour. Phys. A: Math. Theor.* **58**, 215201 (2025), [arXiv:2402.17675](#).
- [48] P. Stipsić and M. Vojinović, “Correspondence between 3BF and Einstein-Cartan formulations of quantum gravity”, *Class. Quantum Grav.* **42**, 195009 (2025), [arXiv:2506.17722](#).
- [49] J. Baez and J. Dolan, “Higher dimensional algebra and Topological Quantum Field Theory”, *Jour. Math. Phys.* **36**, 6073 (1995), [arXiv:q-alg/9503002](#).
- [50] T. Radenković and M. Vojinović, “Quantum gravity and elementary particles from higher gauge theory”, *Ann. Univ. Craiova Phys.* **30**, 74 (2020), [arXiv:2103.08037](#).
- [51] M. Vasilović and M. Vojinović, “Spinning branes in Riemann-Cartan spacetime”, *Phys. Rev. D* **78**, 104002 (2008), [arXiv:1010.1861](#).

- [52] M. Đorđević, T. Radenković et al, “Henneaux-Teitelboim gauge symmetry and its applications to higher gauge theories”, *Universe* **9**, 281 (2023), [arXiv:2305.00117](#).
- [53] J. W. York, “Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation”, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1082 (1972).
- [54] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action integrals and partition functions in quantum gravity”, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [55] J. Erdmenger, B. Heß, I. Matthaiakakis and R. Meyer, “Universal Gibbons-Hawking-York term for theories with curvature, torsion and non-metricity”, *SciPost Phys.* **14**, 099 (2023), [arXiv:2211.02064](#).
- [56] B. P. Abbott et al, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016). [arXiv:1602.03837](#).
- [57] V. Gerdt, R. Horan et al, “On the Hamiltonian reduction of geodesic motion on $SU(3)$ to $SU(3)/SU(2)$ ”, *J. Math. Phys.* **47**, 112902 (2006), [arXiv:hep-th/0511245](#).
- [58] A. Miković, M. Vojinović, “Effective action and semiclassical limit of spin foam models”, *Class. Quant. Grav.* **28**, 225004 (2011), [arXiv:1104.1384](#).
- [59] A. Miković, “Effective Actions for Regge Piecewise Flat Quantum Gravity”, *Universe* **8(5)**, 268 (2022), [arXiv:2203.12313](#).